UC Análise de Fenômenos Físicos da Natureza

Cinemática: Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

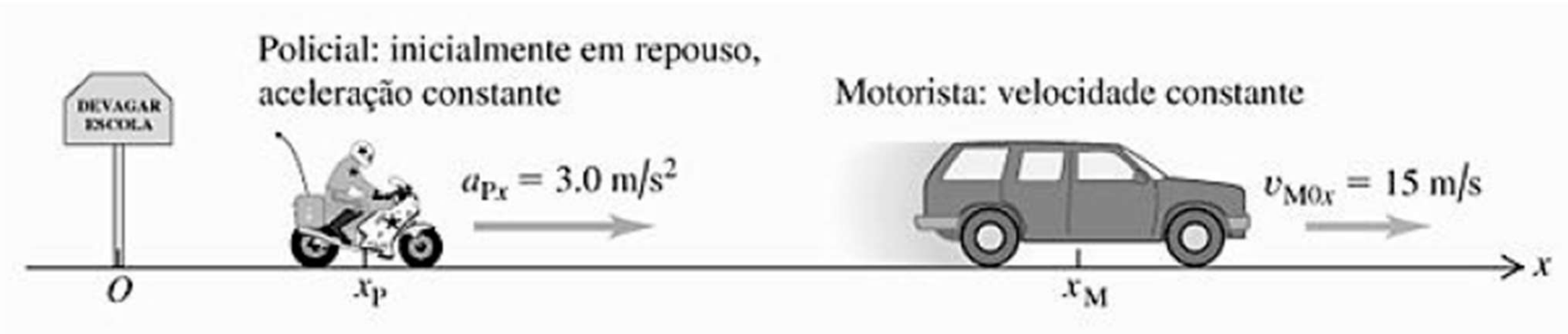
Prof. Simões

Objetivo

- Entender o conceito de aceleração
- Identificar como se comportam a aceleração, a velocidade e a posição no MRUV
- Definir matematicamente as variáveis no MRUV
- Aplicar o conceito de derivadas no cálculo da aceleração instantânea e da velocidade
- Conhecer e saber como aplicar as equações do MRUV na resolução de problemas
- Aplicar as equações nos casos de queda livre vertical

Problema típico

- Um motorista dirige um veículo a uma velocidade constante de 54 km/h, excedendo o limite de velocidade da via indicado na placa. Um policial, partindo da placa, acelera sua moto com uma aceleração de 3,0 m/s^2. Nessas condições, pergunta-se:
  – Em quanto tempo o policial alcançará o veículo?
  – A que velocidade estará o policial no momento do encontro?
  – Qual será a posição do encontro, contando-se a partir da placa?



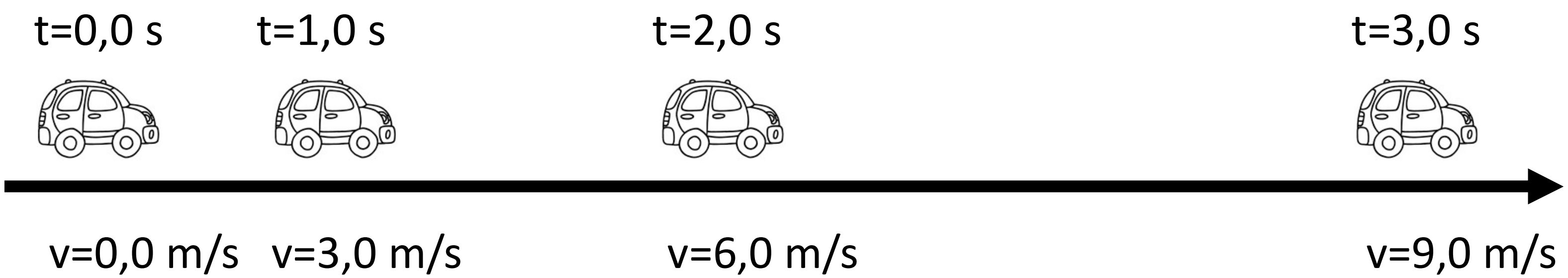
Velocidade e aceleração

- A **velocidade** indica quanto o <u>deslocamento</u> muda com o tempo
  – Exemplo: v=100 km/h -> quer dizer que a cada hora o corpo desloca-se de 100 km.
  – Pode ser média (v_m) ou instantânea (v)

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Velocidade e aceleração

- A **aceleração** indica quanto a velocidade muda com o tempo
  - Exemplo: $a = 3{,}0\ m/s^2$ quer dizer que a cada segundo a velocidade aumenta de $3{,}0\ m/s$.
  - Sendo constante, se em $t_1 = 0\ s$ a velocidade era $0\ m/s$, no instante $1{,}0\ s$ será $3{,}0\ m/s$, no instante $2{,}0\ s$ será $6{,}0\ m/s$, no instante $3{,}0\ s$ será $9{,}0\ m/s$, etc.



Velocidade média e aceleração média

- Vimos que a velocidade média representa a taxa média de variação do deslocamento em relação ao tempo, isto é:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- A aceleração média será a taxa média da variação da velocidade em um intervalo de tempo, ou seja:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aceleração instantânea: definição com exemplo

- A velocidade de um veículo é dada a qualquer instante pela função:

$$v(t) = 60 + 0,75 \cdot t^2$$

Calcule:

1) A velocidade do corpo nos instantes $t_0 = 0$ s, $t_1 = 1,0\ s$ e $t_2 = 4,0\ s$
2) A aceleração média do veículo entre os instantes $t_1 = 1,0\ s$ e $t_2 = 4,0\ s$
3) A aceleração instantânea em $t_1 = 1,0\ s$

Aceleração instantânea: definição com exemplo

1) A velocidade do corpo nos instantes $t = 0\ \mathrm{s}$, $t = 1{,}0\ s$ e $t = 4{,}0\ s$

$$v(t) = 60 + 0{,}75 \cdot t^2$$

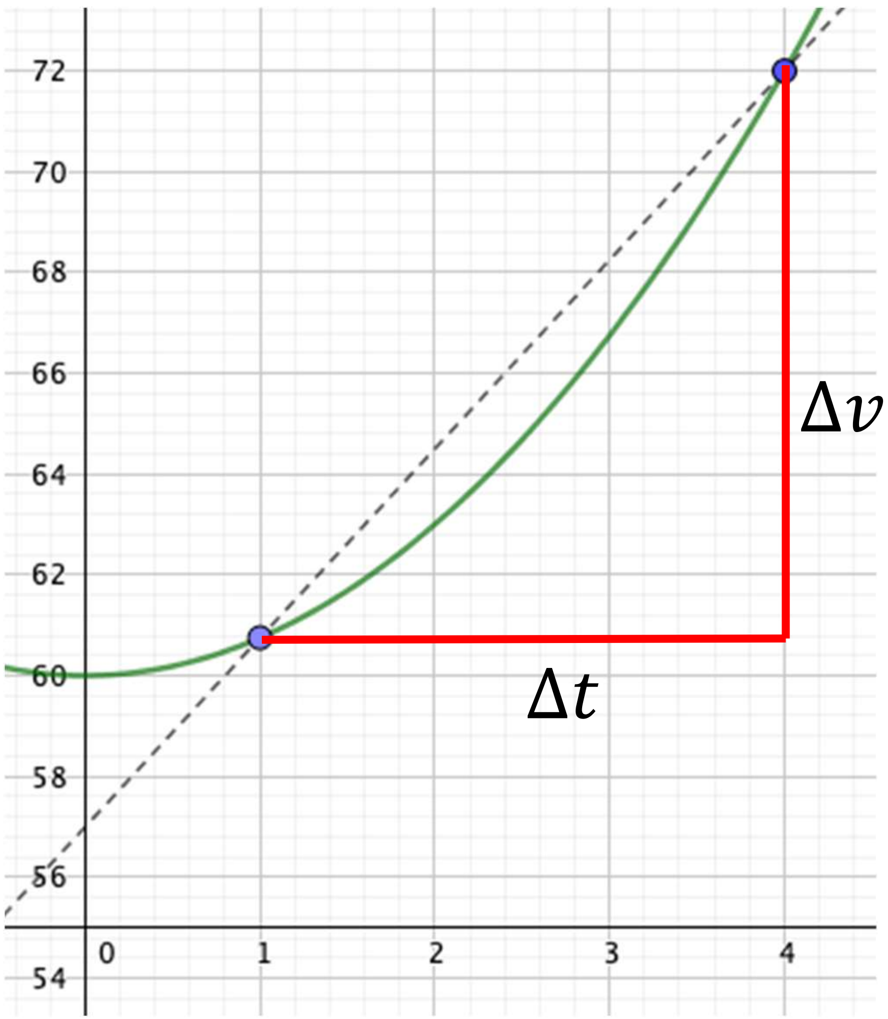
$$v(0) = 60 + 0{,}75 \cdot 0^2 \Rightarrow s(0) = 60\ m/s$$

