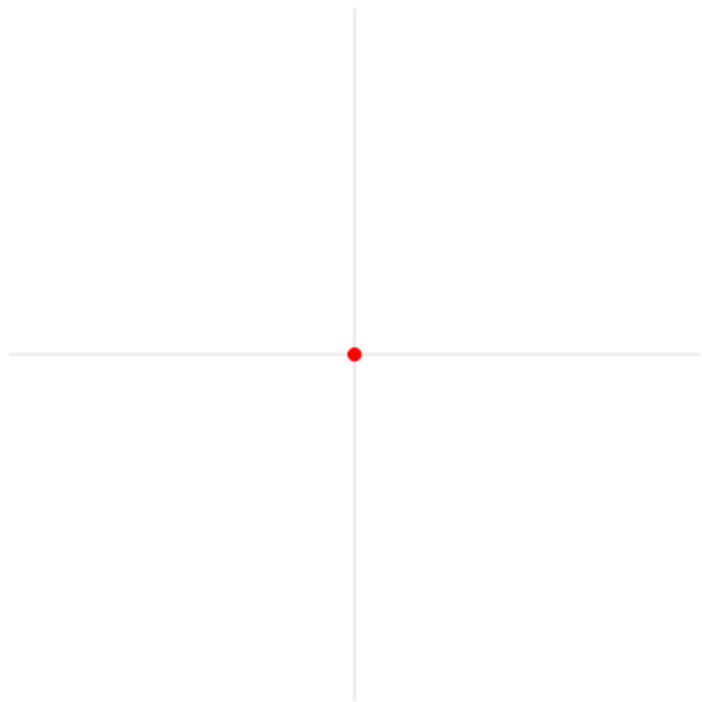
Movimento Circular Uniforme

Prof. Marco Simões

Radiano

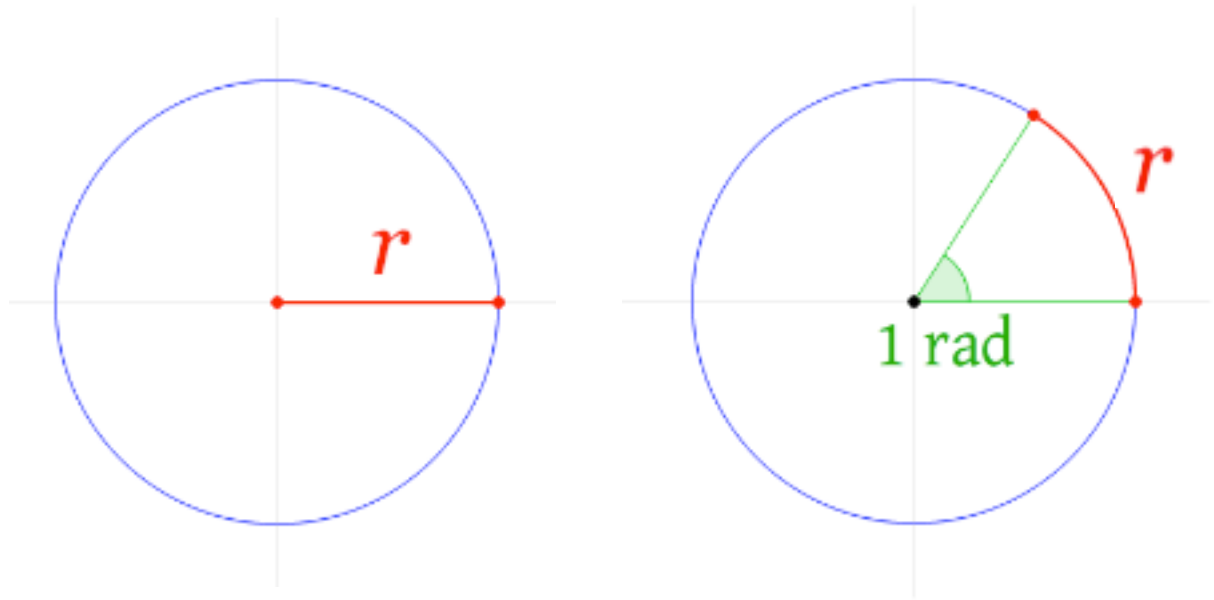
- É a abertura angular correspondente a um arco igual ao raio da circunferência



(gif animado; clique para iniciar)

