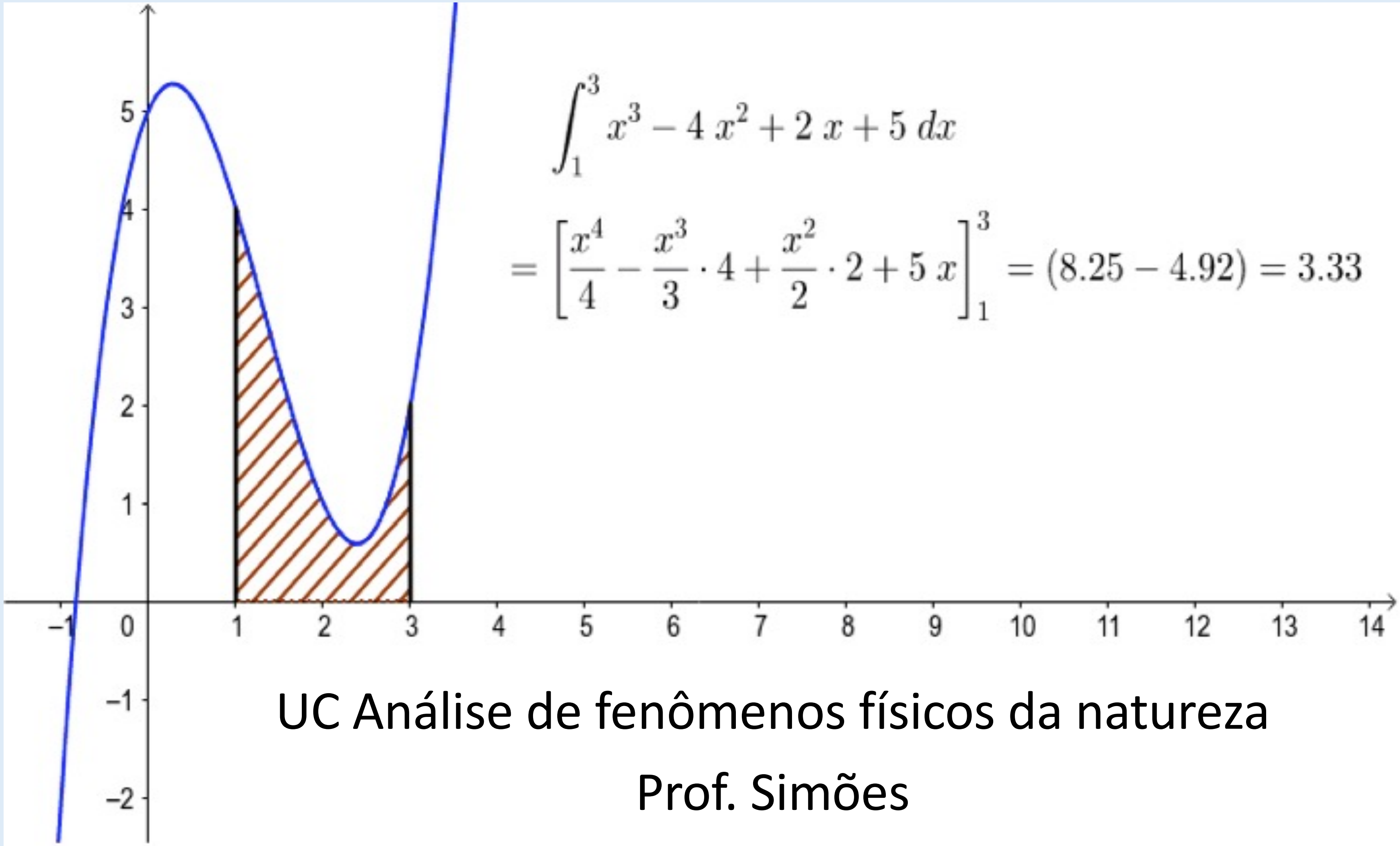


$$\int_1^3 x^3 - 4\,x^2 + 2\,x + 5\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\cdot 4 + \frac{x^2}{2}\cdot 2 + 5\,x\right]_1^3 = (8.25 - 4.92) = 3.33$$