$$v(1) = 60 + 0{,}75 \cdot 1^2 \Rightarrow s(1) = 60{,}75\ m/s$$

$$v(4) = 60 + 0{,}75 \cdot 4^2 \Rightarrow s(4) = 72{,}0\ m/s$$

Aceleração instantânea: definição com exemplo

2) A aceleração média entre os instante 1,0 s e 4,0 s



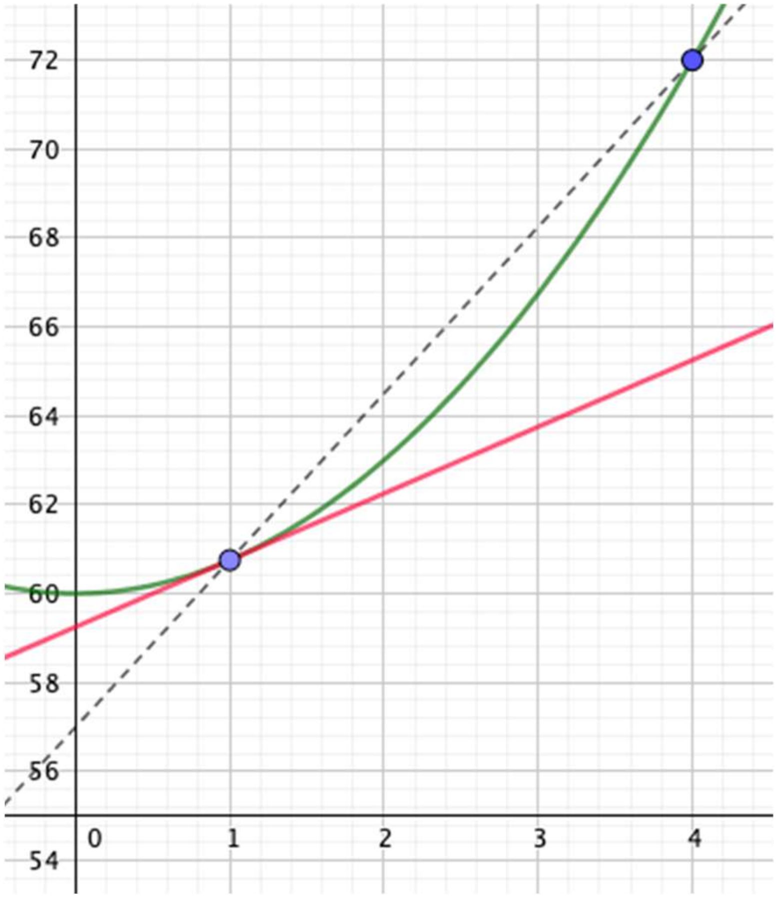
$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a_m = \frac{72 - 60{,}75}{4 - 1}$$

$$a_m = 3{,}75\,\frac{m}{s^2}$$

Aceleração instantânea: definição com exemplo

3) Para o cálculo da aceleração instantânea, representada pela reta tangente ao ponto em $t_1 = 1{,}0\ s$, utilizaremos o conceito de derivadas, ou seja, faremos:



$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t)$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}(60 + 0{,}75 \cdot t^2)$$

$$a(t) = 1{,}5 \cdot t$$

$$a(1) = 1{,}5 \cdot 1 = 1{,}5 \frac{m}{s^2}$$

Resumo

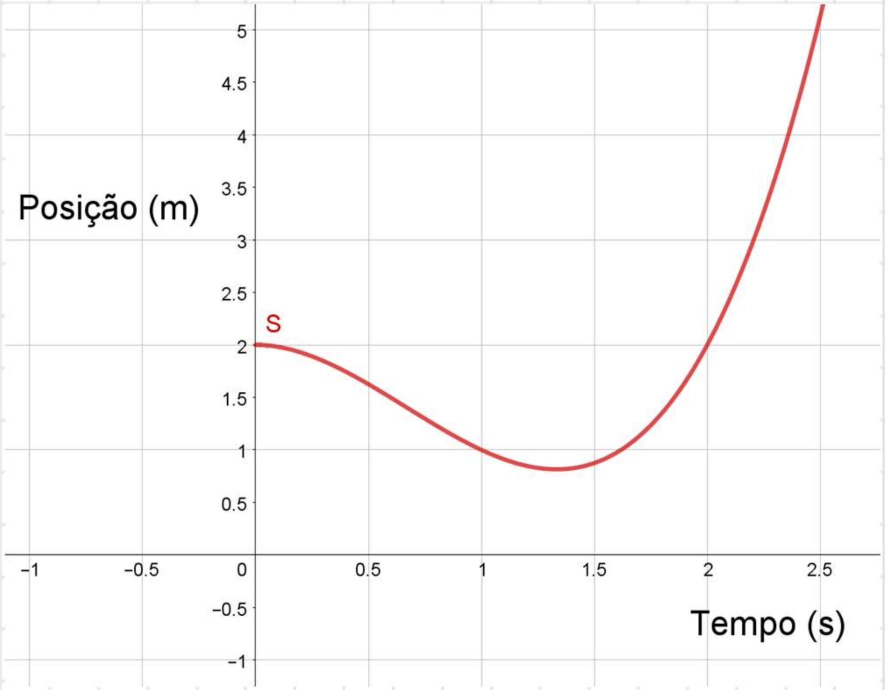
- Assim, temos que:

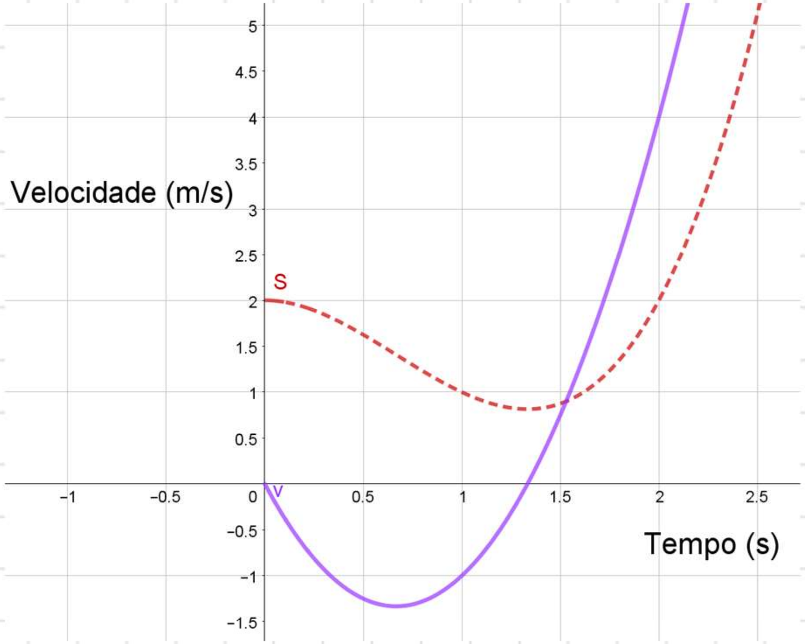
$$
\begin{tikzcd}
s(t) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dt}s(t)"] & v(t) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dt}v(t)"] & a(t)
\end{tikzcd}
$$