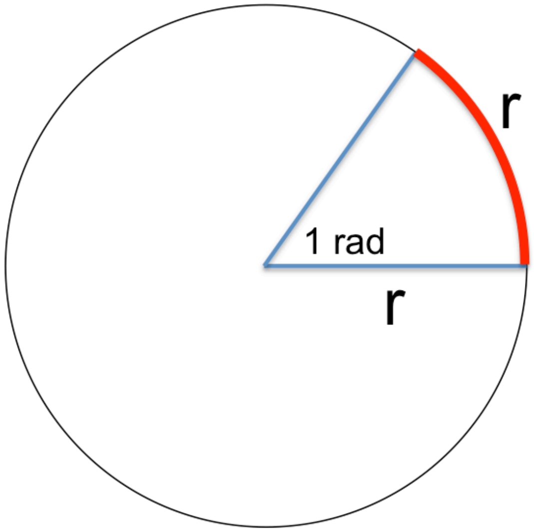
Radiano

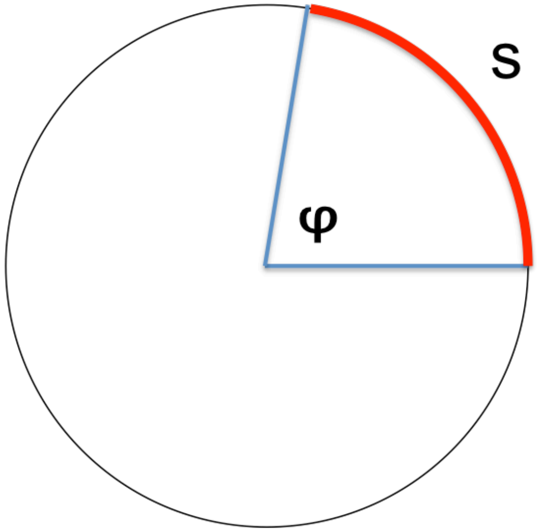
- É a abertura angular correspondente a um arco igual ao raio da circunferência



Radiano

- O número de radianos corresponde ao número de raios no perímetro da circunferência.





$$1\,rad\ -r$$

$$\varphi\,rad - s$$

$$s \cdot 1 = r \cdot \varphi$$

$$s = \varphi \cdot r$$

Ex.: numa circunferência de 10 cm de raio, 3 radianos representam um percurso de 30 cm

Relação graus - radianos

Para 1 volta completa $\Rightarrow s = 2\pi r$ (perímetro da circunferência)

Mas $s = \varphi r$

Portanto $\varphi r = 2\pi r \Rightarrow \varphi = 2\pi$

Ou seja, 1 volta = 2π rad

Como 1 volta completa=360°

360°= 2π rad

Daí:

180°=π rad

90°=$\dfrac{\pi}{2}$ rad

Conversão radianos x graus

- Converter 30° para radianos

$$\pi\,rad - 180^\circ$$
$$\varphi\,rad - 30^\circ$$

$$\varphi = \frac{30 \cdot \pi}{180} = 0{,}524\,rad$$

- Converter $\frac{2\pi}{3}\,rad$ para graus

$$\pi\,rad - 180^\circ$$
$$\frac{2\pi}{3}\,rad - \alpha^\circ$$

$$\alpha = \frac{180 \cdot 2 \cdot \pi}{3 \cdot \pi} = 120^\circ$$

- Converter 1,33 rad para graus

$$\pi\,rad - 180^\circ$$
$$1{,}33\,rad - \alpha^\circ$$

$$\alpha = \frac{180 \cdot 1{,}33}{\pi} = 76{,}2^\circ$$

Período e frequência

- Fenômenos periódicos: repetem-se em intervalos de tempos sucessivos e iguais
- Ciclo: cada uma das repetições
- **Período**: tempo de cada repetição
  - Unidade: segundos, minutos, horas
- **Frequência**: número de repetições por unidade de tempo.
  - Unidade: Hz (ciclos/segundo), rpm
  - Relação:

$$f \cdot T = 1$$

Exemplos

- Uma roda gira a 120 rpm. Calcule sua frequência em Hz e seu período em *s*

$$f = \frac{120}{60} = 2\,Hz$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,s$$

Exemplo

- Um ponto leva 5 segundos para completar uma trajetória circular. Calcule a frequência em Hz e em rpm.

$$T = 5\,s$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5} = 0{,}2\,Hz$$

$$f = 0{,}2 \cdot 60 = 12\,rpm$$

Exemplo

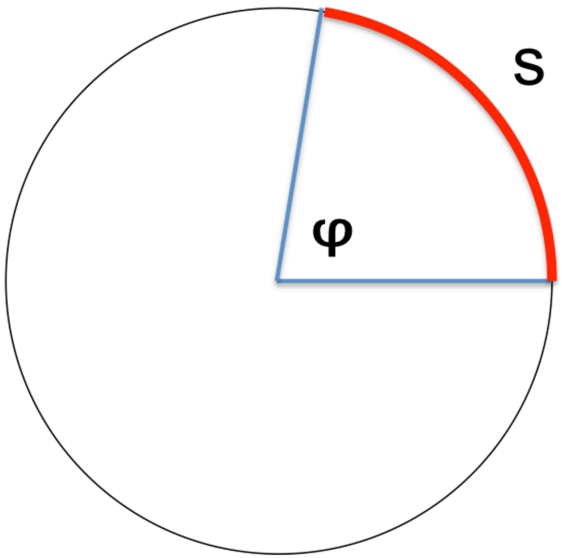
- Um ponto completa 60 voltas de uma trajetória circular em 2 minutos. Calcule a frequência em Hz e o período em s .