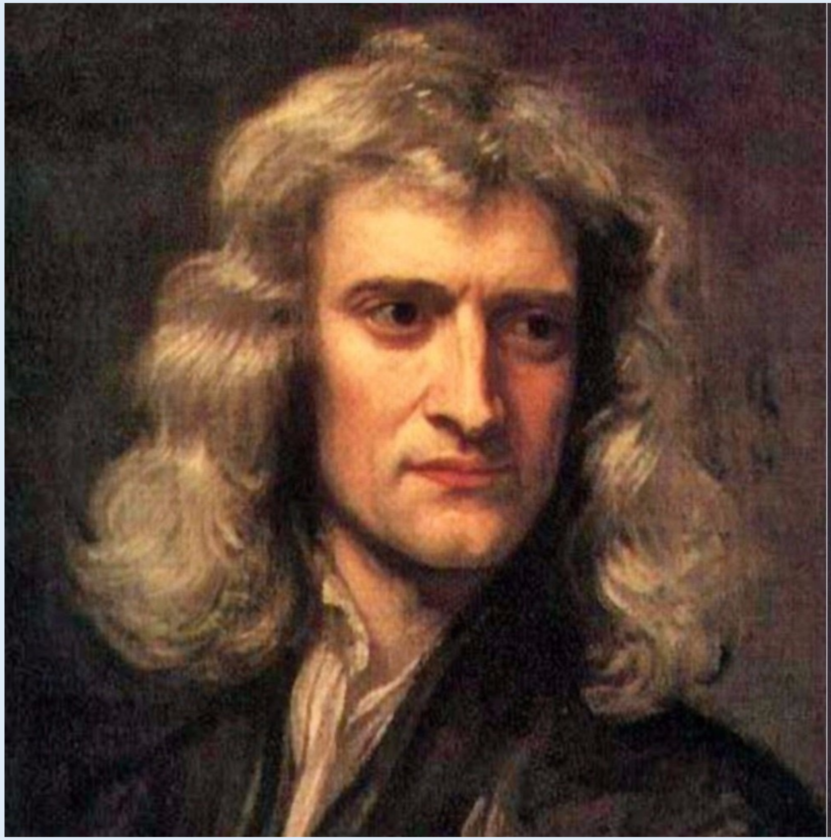
UC Análise de fenômenos físicos da natureza