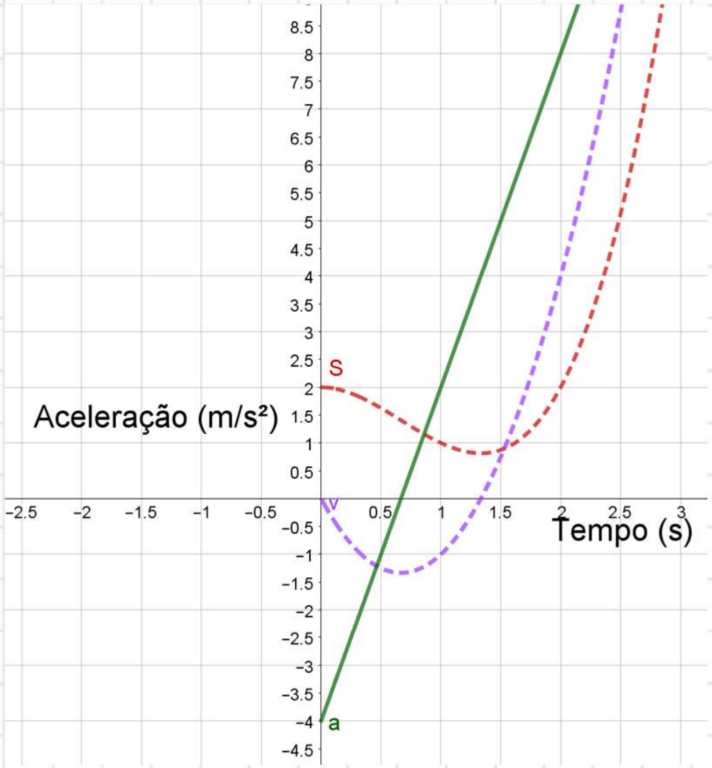
Exemplo

Um corpo se desloca de acordo com a função abaixo. Calcule sua posição, velocidade e aceleração no instante $t = 2,0\ s$

$$s(t) = t^3 - 2t^2 + 2$$

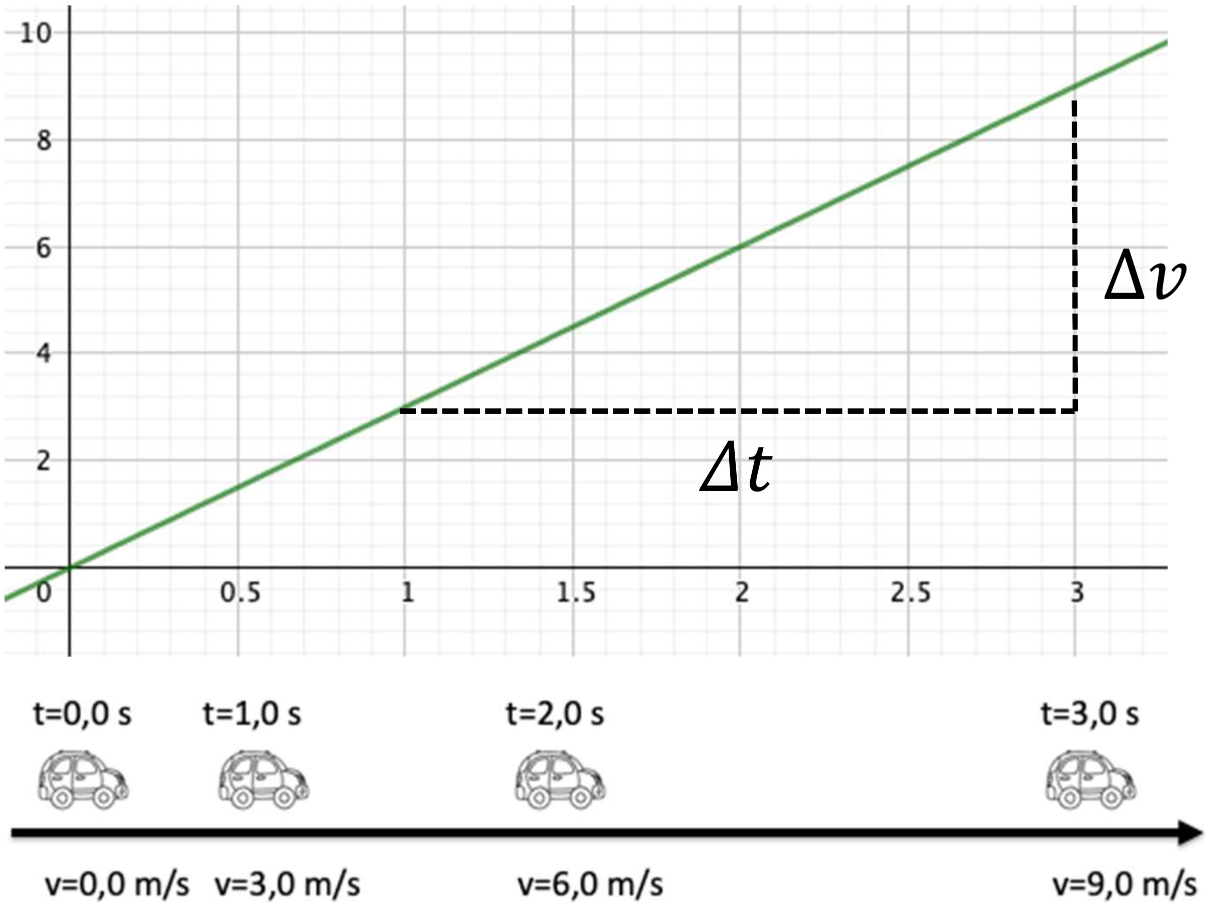



Velocidade (m/s)
Tempo (s)
S
v
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5


Aceleração (m/s²)
Tempo (s)
S
v
a

Aceleração constante: MRUV

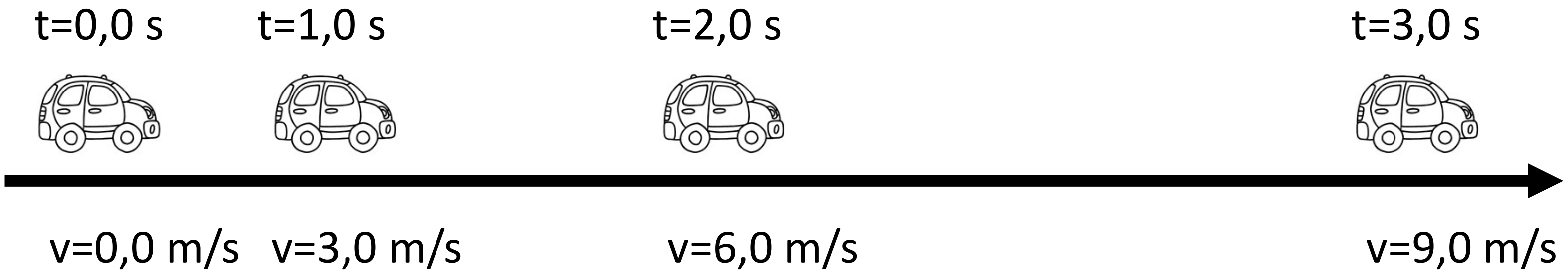
- Quando a aceleração é constante, a taxa de variação da velocidade também será constante, e teremos $a = a_m$:



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

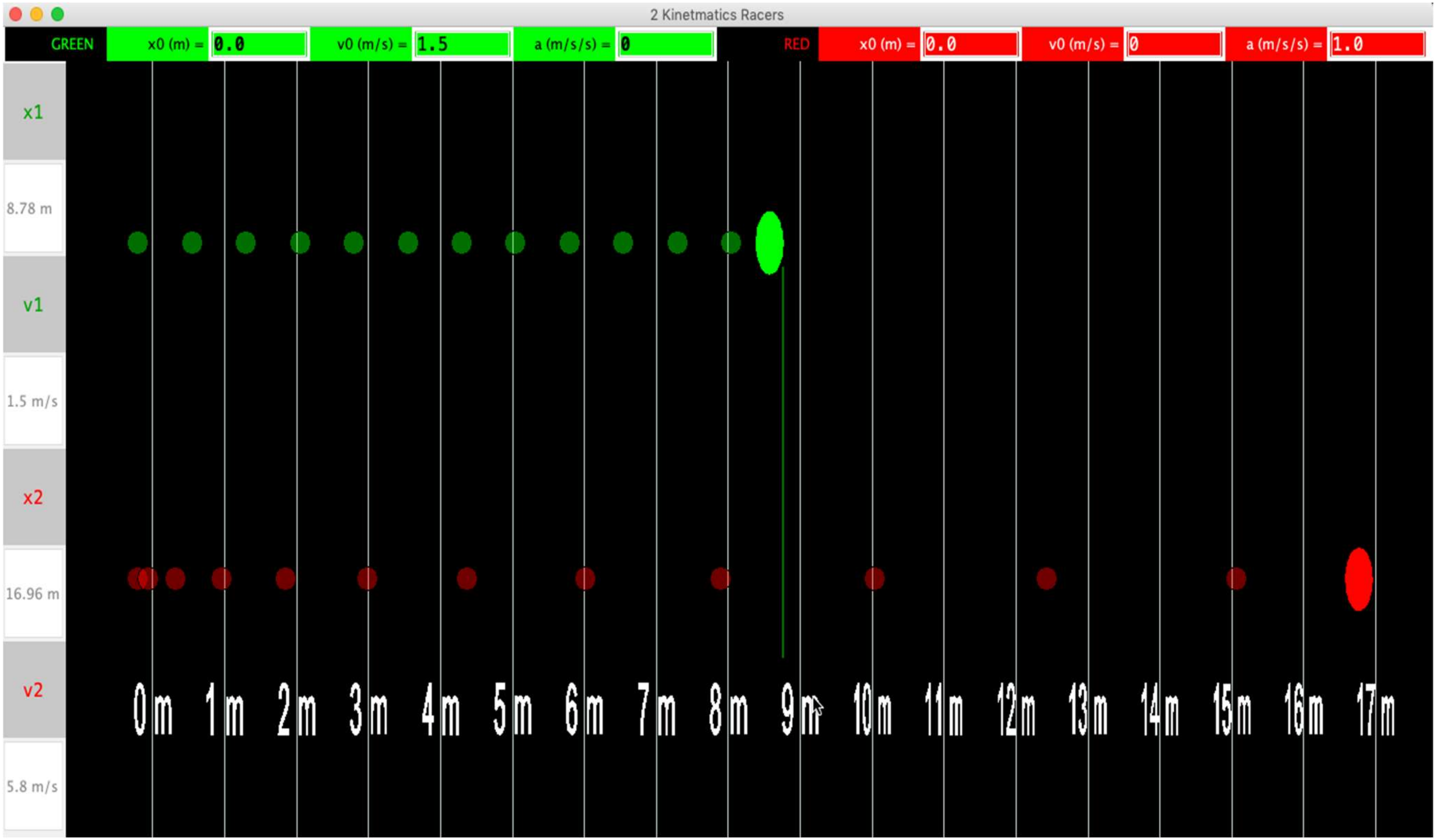
Aceleração constante: MRUV

- No exemplo anterior



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3{,}0 - 0{,}0}{1{,}0} = \cdots = \frac{9{,}0 - 6{,}0}{1{,}0} = 3{,}0\,\frac{m}{s^2}$$

Comparação MRU x MRUV



ejs_mem2_2blocks-racing-6.jar   Verde, MRU, v=2,0 m/s; Vermelha, MRUV, a=0,5 m/s^2

Equações no MRUV – velocidade

- Equação horária da velocidade

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

$$a\Delta t = v_2 - v_1$$

$$v_2 = v_1 + a\Delta t$$

Equação horária da velocidade

- Observe que

$$\frac{d}{dt}(v + at) = a$$

Exemplos

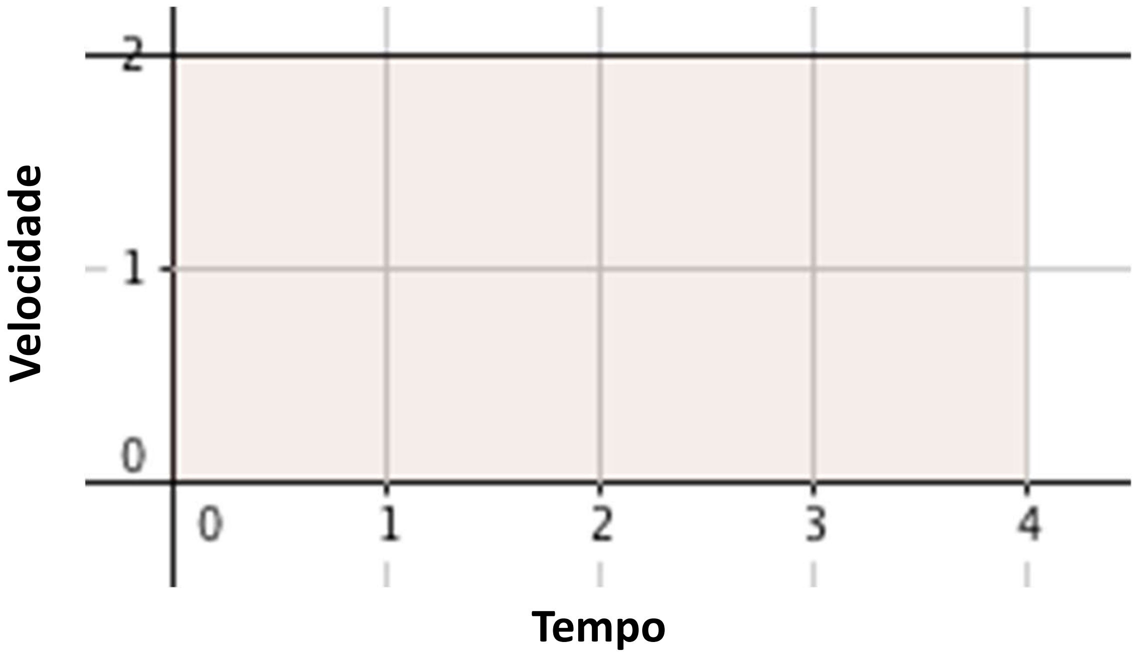
1. Um corpo parte com velocidade de 3,0 m/s e aceleração de 2,0 m/s^2. Qual será sua velocidade depois de 5,0 s?

2. A equação horária da velocidade de um corpo é dada por $v(t)=3t+4$. Qual sua aceleração?

Equações do MRUV – deslocamento

- No gráfico $v \times t$, a área corresponde ao deslocamento.
- Por exemplo, seja um corpo em **MRU**, com v=2,0 m/s. Seu deslocamento em 4,0 segundos será:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s = v\Delta t = 2{,}0 \cdot 4{,}0 = 8{,}0\ m$$



$$\boldsymbol{A \equiv \Delta s}$$

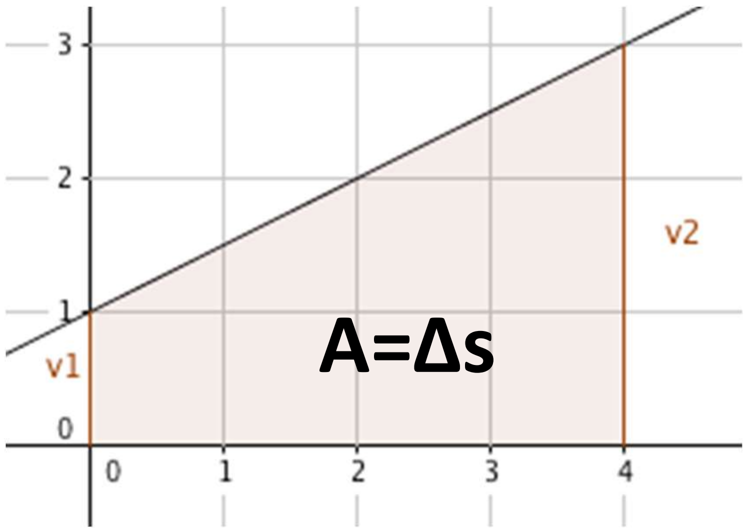
Equações do MRUV – deslocamento

- No MRUV, como a aceleração é constante, o gráfico da velocidade será uma reta inclinada, e o deslocamento (=área) será dada por:

$$v_2 = v_1 + a\Delta t$$

A área é de um trapézio:

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$$



Aplicando no MRUV:

$$\Delta s = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t$$

Exemplo

Um carro acelera de 0 a 100 km/h em 10 segundos.
Qual seu deslocamento nesse intervalo?

Equações do MRUV – posição

- Se não temos a velocidade final, unimos as fórmulas anteriores:

$$v_2 = v_1 + a\Delta t \qquad \text{e} \qquad \Delta s = s_2 - s_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t$$

$$s_2 - s_1 = \frac{v_1 + (v_1 + a\Delta t)}{2} \cdot \Delta t \Rightarrow s_2 - s_1 = \frac{2v_1 + a\Delta t}{2} \cdot \Delta t$$

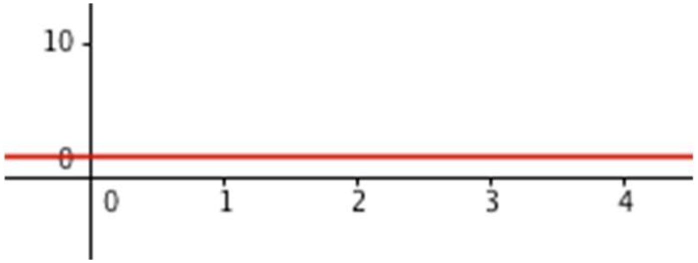
$$s_2 - s_1 = \frac{2v_1\Delta t + a\Delta t^2}{2} \Rightarrow s_2 - s_1 = \frac{2v_1\Delta t}{2} + \frac{a\Delta t^2}{2}$$

$$s_2 = s_1 + v_1\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}$$

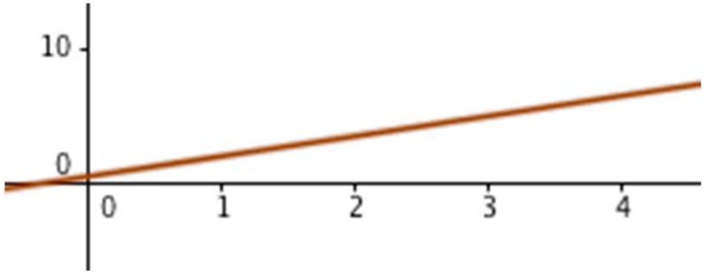
Equação horária da posição

Características das curvas do MRUV

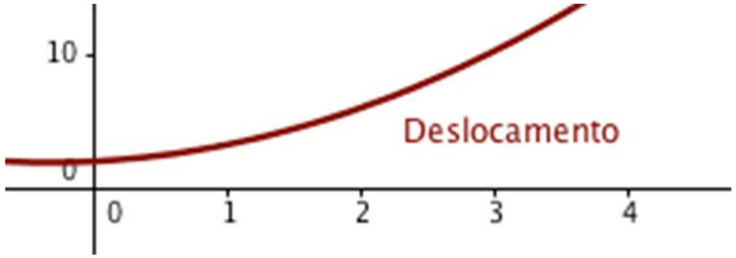
- No MRUV, o comportamento das 3 variáveis principais serão, portanto:



A aceleração é constante



A velocidade varia linearmente



A posição varia por t^2 (parábola)

Equação de Torricelli

- Quando não temos o tempo, unimos as fórmulas

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{e} \qquad \Delta s = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t$$

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_2 - v_1}{a}$$

$$\Delta s = \frac{v_2 + v_1}{2} \cdot \frac{v_2 - v_1}{a} \Rightarrow \Delta s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$$

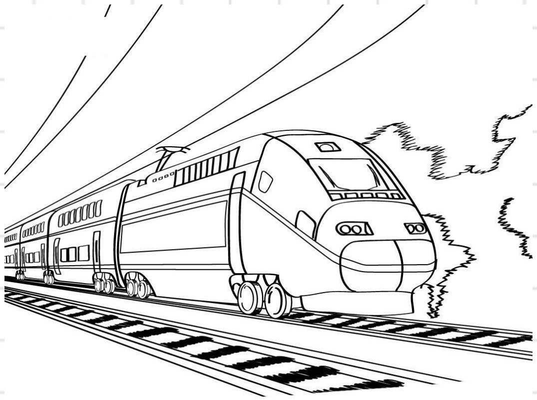
$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta s$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta s$$

Equação de Torricelli

Equação de Torricelli, exemplo

O trem bala Transrapid, de Xangai, parte do repouso e atinge a velocidade de 350 km/h mantendo uma aceleração constante de cerca de 0,8 m/s^2. Que distância ele percorre até atingir essa velocidade?



https://viatrolebus.com.br/2019/05/os-10-trens-bala-mais-rapidos-do-mundo/

Equações do MRUV - Resumo

- Todos os problemas de MRUV poderão ser resolvidos com as seguintes fórmulas

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 + a\Delta t$$

$$x_2 - x_1 = \frac{v_2 + v_1}{2} \cdot \Delta t$$

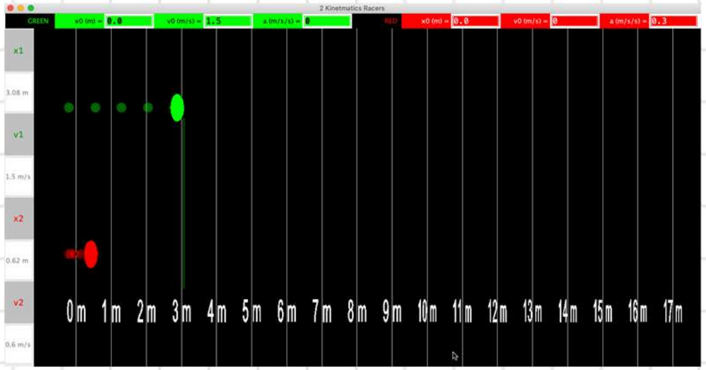
$$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}$$

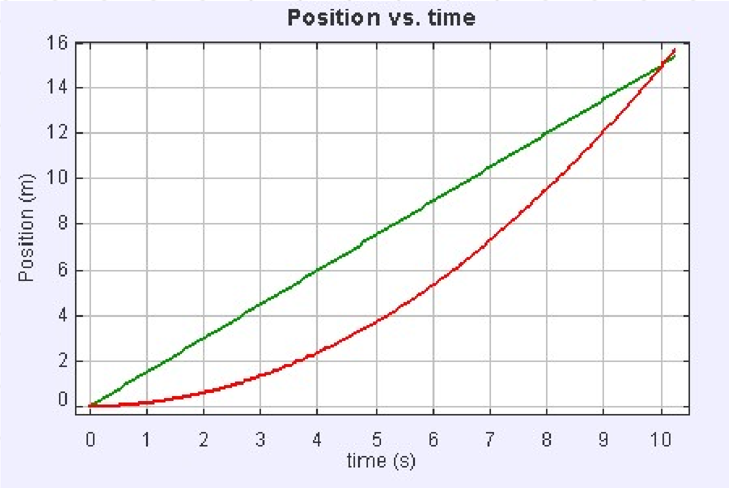
$$v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta x$$

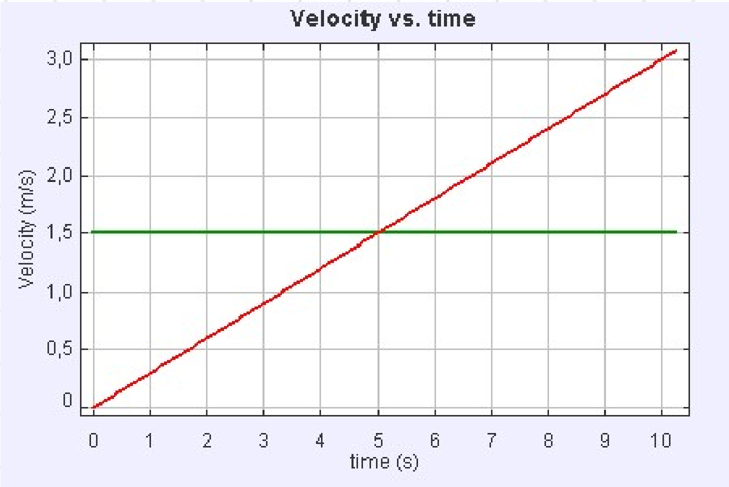
Exemplo

Configure o seguinte experimento no simulador:

- Móvel verde, MRU: $x_1 = 0,0\ m; v = 1,5\ m/s$
- Móvel vermelho, MRUV: $x_1 = 0,0\ m; v_1 = 0,0 \frac{m}{s}; a = 0,3\ m/s^2$
- Calcule o momento e a posição do encontro, e a velocidade do móvel vermelho no momento do encontro
- Compare o resultado com o simulador e analise os gráficos



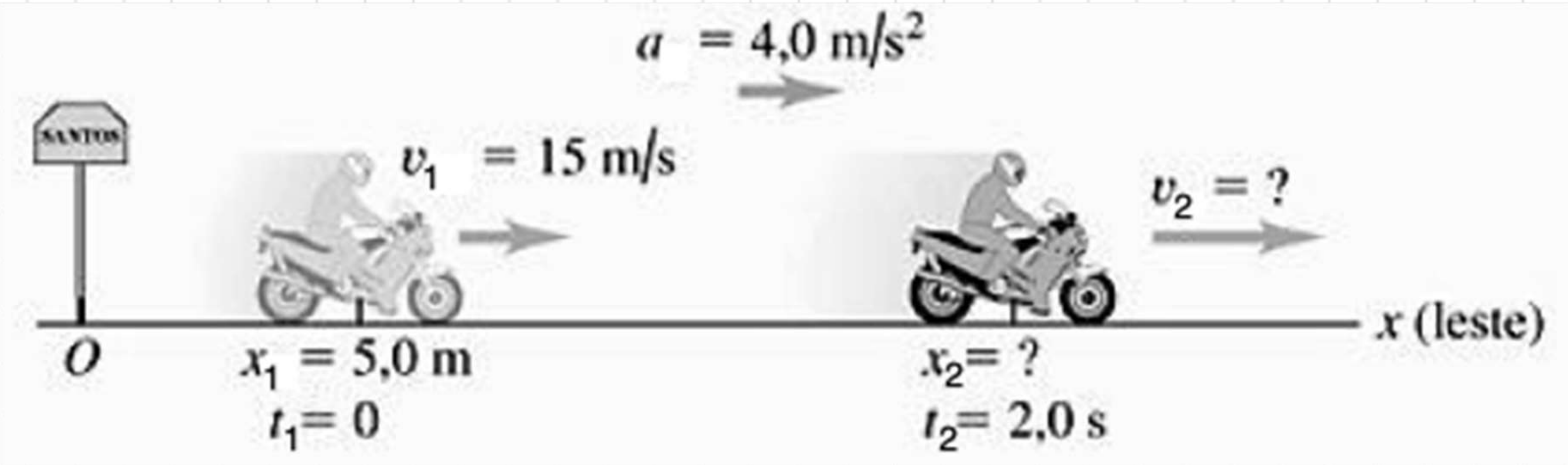

Position vs. time
Position (m)
time (s)
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