$$f = \frac{60}{2} = 30\,rpm$$

$$f = \frac{30}{60} = 0{,}5\,Hz$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}5} = 2\,s$$

Espaço angular x espaço linear



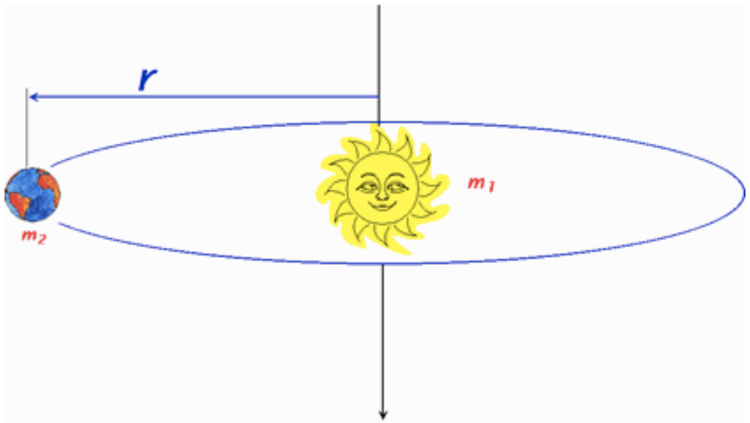
φ – deslocamento angular, radianos

s – deslocamento linear, metros

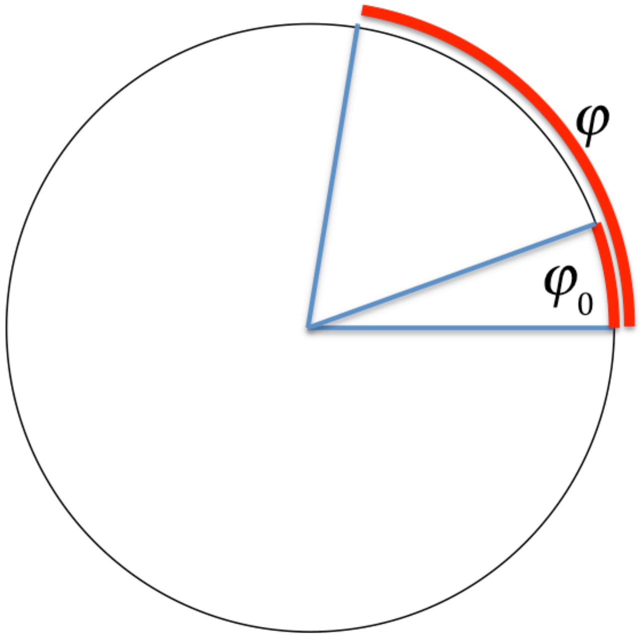
Relação entre os dois $\Rightarrow\ s = \varphi \bullet r$

MCU – Movimento Circular Uniforme

- É o movimento de uma partícula numa trajetória circular
- A velocidade angular e a velocidade linear são constantes
- Não há aceleração tangencial



Velocidade angular



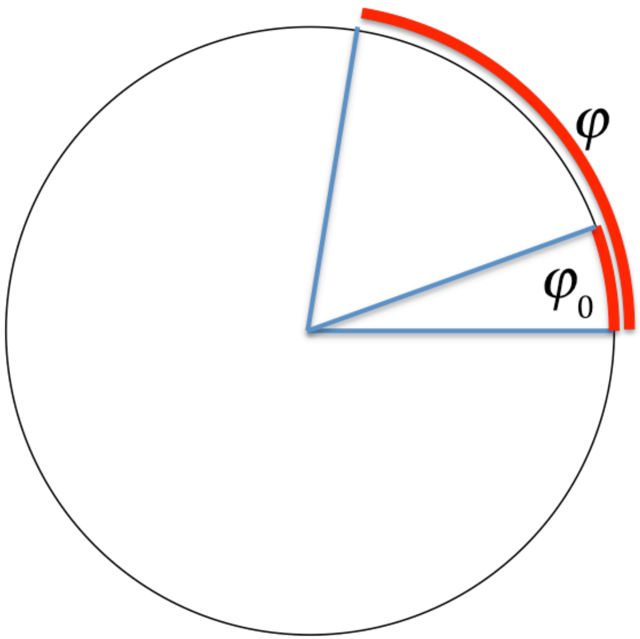
$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\ \text{rad/s}$$

$$Se\ \Delta\varphi = 1\ volta, isto\ é, 2\pi:$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

A velocidade angular é expressa em rad/s.
Não depende do raio.

