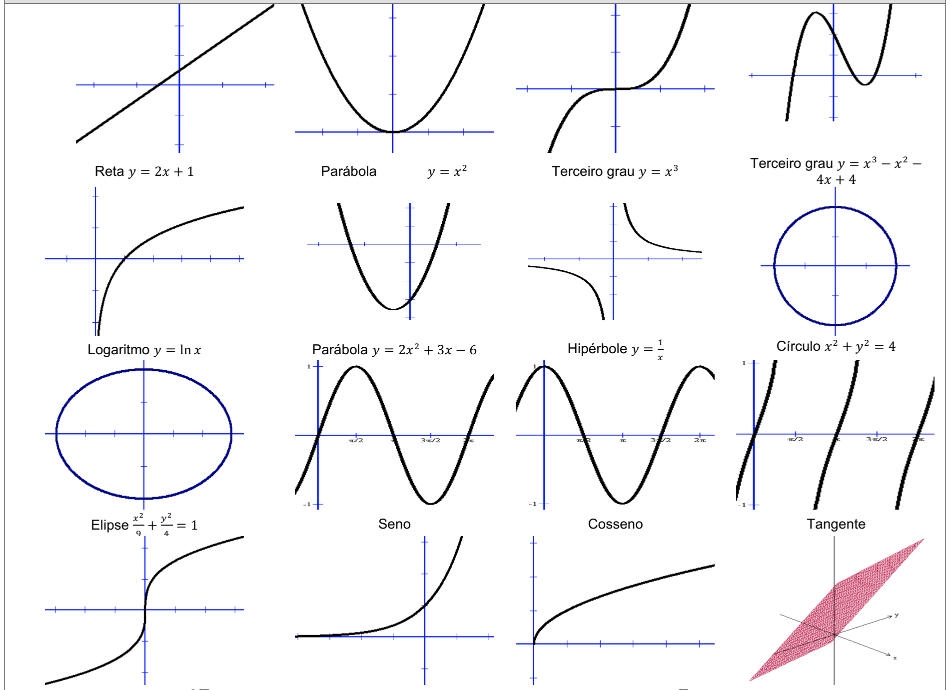
Exemplos de funções e seus gráficos



Reta $y = 2x + 1$	Parábola $y = x^2$	Terceiro grau $y = x^3$	Terceiro grau $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$
Logaritmo $y = \ln x$	Parábola $y = 2x^2 + 3x - 6$	Hipérbole $y = \frac{1}{x}$	Círculo $x^2 + y^2 = 4$
Elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$	Seno	Cosseno	Tangente
Raiz Cúbica $y = \sqrt[3]{x}$	Exponencial $y = e^x$	Raiz Quadrada $y = \sqrt{x}$	Plano $z = x + y$
Paraboloide Hiperbólico $z = x^2 - y^2$	Paraboloide Elíptico $z = x^2 + y^2$	Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$	Elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

Os 10 Mandamentos da Matemática

I. Não dividirás por zero
II. Não simplificarás na soma ou subtração
III. Não distribuirás a potência de uma soma nas parcelas
IIIa. O que significa também que não extrairás a raiz das parcelas de uma soma!
IV. Não calcularás a derivada ou integral de um produto calculando a derivada ou integral de cada fator e depois multiplicando os resultados
V. Colocarás sempre tua calculadora em radianos
VI. Sempre simplificarás uma função antes de integrá-la ou derivá-la
VII. Não esquecerás de colocar $+C$ no final das integrais indefinidas
VIII. Utilizarás duas linhas para escrever as frações
IX. Farás exercícios até que surjam calos em teus dedos
X. Responderás as questões da prova em ordem

A matemática de modo algum são fórmulas, assim como a música não são notas. (Y Jurquim?)