Prof. Simões

Princípios de Cálculo Integral

Newton e Leibniz

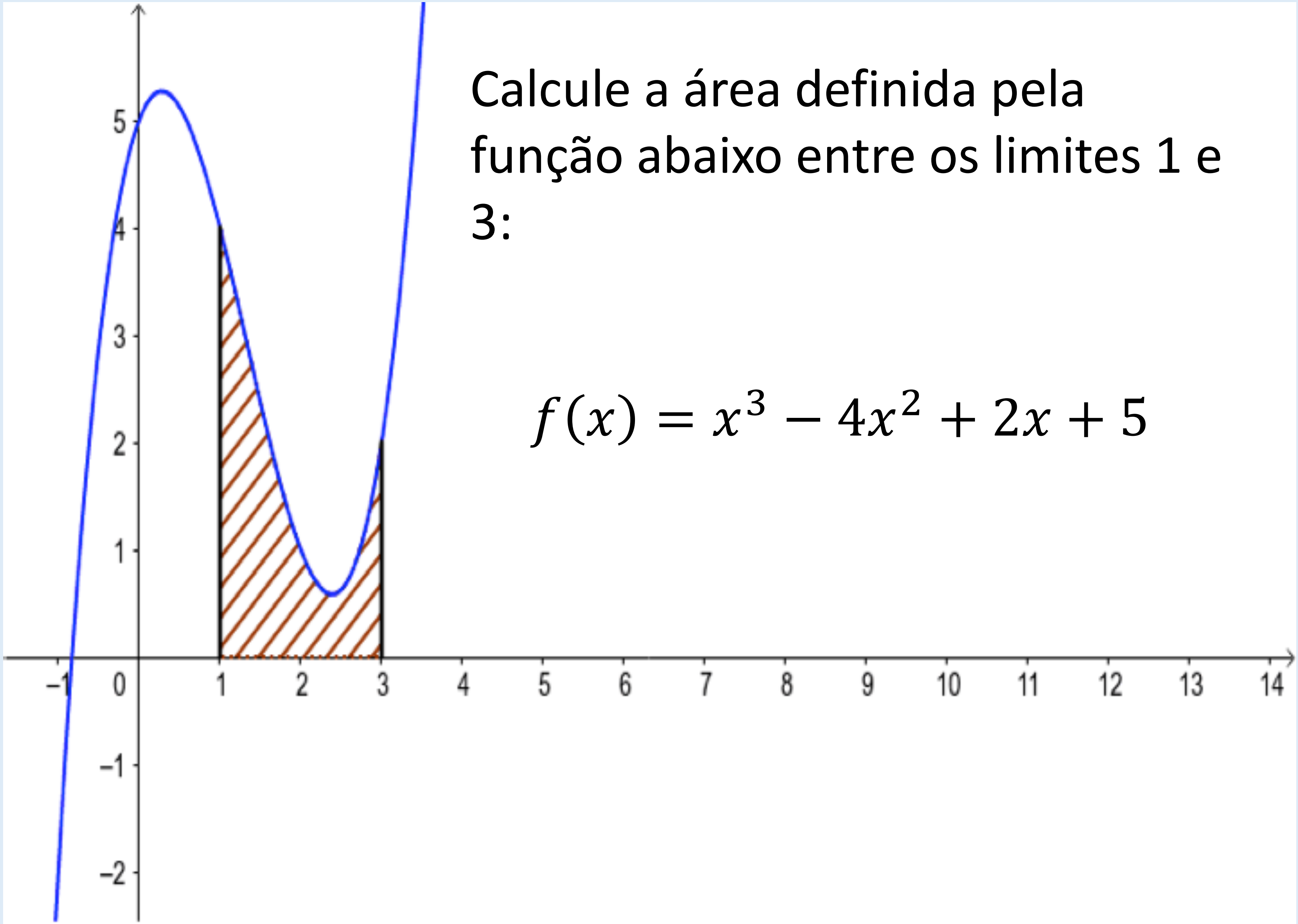
- A descoberta (criação) do cálculo integral e diferencial foi, durante muito tempo, disputada entre Newton, inglês, e Leibniz, alemão. Newton utilizou o método aos 23 anos, em 1666, e ambos publicaram com poucos anos de diferença. Hoje, o consenso é que o desenvolvivento foi independente, e não houve plágio. Os símbolos que usamos atualmente são os de Leibniz.




Objetivos dessa aula

- Ao final dessa aula você deverá:
  - Conhecer o **Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo**
    - Entender a integral como a operação inversa da derivada
    - Calcular a integral indefinida de funções simples usando a regra da potência
  - Conhecer o **Segundo Teorema Fundamental do Cálculo**
    - Entender a integral definida como o cálculo de áreas de funções
    - Utilizar o método da substituição para o cálculo de integrais

Problema típico



Calcule a área definida pela função abaixo entre os limites 1 e 3:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 5$$