Posição angular



$$Considerando\ que\ \omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{\Delta t}$$

$$Então, \quad \omega \cdot \Delta t = \varphi - \varphi_0$$

$$\varphi - \varphi_0 = \omega \cdot \Delta t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot \Delta t$$

Exemplo

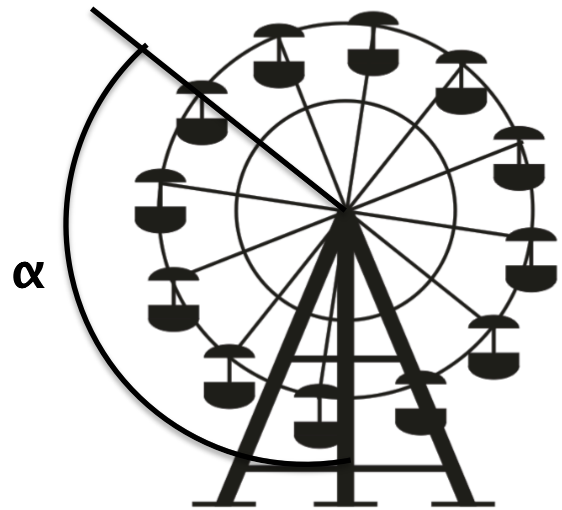
- Um disco de vinil gira a N=33,33 rpm. Qual sua velocidade angular?

$$f=\frac{N}{60}\Rightarrow f=\frac{33{,}33}{60}\Rightarrow f=0{,}556\ Hz\left(=\frac{rot}{seg}\right)$$

$$\omega=2\pi f=2\pi\cdot 0{,}556=3{,}49\ \frac{rad}{s}$$

Exemplo

- Uma roda gigante leva 2 minutos para completar uma volta. Qual sua velocidade angular? Considerando que ela gira no sentido horário, em que posição angular estará um carrinho a partir da plataforma de embarque depois de 50 segundos?



Resolução

$$Período\, T = 2\min \Rightarrow T = 2 \cdot 60 = 120\, s$$

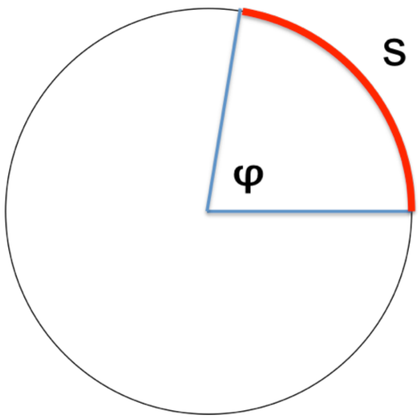
$$Velocidade\, angular \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{120} = \frac{\pi}{60} = 0{,}052\, \frac{rad}{s}$$

$$Posição \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega \cdot \Delta t = 0 + \frac{\pi}{60} \cdot 50 = \frac{5\pi}{6}\, rad$$

$$\begin{cases} 180^\circ \rightarrow & \pi \\ \alpha \rightarrow & \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot \pi = \frac{180^\circ \cdot 5\pi}{6} \Rightarrow \alpha = 150^\circ$$

Velocidade linear

- O módulo da velocidade linear (ou escalar ou tangencial) é a distância percorrida pela partícula dividida pelo tempo que levou para percorrer.



$$v = \omega \cdot r$$

Como $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

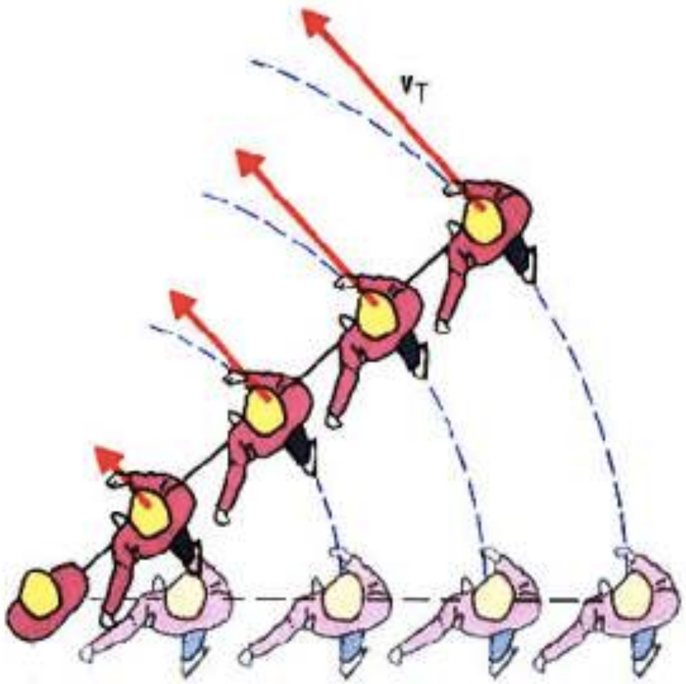
E como $s = \varphi \cdot r \Rightarrow \Delta s = \Delta\varphi \cdot r$