Fórmulas Básicas

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab + b^2)$
$y - y_0 = m(x - x_0)$	Retas paralelas: $m_1 = m_2$	Retas normais: $m_1 . m_2 = -1$

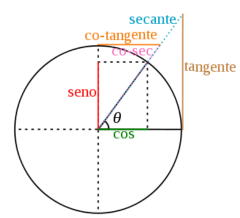
Identidades Trigonométricas

$sena \cdot cosb = \frac{1}{2}[sen(a+b) + sen(a-b)]$	$cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$
$sena \cdot senb = \frac{1}{2}[cos(a-b) - cos\,(a+b)]$	$sen^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$
$cosa \cdot cosb = \frac{1}{2}[cos(a-b) + cos\,(a+b)]$	$sen2x = 2senx.cosx$

Logaritmos

$\log_b a = c,\ \text{pois } b^c = a$	$\log_a 1 = 0$
$\log_{10} a = \log a$	$\log_e a = lna$
$ln(a \cdot b) = lna + lnb$	$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
$ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$	$n \cdot lna = lna^n$

Relações Trigonométricas



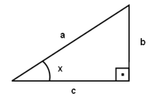
$sen^2x + cos^2x = 1$ $\qquad secx = \frac{1}{cosx}$

$sec^2x = 1 + tan^2x$

$cscx = \frac{1}{senx}$

$csc^2x = 1 + cot^2x$

$\frac{senx}{cosx} = tanx$ $\qquad tanx = \frac{1}{cotx}$



$senx = \frac{b}{a}, cosx = \frac{c}{a}, tanx = \frac{b}{c}$

$arcsecx = arccos\,(1/x)$
$arccscx = arcsen\,(1/x)$
$arccotx = arctan\,(1/x)$

	sen $\begin{smallmatrix}+&+\\-&-\end{smallmatrix}$	cos $\begin{smallmatrix}-&+\\-&+\end{smallmatrix}$	tan $\begin{smallmatrix}-&+\\+&-\end{smallmatrix}$	cot $\begin{smallmatrix}-&+\\+&-\end{smallmatrix}$	sec $\begin{smallmatrix}-&+\\-&+\end{smallmatrix}$	csc $\begin{smallmatrix}+&+\\-&-\end{smallmatrix}$
0	0	1	0	∞	1	∞
$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	1	0	∞	0	∞	1
π	0	-1	0	∞	-1	∞

Limites

$\lim_{x\to0} \frac{senx}{x} = 1$	$\lim_{x\to0} \frac{tanx}{x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x\to0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x\to0} \frac{1}{x} = \infty$

Assíntotas: Vertical: $y = \lim_{x\to0} f(x)$ Inclinada: $y = mx + b$, onde $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx]$

Fórmulas Básicas de Derivação

$\frac{d}{dx} sen\, u = cos\, u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} cos\, u = -sen\, u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} tan\, u = sec^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} cot\, u = -csc^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{du} sec\, u = sec\, u\, tan\, u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} csc\, u = -cscu\, cot\, u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} arc\, sen\, u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} arc\, cos\, u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} arc\, tan\, u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} arc\, cot\, u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} arc\, sec\, u = \frac{1}{u\sqrt{(u^2-1)}} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} arccsc u = -\frac{1}{u\sqrt{(u^2-1)}} \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} a^u = a^u ln\, a \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} lnu = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} u^v = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v lnu \frac{dv}{dx}$
$\frac{d}{dx} u \cdot v = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$	$\frac{d}{dx} C = 0$, onde $C =$ constante

Aplicações das Derivadas

$Ptos\ Crít.(Fermat) \rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = 0$	$\frac{d}{dx} f(x) > 0 \rightarrow f(x) \therefore$	$\frac{d^2}{dx^2} f(x) > 0 \rightarrow f(x) \cup$	Regra de l'Hôpital:
$Ptos\ Inflexão \frac{d^2}{dx^2} f(x) = 0$	$\frac{d}{dx} f(x) < 0 \rightarrow f(x) \ddots$	$\frac{d^2}{dx^2} f(x) < 0 \rightarrow f(x) \cap$	$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}\ ou\ \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)}$