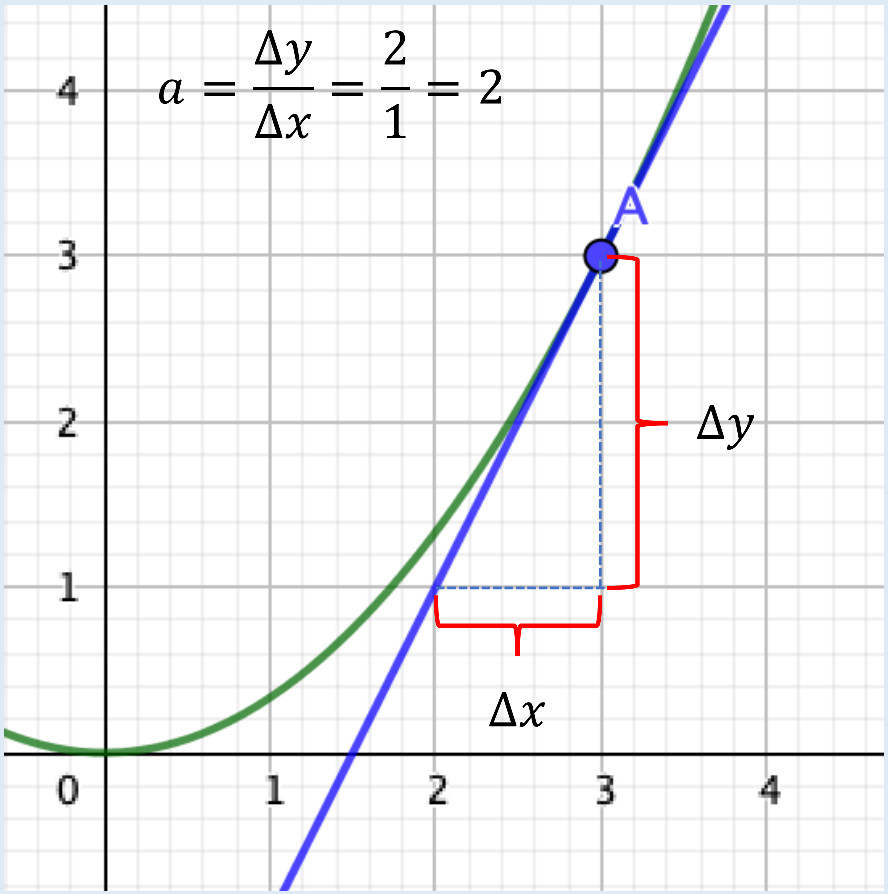
Primeiro teorema fundamental do cálculo

- Quando estudamos derivadas, demonstramos, por exemplo, que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^2\right) = \frac{2}{3}x$$

- Ou seja, dada uma função, determinamos uma outra função que expressa a taxa de variação da primeira.

- Para o exemplo acima, temos que a taxa de variação da função $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ para $x = 3$ é igual a $\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$, que corresponde à inclinação da reta tangente nesse ponto.



Primeiro teorema fundamental do cálculo

- Que dizer, porém, se precisarmos realizar a operação inversa, ou seja, dada a função derivada $f(x)$, desejamos encontrar a função primitiva $F(x)$?

- Por exemplo, qual é $F(x)$ em:

$$\frac{d}{dx}F(x) = 10x^4$$

- Como a derivação diminui o expoente em 1, podemos começar com:

$$\frac{d}{dx}x^5 = 5x^4$$

- Para concluir, basta multiplicar os dois lados por 2

$$2 \cdot \frac{d}{dx}x^5 = 2 \cdot 5x^4 \Rightarrow \frac{d}{dx}2x^5 = 10x^4$$

Primeiro teorema fundamental do cálculo

- Assim, $F(x) = 2x^5$ é uma solução para nosso problema.
- É importante notar, porém, que temos infinitas soluções, já que, além da função acima, temos outras cuja derivada resultam em $10x^4$, como:

$$\frac{d}{dx}(2x^5 + 1) = 10x^4$$

$$\frac{d}{dx}(2x^5 + 2) = 10x^4$$

$$\frac{d}{dx}(2x^5 - 1) = 10x^4$$

$$etc$$

- Assim, a solução genérica seria $F(x) = 2x^5 + C$, com C sendo chamada de **constante de integração**, e $F(x) = 2x^5 + C$ é a **função primitiva** de $f(x) = 10x^4$, ou, sua **antiderivada**.