Fazemos $v = \dfrac{\Delta\varphi \cdot r}{\Delta t}$

Como $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Fazemos $v = \omega \cdot r$

Velocidade linear



Para a mesma velocidade angular, quanto maior o raio, maior a velocidade linear

A velocidade linear depende do raio.

Exemplo

- Um disco de vinil de 31 cm de diâmetro gira a 33,33 rpm. Qual a velocidade linear na borda do disco? Qual a velocidade linear na trilha final, de raio 5,5 cm

$$f = \frac{N}{60} \Rightarrow f = \frac{33,33}{60} \Rightarrow f = 0,556\ Hz\ \left(= \frac{rot}{s} \right)$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,556 = 3,49\ \frac{rad}{s} \quad \text{(velocidade angular)}$$

$$\text{Borda} \Rightarrow v = \omega r \Rightarrow v = 3,49 \cdot \frac{0,31}{2} = 0,54\ \frac{m}{s}$$

$$\text{Trilha interna} \Rightarrow v = \omega r \Rightarrow v = 3,49 \cdot 0,055 = 0,19\ \frac{m}{s}$$

Exemplo

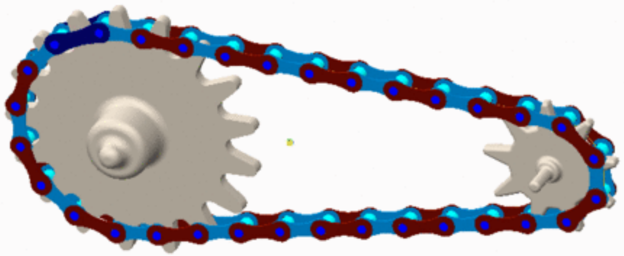
- Uma roda gigante de 40 metros de diâmetro leva 2 minutos para completar uma volta. Qual a velocidade escalar dos carrinhos?

$$Período\; T = 2\,\text{min} \Rightarrow T = 2 \cdot 60 = 120\, s$$

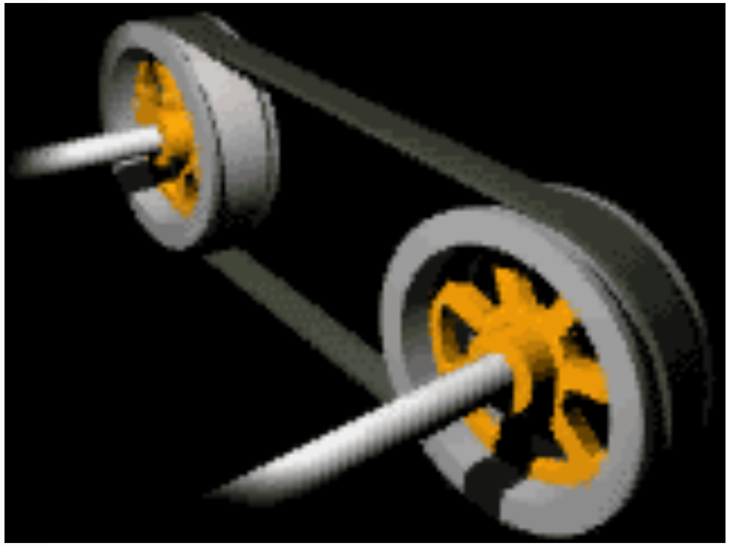
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{120} = 0{,}052\; \frac{rad}{s}$$