Fórmulas Básicas de Integração

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $para\ n \neq -1$	$\int sen\, u\, du = -cos\, u + C$	$\int cos\, udu = sen\, u + C$
$\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$	$\int tan\, udu = ln\, \lvert sec\, u \rvert + C$	$\int cotudu = ln\lvert senu \rvert + C$
$\int e^u du = e^u + C$	$\int secudu = ln\lvert secu + tanu \rvert + C$	$\int cscudu = ln\lvert cscu - cotu \rvert + C$
$\int a^u . lnadu = a^u + C$	$\int sec^2 udu = tanu + C$	$\int csc^2 udu = -cotu + C$
$\int lnudu = uln\lvert u \rvert - u + C$	$\int secu.tan\, udu = secu + C$	$\int cscu.cot\, udu = -cscu + C$
$\int \frac{1}{u} du = ln\lvert u \rvert + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = arcsen \frac{u}{a} + C$	$\int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a} arctan \frac{u}{a} + C$

Obs.: a e n são constantes; u e v são variáveis

Tabela de Integrais

Fórmulas de redução

80) $\int sen^m u\, cos^n u\, du = \frac{sen^{m+1} u \cdot cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int sen^m u\, cos^{n-2} u\, du$

81) $\int sen^n udu = -\frac{1}{n} sen^{n-1} u \cdot cosu + \frac{n-1}{n} \int sen^{n-2} u\, du$

82) $\int cos^n udu = \frac{1}{n} cos^{n-1} u \cdot senu + \frac{n-1}{n} \int cos^{n-2} u\, du$

83) $\int tan^n udu = \frac{1}{n-1} tan^{n-1} u - \int tan^{n-2} udu$

84) $\int cot^n udu = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du$

85) $\int sec^n udu = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \cdot tanu + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u\, du$

86) $\int csc^n udu = -\frac{1}{n-1} \csc^{n-2} u \cdot cotu + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u\, du$

Funções trigonométricas inversas

87) $\int arcsenxdx = x \cdot arcsenx + \sqrt{1-x^2} + C$

88) $\int arccosxdx = x \cdot arccosx - \sqrt{1-x^2} + C$

89) $\int arctanxdx = x \cdot arctanx - \frac{1}{2} \ln\lvert 1+x^2 \rvert + C$

90) $\int arccotxdx = x \cdot arccotx - \frac{1}{2} \ln\lvert 1+x^2 \rvert + C$

Integrais Impróprias

Intervalos Infinitos

$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

Funções descontínuas

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$, $quando\ [a,b)$	$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$, $quando\ (a,b]$

Tabela de Integrais

Formas contendo $a + bu \pm cu^2$

42) $\int \frac{1}{a + bu \pm cu^2} du = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2cu + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C, b^2 < 4ac$

43) $\int \frac{1}{a + bu + cu^2} du = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} ln \left| \frac{2cu + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cu + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C, b^2 > 4ac$

44) $\int \frac{1}{a + bu - cu^2} du = \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4ac}} ln \left| \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} + 2cu - b}{\sqrt{b^2 + 4ac} - 2cu + b} \right| + C$

45) $\int \sqrt{a + bu + cu^2} du = \frac{2cu + b}{4c} - \frac{b^2 - 4ac}{8c^{\frac{3}{2}}} \ln \left|2cu + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bu + cu^2}\right| + C$

46) $\int \sqrt{a + bu - cu^2} du = \frac{2cu - b}{4c} \sqrt{a + bu + cu^2} + \frac{b^2 + 4ac}{8c^{\frac{3}{2}}} arcsen \left(\frac{2cu - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} \right) + C$

47) $\int \frac{1}{\sqrt{a + bu + cu^2}} du = \frac{1}{\sqrt{c}} ln \left|2cu + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bu + cu^2}\right| + C$

48) $\int \frac{1}{\sqrt{a + bu - cu^2}} du = \frac{1}{\sqrt{c}} arcsen \left(\frac{2cu - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} \right) + C$

49) $\int \frac{u}{\sqrt{a + bu + cu^2}} du = \frac{\sqrt{a + bu + cu^2}}{c} + \frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}} ln \left|2cu + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bu + cu^2}\right| + C$

50) $\int \frac{u}{\sqrt{a + bu - cu^2}} du = -\frac{\sqrt{a + b - cu^2}}{c} + \frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}} arcsen \left(\frac{2cu - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} \right) + C$