Velocity vs. time
Velocity (m/s)
time (s)
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Exercício proposto

Um motociclista, com aceleração constante de 4,0 m/s², no instante inicial passa pela posição 5,0 m, com velocidade de 15 m/s. Determine:

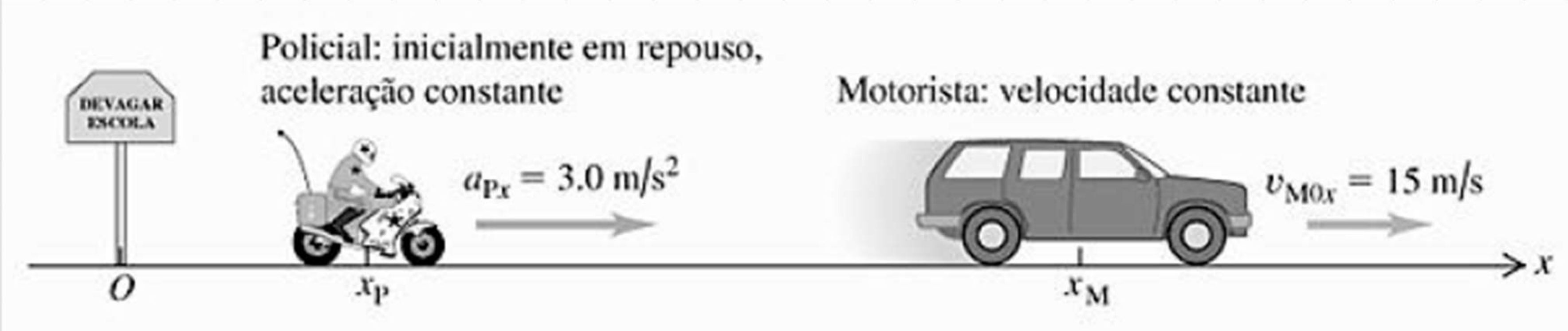
- Sua posição e velocidade quando t=2,0 s
- A posição em que ele alcançará 25 m/s

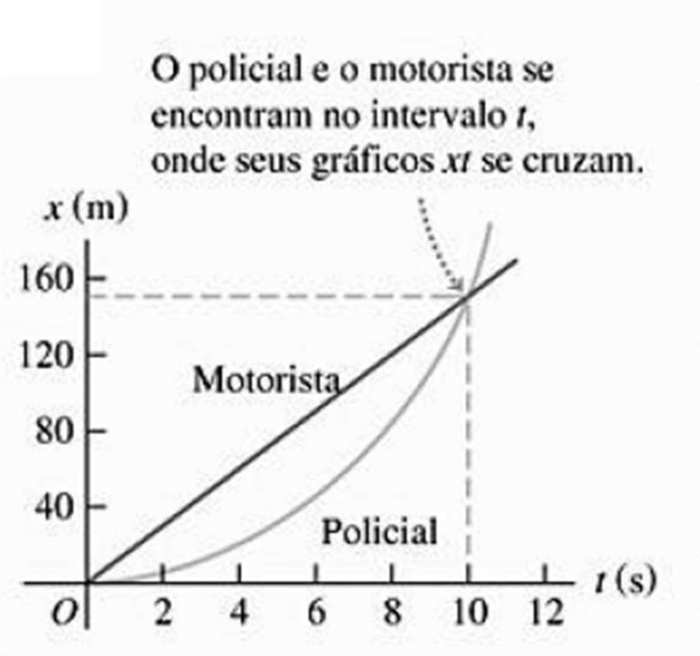


Exercício proposto

Um motorista dirige um veículo a uma velocidade constante de 54 km/h, excedendo o limite de velocidade da via indicado na placa. Um policial, partindo da placa, acelera sua moto com uma aceleração de 3,0 m/s^2. Nessas condições, pergunta-se:

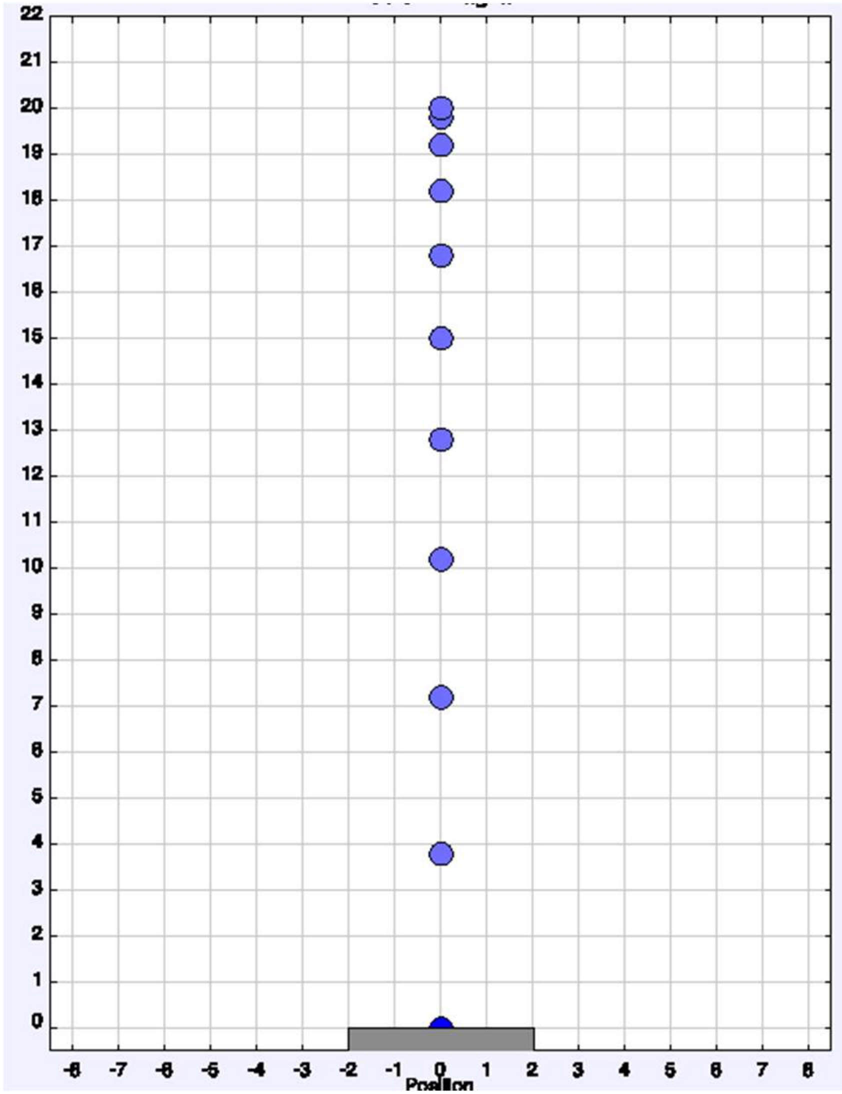
- Em quanto tempo o policial alcançará o veículo?
- A que velocidade estará o policial no momento do encontro?
- Qual será a posição do encontro, contando-se a partir da placa?