$$v = \omega \cdot r = 0{,}052 \cdot \frac{40}{2} = 1{,}04\, \frac{m}{s}$$

Transmissões que usam MCU

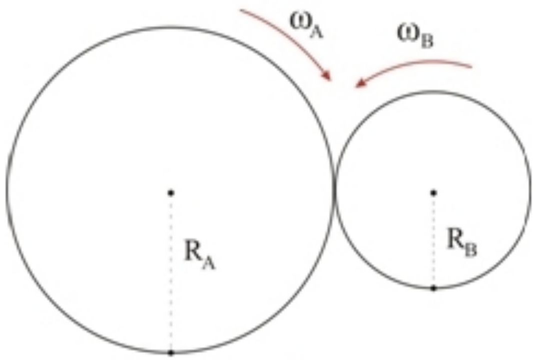


Rodas e correias dentadas



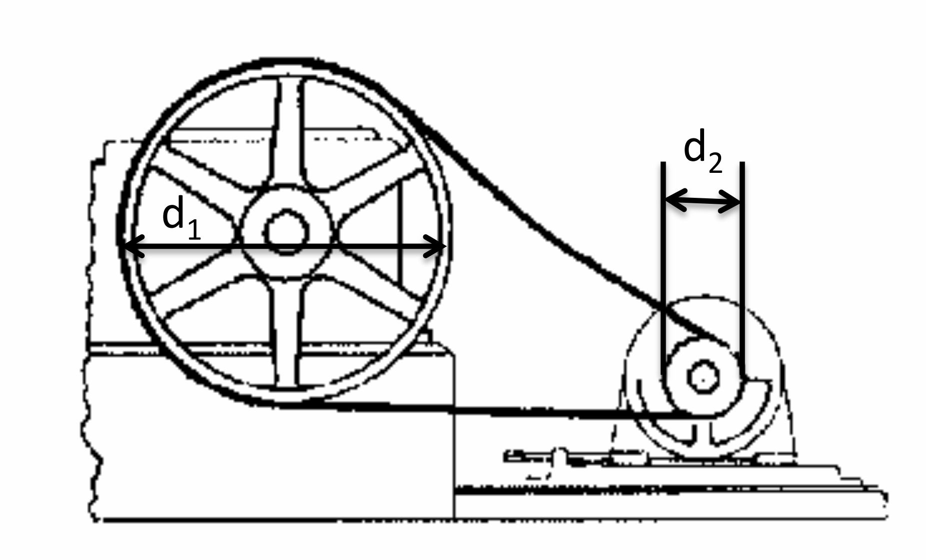
Polias e correias

Engrenagens



Rodas de contato

Relação de transmissão



- Lisa -> usar raio ou diâmetro
- Dentada -> usar número de dentes

A velocidade tangencial das polias é a mesma.

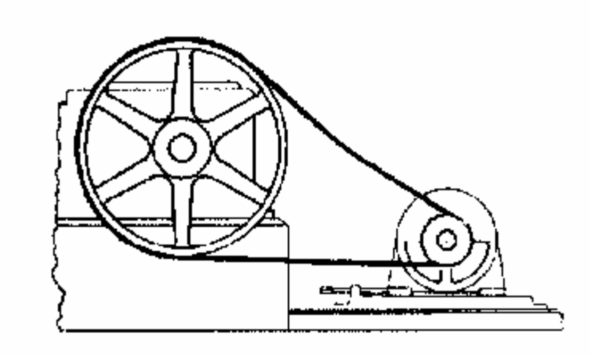
Como $v = \omega \cdot r$

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 \Rightarrow 2\pi f_1 \cdot r_1 = 2\pi f_2 \cdot r_2 \Rightarrow 2\pi \frac{N_1}{60} \cdot r_1 = 2\pi \frac{N_2}{60} \cdot r_2$$

$$N_1 \cdot r_1 = N_2 \cdot r_2 \Leftrightarrow N_1 \cdot d_1 = N_2 \cdot d_2$$

Exemplo

- Uma polia de 100 mm de um motor gira a 600 rpm. Qual a rotação da polia de 300 mm movida pelo motor?



$$N_1 \cdot d_1 = N_2 \cdot d_2$$

$$600 \cdot 100 = \omega_2 \cdot 300$$

$$N_2 = \frac{600 \cdot 100}{300} = 200\, rpm$$

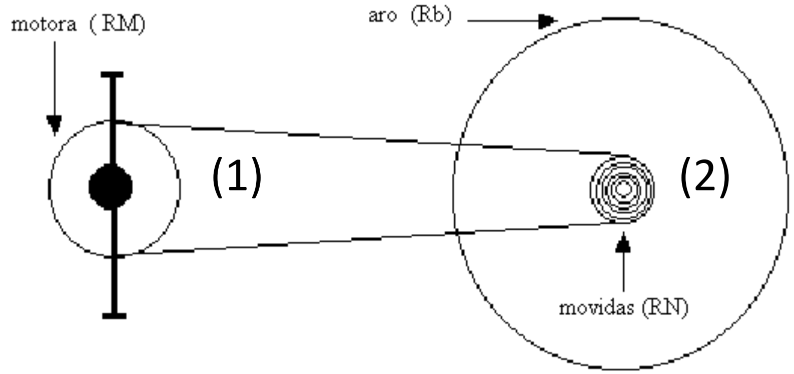
Exemplo

- Uma bicicleta numa certa marcha tem 30 dentes na engrenagem dianteira e 15 na catraca. A roda da bicicleta tem 66 cm de diâmetro. Quanto ela avança a cada pedalada?