Formas exponenciais e logarítmicas

51) $\int e^u du = e^u + C$

52) $\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C, a > 0, a \neq 1$

53) $\int ue^{au} du = \frac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + C$

54) $\int u^n e^{au} du = -\frac{e^{au}}{(n - 1)u^{n-1}} + \frac{a}{n - 1} \int u^{n-1} e^{ea} du$

55) $\int \frac{e^{au}}{u^n} du = -\frac{e^{au}}{(n - 1)u^{n-1}} + \frac{a}{n - 1} \int \frac{e^{au} du}{u^{n-1}}$

56) $\int lnu \, du = uln|u| - u + C$

57) $\int u^n lnu \, du = \frac{u^{n+1} \ln |u|}{n + 1} - \frac{u^{n+1}}{(n + 1)^2} + C$

58) $\int \frac{1}{u \, lnu} du = \ln\left|ln|u|\right| + C$

59) $\int e^{au} sen(bu) du = \frac{e^{au}(a \, sen \, (bu) - b \cos(bu))}{a^2 + b^2} + C$

60) $\int e^{au} \cos(bu) \, du = \frac{e^{au}(b \, sen \, (bu) + a \cos(bu))}{a^2 + b^2} + C$

Formas trigonométricas

61) $\int sen \, udu = -cosu + C$

62) $\int cos \, udu = senu + C$

63) $\int tan \, udu = -ln \ | cos \, u| + C = ln \ | sec \, u| + C$

64) $\int cot \, udu = ln|sen \, u| + C$

65) $\int sec \, udu = ln \ | sec \, u + tan \, u| + C$

66) $\int csc \, udu = ln|cscu - cotu| + C$

67) $\int sec^2 \, udu = tanu + C$

68) $\int csc^2 \, udu = - cot \, u + C$

69) $\int sec \, u \, tan \, udu = sec \, u + C$

70) $\int csc \, u \, cot \, udu = -cscu + C$

71) $\int sen^2 udu = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} sen \, 2u + C$

72) $\int cos^2 \, udu = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} sen \, 2u + C$

73) $\int cos^n \, u \, sen \, u \, du = -\frac{cos^{n+1} \, u}{n + 1} + C$

74) $\int sen^n u \, cos \, udu = \frac{sen^{n+1} u}{n + 1} + C$

75) $\int sen(au) \, sen(bu) du = -\frac{sen(a + b)u}{2(a + b)} + \frac{sen(a - b)u}{2(a - b)} + C$

76) $\int cos(au) \, cos(bu) \, du = \frac{sen(a + b)u}{2(a + b)} + \frac{sen(a - b)u}{2(a - b)} + C$

77) $\int sen(au) \, cos(bu) du = -\frac{cos(a + b) \, u}{2(a + b)} - \frac{cos(a - b) \, u}{2(a - b)} + C$

78) $\int u \, sen \, u \, du = senu - u \, cos \, u + C$

79) $\int u \, cos \, u \, du = cos \, u + u \, sen \, u + C$

JUST $\int du$ IT

Cálculo Diferencial e Integral
Resumo de Fórmulas, v. 5.0
Prof. Marco Antonio Simões

Integração de Potências de Funções Trigonométricas

Casos de $sen^m x, cos^n x$ ou $sen^m x \cdot cos^n x$	
Pelo menos um dos expoentes é ímpar:	Decompor o fator com o expoente ímpar para obter um $sen^2 x$ ou um $\cos^2 x$, e usar $sen^2 x + \cos^2 x = 1$
Todos os expoentes são pares:	Decompor os fatores para obter um $sen^2 x$ ou um $cos^2 x$, e substituir ambos por $sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$ ou $cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$

Casos de $\tan^m x$ e $\cot^m x$ ou $\sec^n x$ e $\csc^n x$		
Onde m é:	Onde n é:	Usar:
Par ou Ímpar		Decompor deixando um $\tan^2 x$, e usar $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
	Par	Decompor deixando um $\sec^2 x$, e usar $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
	Ímpar	Integração por partes