O policial e o motorista se
encontram no intervalo t,
onde seus gráficos xt se cruzam.
x (m)
160
120
80
40
Motorista
Policial
O
2
4
6
8
10
12
t (s)

Queda livre

- A queda de um objeto é um movimento do tipo MRUV, em que a aceleração é um valor constante para pequenas alturas, e vale, em média $g=9{,}8\ m/s^2$
- O valor de g é diferente para cada planeta ou satélite:
  - Lua: $1{,}6\ m/s^2$
  - Sol: $270\ m/s^2$
  - Marte: $3{,}72\ m/s^2$



ejs_bu_freefall_v1.jar

Resolução de problemas de queda livre

- As equações para queda livre são as mesmas do MRUV
- Se considerarmos o eixo y (vertical), fazer $a = -9{,}8\ m/s^2$
- Quando o corpo estiver subindo (v positiva), sua velocidade diminuirá
- Quando o corpo estiver descendo (v negativa), sua velocidade aumentará

Resolução de problemas de queda livre

- As equações para queda livre podem, então, ser escritas:

$$v_2 = v_1 - g\Delta t$$

$$y_2 - y_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t$$

$$y_2 = y_1 + v_1\Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2}$$

$$v_2^2 = v_1^2 - 2g\Delta t$$

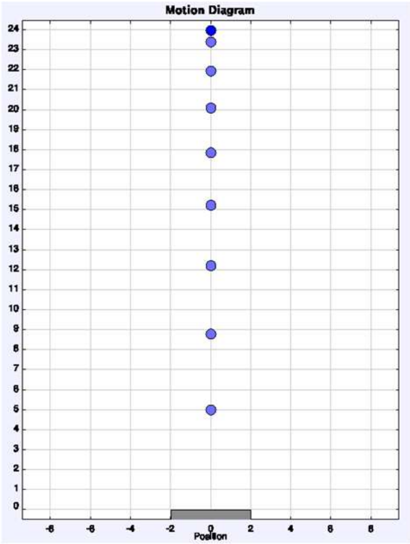
$v > 0 \Rightarrow \text{corpo subindo}$

$v < 0 \Rightarrow \text{corpo caindo}$

Exemplo

No simulador de queda livre, configure os seguintes valores iniciais para uma aceleração de 10 m/s^2 e verifique se correspondem aos indicados no simulador:

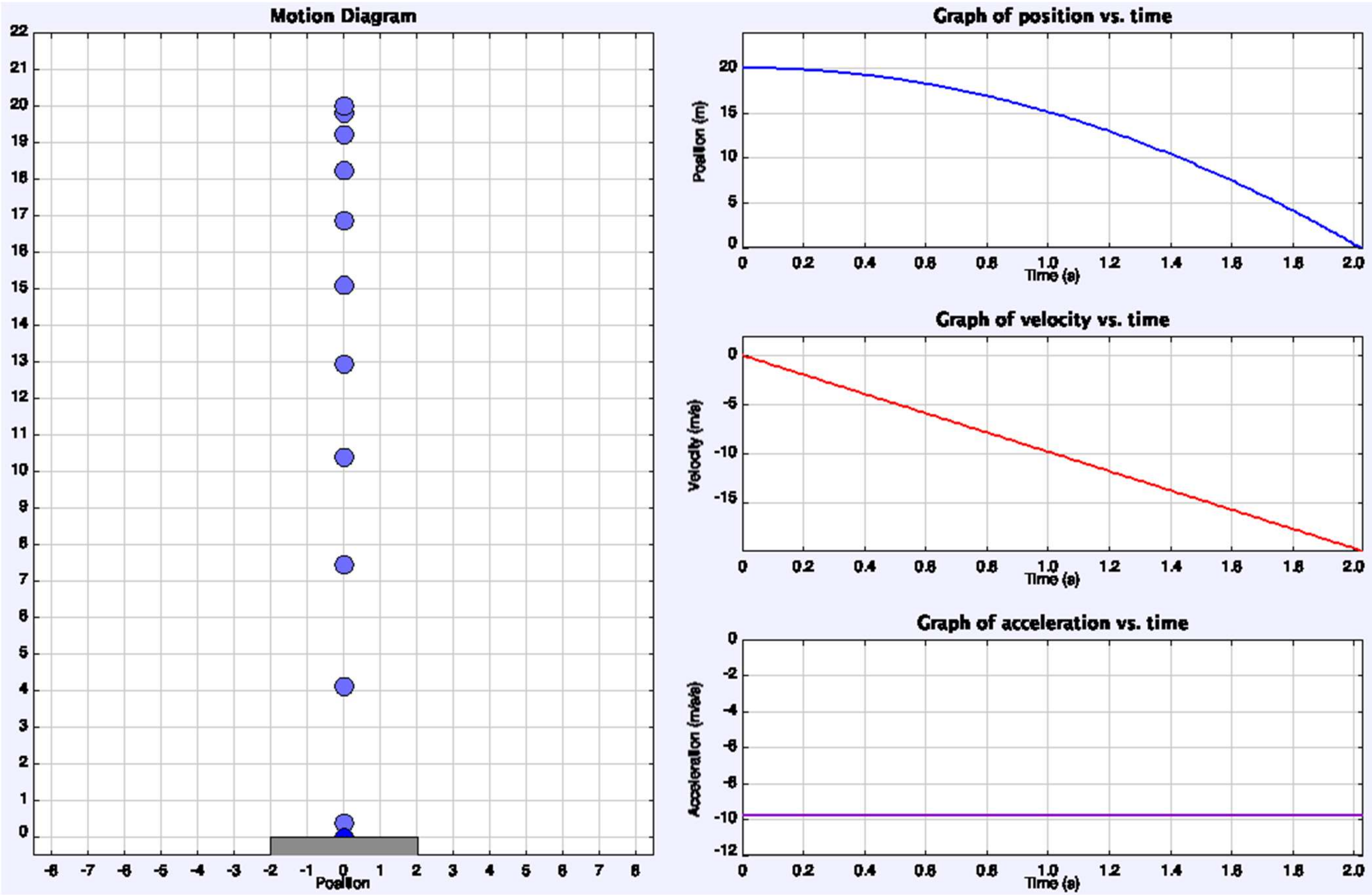
1) Queda livre: posição inicial 20 m; velocidade inicial 0 m/s. Calcule:
    a) Tempo de queda
    b) Velocidade final



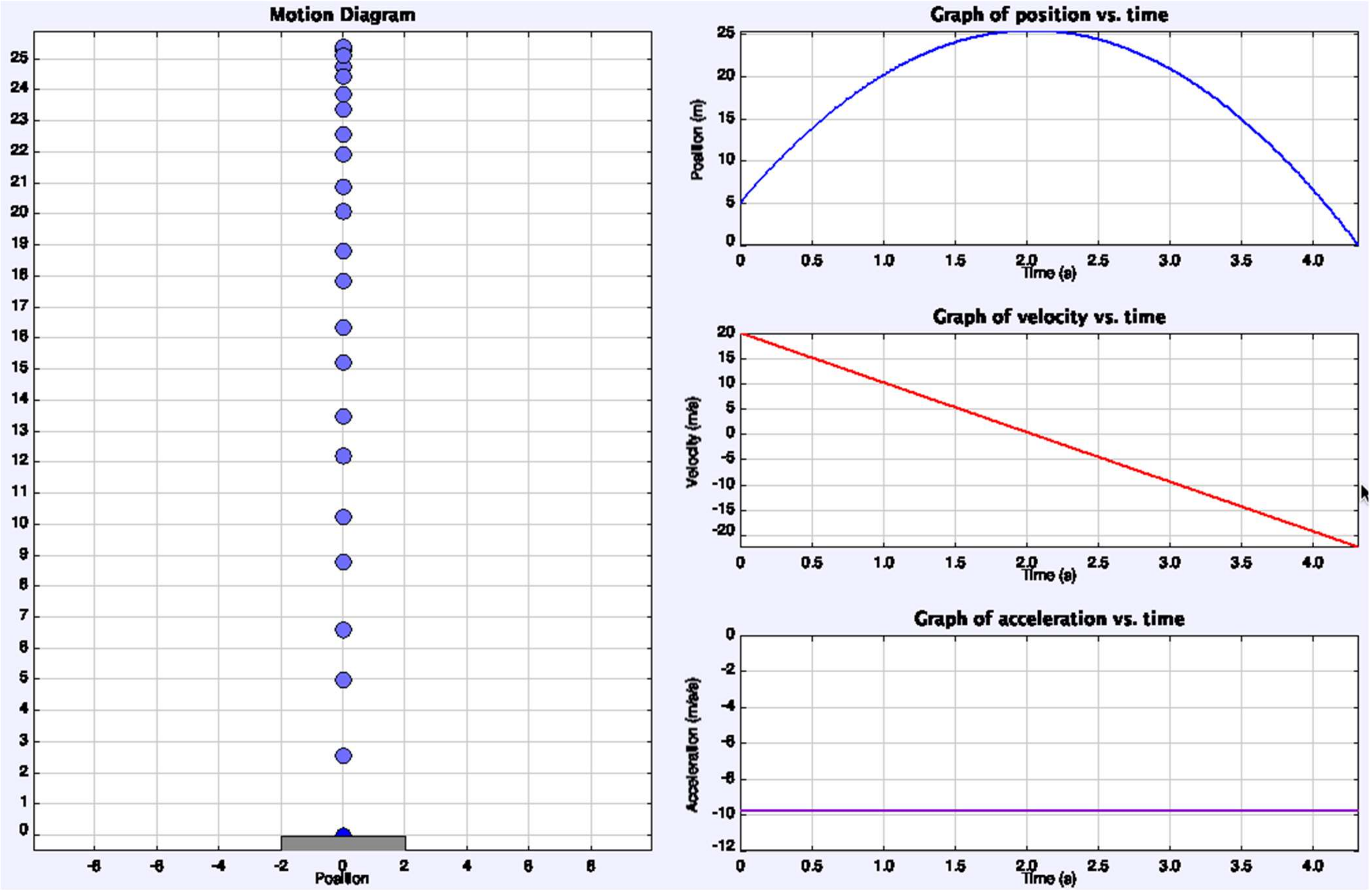
2) Subida e descida: posição inicial 5,0 m; velocidade inicial 20 m/s.
    a) Altura máxima alcançada
    b) O tempo para alcançar a altura máxima
    c) O tempo de queda e o tempo total
    d) A velocidade final
    e) A velocidade quando $y = 20\ m$
    f) A posição e velocidade para $t = 1{,}5\ s$ após o lançamento
    g) A posição e velocidade para $t = 3{,}5\ s$ após o lançamento