$$N_1 \bullet n_1 = N_2 \bullet n_2$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$



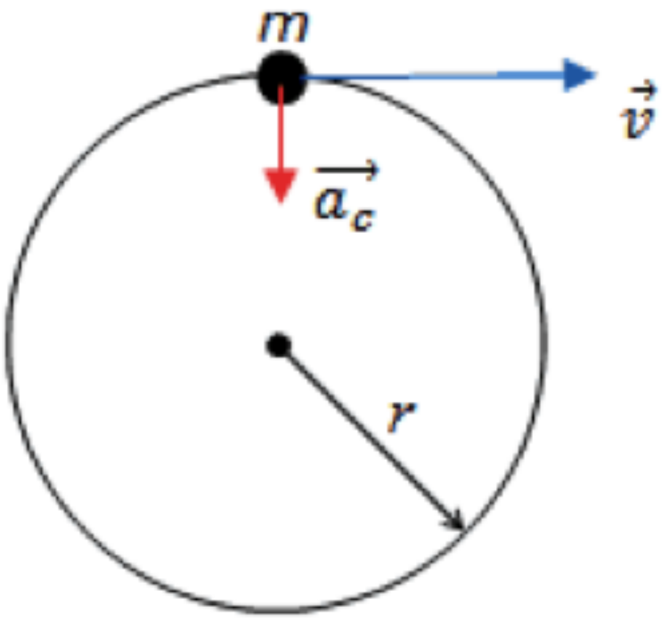
$N_2 = 2N_1$ (isto é, para cada pedalada a roda gira duas vezes)

Perímetro da roda $\Rightarrow P = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow P = 2 \cdot \pi \cdot \frac{0,66}{2} \Rightarrow P = 2,07m$

Deslocamento por pedalada $\Rightarrow D = 2 \cdot 2,07 = 4,14\ m$

Aceleração centrípeta

- A mudança de direção do vetor velocidade é causada pela aceleração centrípeta



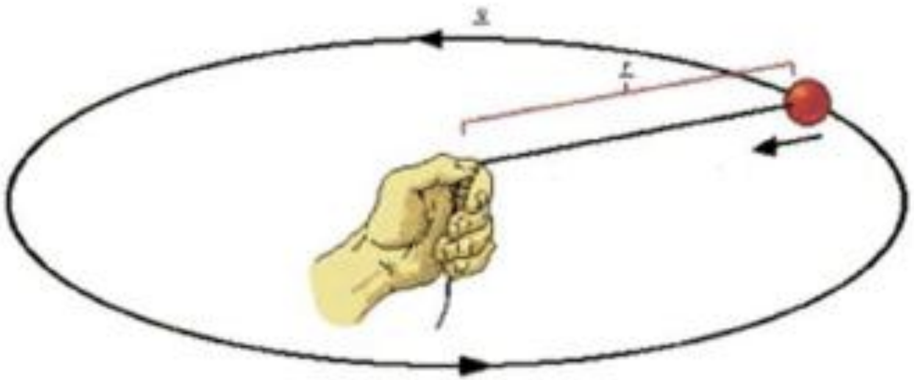
$$\left|\overrightarrow{a_c}\right| = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

$$\left|\overrightarrow{F_c}\right| = m \cdot \left|\overrightarrow{a_c}\right| \Rightarrow F_c = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

A força e a aceleração centrípetas sempre apontam para o centro.

Exemplo

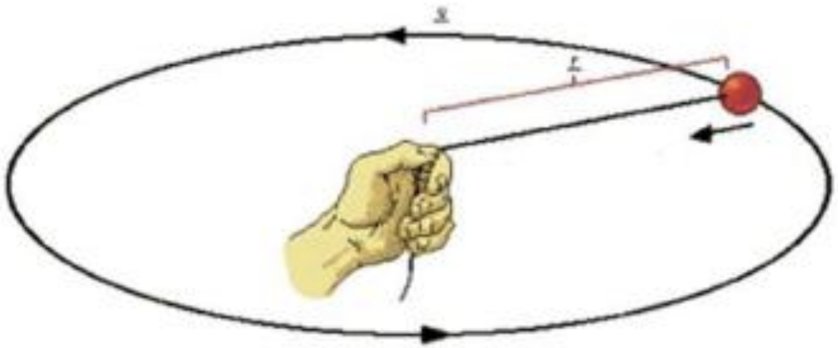
- Uma esfera de 200g presa por um fio de 30 cm é girada 5 vezes por segundo. Calcule o período, a frequência, a velocidade angular, a velocidade tangencial, a aceleração centrípeta e a força de tração sobre o fio.