Casos de $\tan^m x \cdot \sec^n x$ ou $\cot^m x \cdot \csc^n x$ (regras abaixo para $\tan^m x \cdot \sec^n x$; se for $\cot^m x \cdot \csc^n x$, usar correspondentes)		
Par	**Par**	Decompor $secx$, deixando $\sec^2 x$, e usar $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
Ímpar	**Ímpar**	Decompor os dois, deixando $secxtanx$, e usar $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
Ímpar	**Par**	Um dos métodos acima
Par	**Ímpar**	Integração por partes

Substituição Trigonométrica	**Frações Parciais**	**Integração por Partes**	
$\sqrt{a^2 - u^2}$, fazer $u = asen\theta$ $\sqrt{u^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + u^2}$, fazer $u = atan\theta$ $\sqrt{u^2 - a^2}$, fazer $u = asec\theta$	$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x + a} + \frac{Bx + C}{x^2 + b} + \cdots$	$\int udv = uv - \int vdu$	Recomendação p/ u: L – Logarítmicas I – Inversas Trigonométricas A – Algébricas T – Trigonométricas E – Exponenciais

Aplicações da Integração

Área entre Curvas	Valor Médio	Volume de Revolução	Comprimento de uma curva
$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$	$y_m = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx$	$V = \pi \int_a^b (R^2 - r^2) \, dx$	$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$

Área de Revolução	Área entre curvas	Plano Médio	Volume	Volume
$A = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dy$	$A = \iint_R dA$	$z_m = \frac{1}{A} \iint_R f(x, y)dA$	$V = \iint_R f(x, y)dA$	$V = \iiint_T dV$

Centro de massa, figuras planas, 1 curva		Centro de massa, figuras planas, 2 curvas	
$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$	$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b x \cdot [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x)dx}$	$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \cdot [f(x) - g(x)]dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$	$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b x \cdot ([f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$
Centro de massa, sólidos de revolução, 1 curva		**Centro de massa, sólidos de revolução, 2 curvas**	
$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \cdot [f(x)]^2 dx}{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$	$\bar{y} = \frac{\int_c^d y \cdot [f(y)]^2 dy}{\int_c^d [f(y)]^2 dy}$	$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \cdot \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{\int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx}$	$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \cdot \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{\int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx}$

Funções de duas ou mais variáveis

Acréscimo total	Diferencial total	Plano Tangente
$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$	$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$	$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

Regra da cadeia (exemplos)		
Simples [$z=f(x,y);\ x=f(u), y=f(u)$]	Geral [$z=f(x,y);\ x=f(u,v), y=f(u,v)$]	
$\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{du}$	$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$	$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$

Derivada direcional	
Forma angular	Forma vetorial
$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot \operatorname{sen}\alpha$	$\frac{df}{ds} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u}$

Versor	Gradiente (vetorial)	Direção da taxa máxima
$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\lvert v\rvert} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$	$\vec{\nabla} f = grad\ \vec{f} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$	$\vec{u} = \frac{\vec{\nabla} f(x_0,y_0)}{\lvert\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\rvert}$

Divergente (escalar)		Laplaciano
$div\ \vec{f} = \nabla\cdot\vec{f}$	$div\ \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}f_1 + \frac{\partial}{\partial y}f_2 + \frac{\partial}{\partial z}f_3$	$div\left(grad\ \vec{f}\right) = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f$

Equação de Laplace	Equação da Continuidade		
$\vec{\nabla}^2 f = 0$	$div\ \vec{u} + \frac{\partial\rho}{\partial t}f_1 = 0$	$\vec{u} = \rho\vec{v}$	$div\ \vec{v} = 0\ \rightarrow fluido\ incompressível$

Rotacional (vetorial)		
$rot\ \vec{f} = \nabla\times\vec{f}$	$rot\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$	$rot\ \vec{f} = 0\ \rightarrow\ \vec{f}\ é\ irrotacional$