Free fall simulator, ejs_bu_freefall_v1.jar, https://www.compadre. org/precollege/items/detail.cfm?ID=10001

Exemplo, caso 1

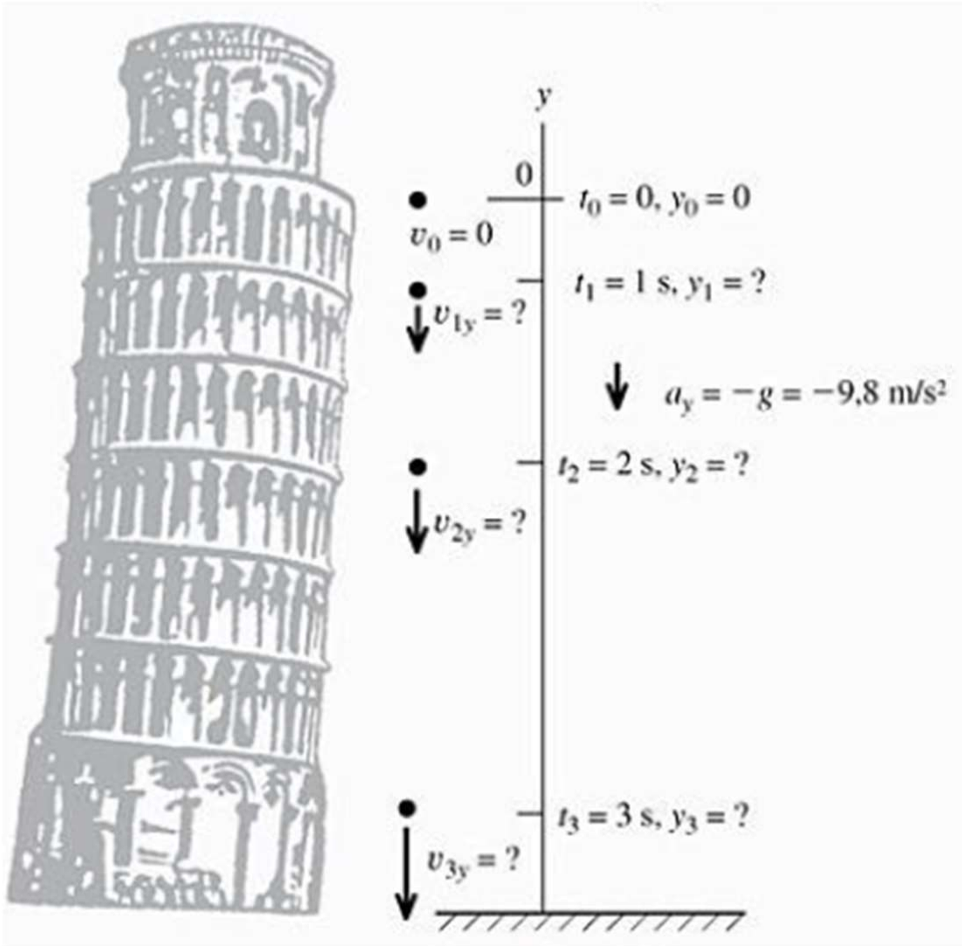


Exemplo, caso 2



Exercício proposto

Uma moeda é abandonada da beirada da Torre de Pisa. Considerando que o movimento seja em queda livre, calcule sua posição e velocidade a cada segundo, conforme a figura.

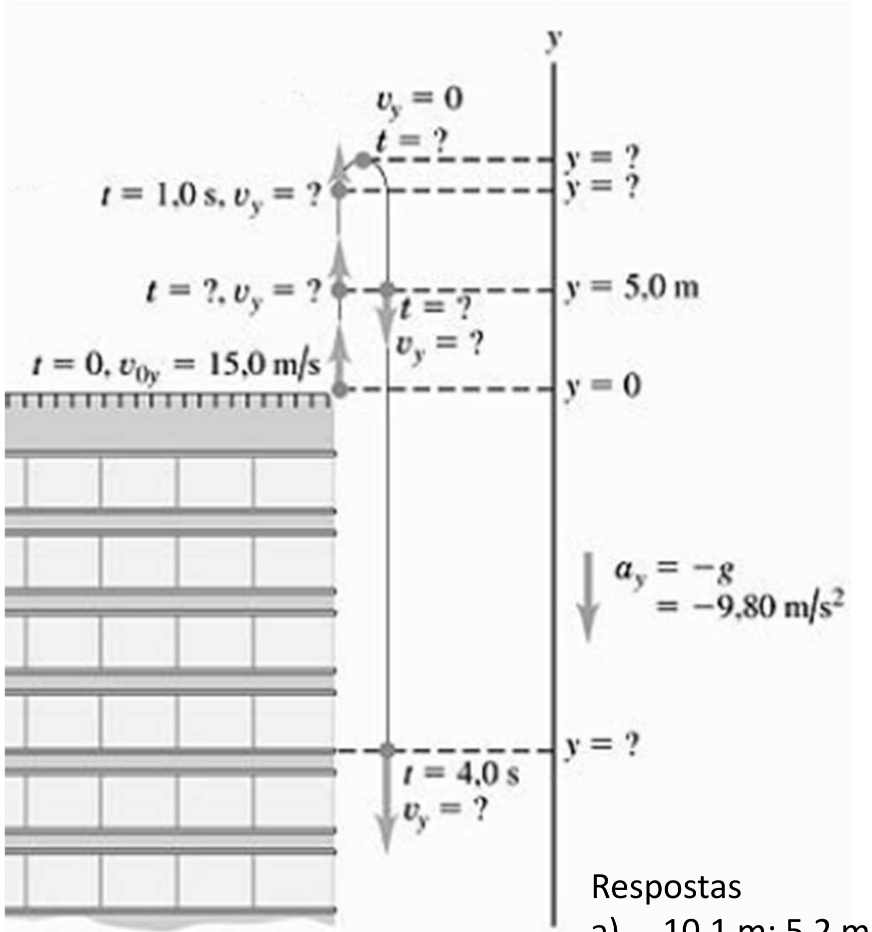


t (s)	y_2 (m)	v_2 (m/s)
1,0	-4,9	-9,8
2,0	-9,8	-19,6
3,0	-44,2	-29,4

Exercício proposto

Uma bola é arremessada para cima com velocidade inicial de 15 m/s. Depois de atingir certa altura, ela cai em movimento vertical de queda livre. Nesse cenário, calcule:

a) A posição e velocidade da bola nos instantes t=1,0 s e t=4,0 s, contando do momento em que ela é arremessada
b) A velocidade da bola quando ela estiver 5,0 metros acima do ponto de lançamento
c) A altura máxima que ela atinge
d) Em quanto tempo ela atinge a altura máxima
e) A aceleração da bola ao atingir a altura máxima
f) Quanto tempo a bola leva para passar novamente pelo ponto de arremesso
g) Se o prédio tem 50 metros, qual sua velocidade ao atingir o solo
h) Em quanto tempo ela atinge o solo
i) Faça um esboço dos gráficos da aceleração, velocidade e posição do movimento da bola



Respostas

a) 10,1 m; 5,2 m/s
b) ±11,3 m/2
c) 11,5 m
d) 1,53 s
e) -9,8 m/s^2
f) 3,1 s
g) 34,7 m/s
h) 5,1 s

Resumo

- Ao final dessa aula você deve ser capaz de:
  - Entender o conceito de aceleração
  - Identificar como se comportam a aceleração, a velocidade e a posição no MRUV
  - Definir matematicamente as variáveis no MRUV
  - Aplicar o conceito de derivadas no cálculo da aceleração instantânea e da velocidade
  - Conhecer e saber como aplicar as equações do MRUV na resolução de problemas
  - Aplicar as equações do MRUV na queda livre vertical