Resolução

Massa da esfera = 200g = 0,2 kg

Raio = 30 cm = 0,3 m



$$\text{Frequência} \Rightarrow f = 5\,\frac{voltas}{s}$$

$$\text{Período} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5} = 0{,}2s$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5 = 31{,}4\,\frac{rad}{s}$$

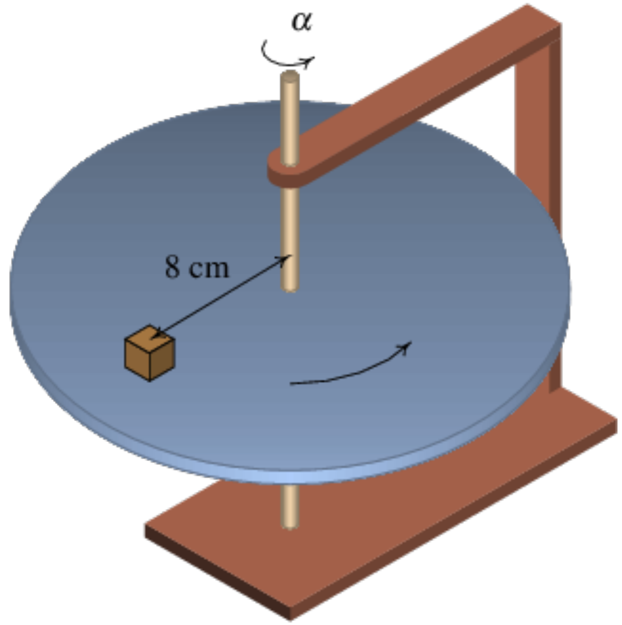
$$v = \omega \cdot r = 31{,}4 \cdot 0{,}3 = 9{,}42\,\frac{m}{s}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{9{,}42^2}{0{,}3} = 296\,\frac{m}{s^2}$$

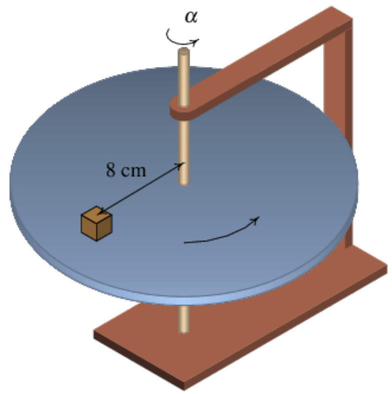
$$F_c = m \cdot a_c = 0{,}2 \cdot 296 = 59{,}2\,N$$

Exemplo

- Um bloco de 0,2 kg está sobre um disco a 8 cm do centro. O coeficiente de atrito estático é de 0,5. Qual a maior rotação que o disco pode atingir sem que o bloco se mova?



Resolução



$$\left|\vec{N}\right| = \left|\vec{P}\right| = m \cdot g = 0{,}2 \cdot 9{,}81 = 1{,}96N$$

$$F_{at} = \mu \cdot N = 0{,}5 \cdot 1{,}96 = 0{,}98N$$

$F_c \leq F_{at}$ (a força centrípeta* pode ser no máximo igual à de atrito)

$$F_c = m \cdot a_{cp} \Rightarrow a_{cp} = \frac{F_c}{m} = \frac{0{,}98}{0{,}2} = 4{,}9\frac{m}{s^2}$$

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{a_{cp} \cdot r} \Rightarrow v = \sqrt{4{,}9 \cdot 0{,}08} \Rightarrow v = 0{,}626\frac{m}{s}$$

$$v = \omega \cdot r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \omega = \frac{0{,}626}{0{,}08} = 7{,}83\frac{rad}{s}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{7{,}83}{2\pi} = 1{,}25\,Hz$$

$$f = 1{,}25 \cdot 60 = 74{,}8\,rpm$$

*a rigor, seria a força centrífuga, que nesse caso tem o mesmo módulo que a centrípeta

MCU - Resumo

$$s = \varphi \cdot r$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot \Delta t$$

$$v = \omega \cdot r$$

Relação de transmissão

$$\omega_1 \cdot d_1 = \omega_2 \cdot d_2$$

$$\omega_1 \cdot n_1 = \omega_2 \cdot n_2$$

Força e aceleração centrípetas

$$a_{cp} = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

$$F_{cp} = m \cdot a_{cp} \Rightarrow F_{cp} = \frac{mv^2}{r}$$