Máximos e mínimos			
Relativos			Condicionados (Lagrange)
$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$	$E_0(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$	$E_0(x_0,y_0) > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \rightarrow$ Mín. local $E_0(x_0,y_0) > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \rightarrow$ Máx. local $E_0(x_0,y_0) < 0\ \rightarrow$ Ponto de sela $E_0(x_0,y_0) = 0\ \rightarrow$ Nada se conclui	$L = f(x) - \lambda g(x)$ $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$

Tabela de Integrais

Formas básicas

1) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

2) $\int \frac{1}{a+bu}du = \frac{1}{b}ln|a+bu| + C$

3) $\int \frac{u}{a+bu}du = \frac{1}{b^2}[(a+bu) - aln|a+bu|] + C$

4) $\int \frac{u^2}{a+bu}du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bu)^2 - 2a(a+bu) + a^2ln\ |a+bu|\right] + C$

5) $\int \frac{1}{u(a+bu)}du = \frac{1}{a}ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

6) $\int \frac{1}{u^2(a+bu)}du = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

7) $\int \frac{u}{(a+bu)^2}du = \frac{1}{b^2}\left(ln|a+bu| + \frac{a}{a+bu}\right) + C$

8) $\int \frac{u^2}{(a+bu)^2}du = \frac{1}{b^3}\left[a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ ln\ |a+bu|\right] + C$

9) $\int \frac{1}{u(a+bu)^2}du = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2}ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

10) $\int \frac{1}{u^2(a+bu)^2}du = -\frac{a+2bu}{a^2u(a+bu)} + \frac{2b}{a^3}ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

Formas contendo $\sqrt{a+bu}$

11) $\int u\sqrt{a+bu}\,du = -\frac{2(2a-3bu)(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{15b^2} + C$

12) $\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2(8a^2-12abu+15b^2u^2)(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{105b^3} + C$

13) $\int \frac{u}{\sqrt{a+bu}}du = -\frac{2(2a-bu)\sqrt{a+bu}}{3b^2} + C$

14) $\int \frac{u^2}{\sqrt{a+bu}}du = \frac{2(3b^2u^2-4abu+8a^2)\sqrt{a+bu}}{15b^3} + C$

15) $\int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}}du = \frac{1}{\sqrt{a}}ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, a > 0$

16) $\int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}}du = \frac{2}{\sqrt{-a}}arctan\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, a < 0$

17) $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} + C$

Formas contendo $a^2 \pm u^2$ e $u^2 \pm a^2$

18) $\int \frac{1}{a^2+u^2}du = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

19) $\int \frac{1}{a^2-u^2}du = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

20) $\int \frac{1}{u^2-a^2}du = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Formas contendo $\sqrt{a^2-u^2}$

21) $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}arcsen\frac{u}{a} + C$

22) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du = arcsen\frac{u}{a} + C, a > 0$

23) $\int \frac{1}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}du = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

24) $\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}du = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}arcsen\frac{u}{a} + C$

25) $\int \frac{u^2}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}du = \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} - arcsen\frac{u}{a} + C$

26) $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2-u^2}}du = -\frac{1}{a}\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

27) $\int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2-u^2}}du = \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C$

28) $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}du = \sqrt{a^2-u^2} - aln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

29) $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - arcsen\frac{u}{a} + C$

Formas contendo $\sqrt{a^2 \pm u^2}$

30) $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right] + C$

31) $\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}du = \frac{1}{8}u(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{1}{8}a^4ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

32) $\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u}du = \sqrt{u^2+a^2} - aln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + C$

33) $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}du = \sqrt{u^2-a^2} - a\,\mathrm{arccos}\frac{a}{u} + C$

34) $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2} + ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

35) $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

36) $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}du = \frac{1}{a}\mathrm{arccos}\frac{a}{u} + C$

37) $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2+a^2}}du = \frac{1}{a}ln\left|\frac{u}{a+\sqrt{u^2+a^2}}\right| + C$

38) $\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C$

39) $\int \frac{1}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}}du = -\frac{(\pm\sqrt{u^2 \pm a^2})}{a^2u} + C$

40) $\int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}}du = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

41) $\int \frac{u^2}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}}du = \frac{-u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$