Primeiro teorema fundamental do cálculo

- Generalizando o procedimento anterior, temos que, se:

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = f(x)$$

a expressão $[F(x) + C]$ é chamada de **Integral Indefinida** de $f(x)$, e estabelece **o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo**, que é indicado da seguinte maneira:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Primeiro teorema fundamental do cálculo

- Resumindo, a ideia mais importante do primeiro teorema é que a **integral é a operação inversa à derivada**.

$$
\begin{tikzcd}
2x^5 + C \arrow[rr, bend left=60, "\frac{d}{dx}(2x^5 + C)"] & & 10x^4 \arrow[ll, bend left=60, "\int 10x^4 dx"]
\end{tikzcd}
$$

Regras básicas de integração

- Antes de prosseguir, convém ver aqui as regras mais básicas de integração.
- A primeira delas será a regra da potência:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, para\, n \neq -1$$

- Essa regra é facilmente demonstrável, pois:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dx} x^{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^{n+1-1} = x^n$$

Regras básicas de integração

- Assim, a regra da potência e algumas consequências são:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, para\ n \neq -1$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int kdx = kx + C$$

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int f(x)dx$$

Exemplos

1. $\int dx =$

2. $\int 2dx =$

3. $\int x^3 dx =$

4. $\int \frac{dx}{x^3} =$

Exemplos

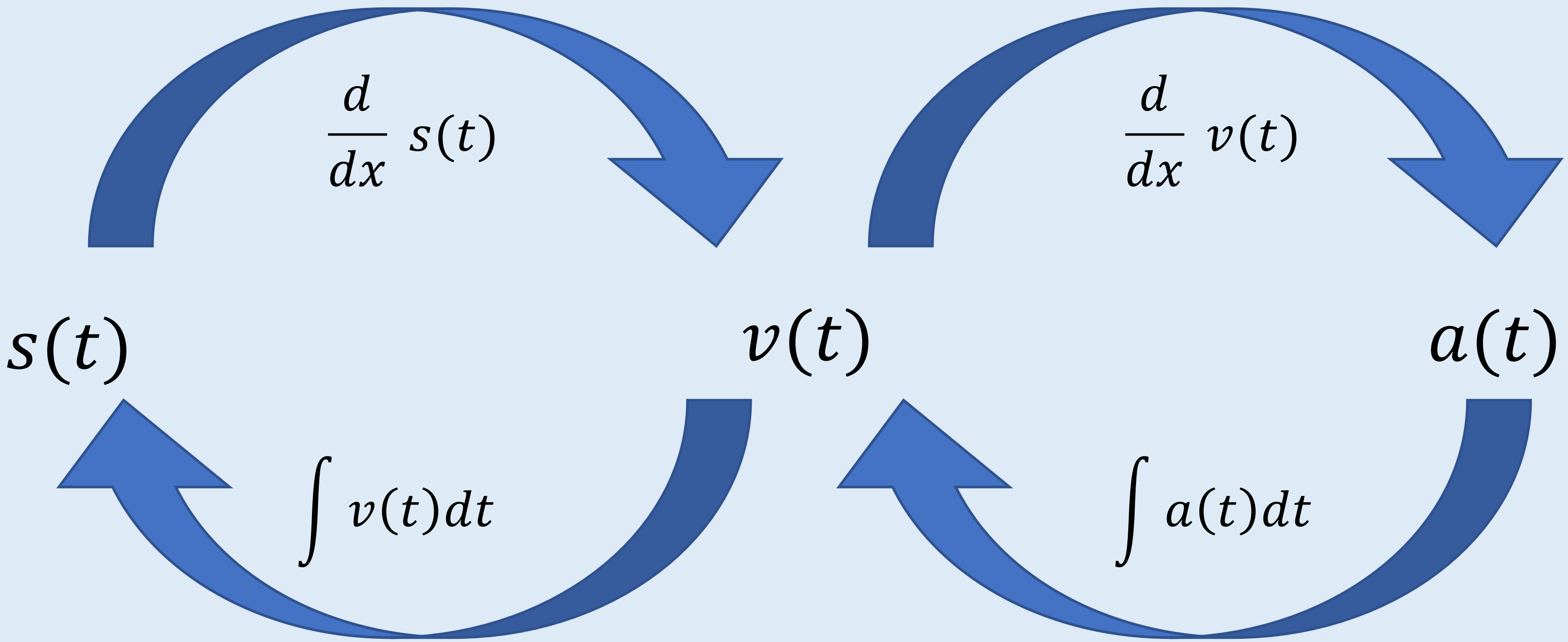
5. $\int \sqrt{x}dx =$

6. $\int 5x^3dx =$

7. $\int (5x^3 + 2x^2)dx =$

Primeiro teorema fundamental do cálculo, aplicação

- Retornado ao Primeiro Teorema Fundamental e aplicando em nosso estudo de cinemática, teremos que:



Primeiro teorema fundamental do cálculo, aplicação

- Por exemplo, suponhamos que um corpo apresente velocidade descrita pela função abaixo. Qual seu deslocamento entre os instantes $t = 2{,}0\ s\ e\ t = 4{,}0\ s$?

$$v(t) = \frac{3}{4}t^2$$

Primeiro teorema fundamental do cálculo, aplicação

- Por exemplo, suponhamos que um corpo apresente velocidade descrita por:

$$v(t) = \frac{3}{4}t^2$$

Qual seu deslocamento entre os instantes $t = \ 2{,}0\ s\ e\ t = 4{,}0\ s$?

$$s(t) = \int v(t)dt = \int \frac{3}{4}t^2 dt = \frac{t^3}{4} + C$$

$$\Delta s = s(4) - s(2) = \left(\frac{4^3}{4} + C\right) - \left(\frac{2^3}{4} + C\right) = 14\ m$$

Segundo teorema fundamental do cálculo

- Essa operação que fizemos é representada da seguinte maneira:

$$s(t) = \int_2^4 \frac{3}{4} t^2 dt$$

- Como a contante de integração C sempre será anulada, a representação genérica da operação fica:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Que é chamada **Integral Definida** de $f(x)$, entre os limites a e b, e constitui o **Segundo Teorema Fundamental do Cálculo.**

Segundo teorema fundamental do cálculo

- Para obter o valor da integral definida, integramos a função e substituímos o valor superior e o inferior, e fazemos a diferença entre o primeiro resultado e o segundo.
- A integral indefinida resulta em uma função; a integral definida resulta em um valor numérico
- Por exemplo, calcular a seguinte integral definida:

$$\int_1^2 3x^2 dx$$

Segundo teorema fundamental do cálculo

- Resolução

$$\int_{1}^{2} 3x^2 dx$$

Segundo teorema fundamental do cálculo

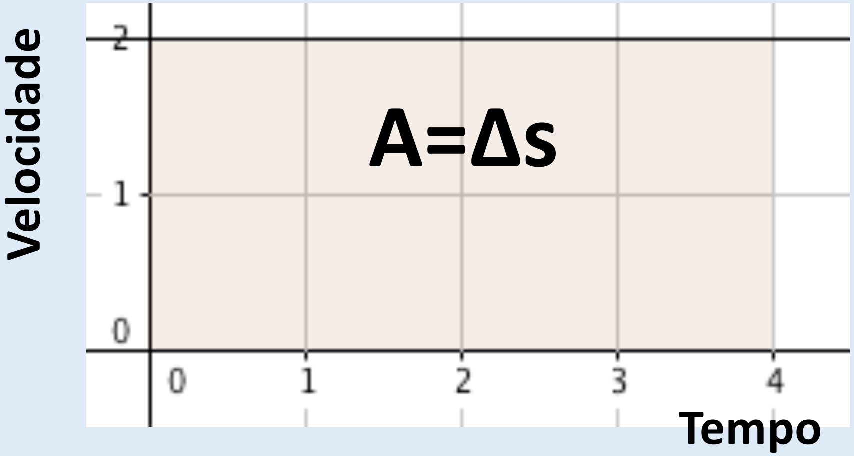
- Resolução

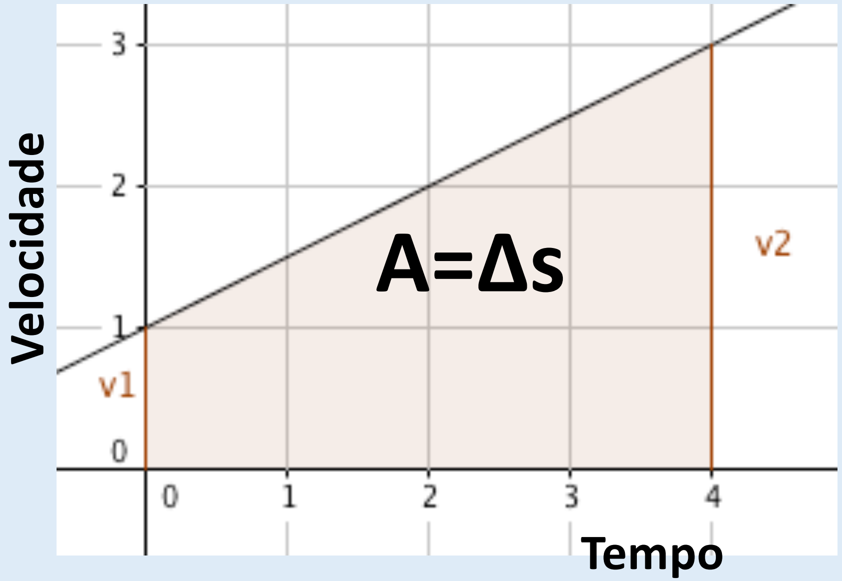
$$\int_1^2 3x^2dx$$

$$\int_1^2 3x^2dx = 3\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = x^3\Big|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$$

Segundo teorema fundamental do cálculo, significado

- É muito importante compreender o signficado geométrico da integral definida.
- Quando estudamos cinemática, vimos que uma forma de entender o deslocamento de um corpo era a área sob o gráfico da função



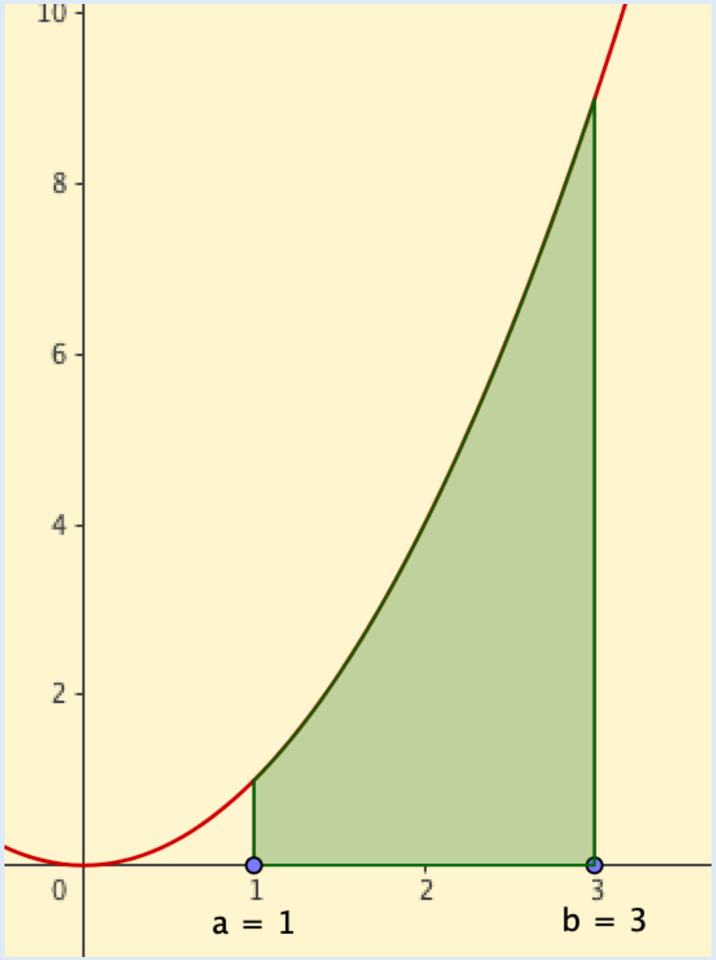


$$\Delta s = v \cdot t$$

$$\Delta s = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t$$

Segundo teorema fundamental do cálculo, significado

- Nos dois casos anteriores, as áreas são simples. Suponha que queiramos calcular o deslocamento de corpo entre os instantes 1,0 e 3,0 s no caso abaixo:



Nesse exemplo, a velocidade é dada pela função:

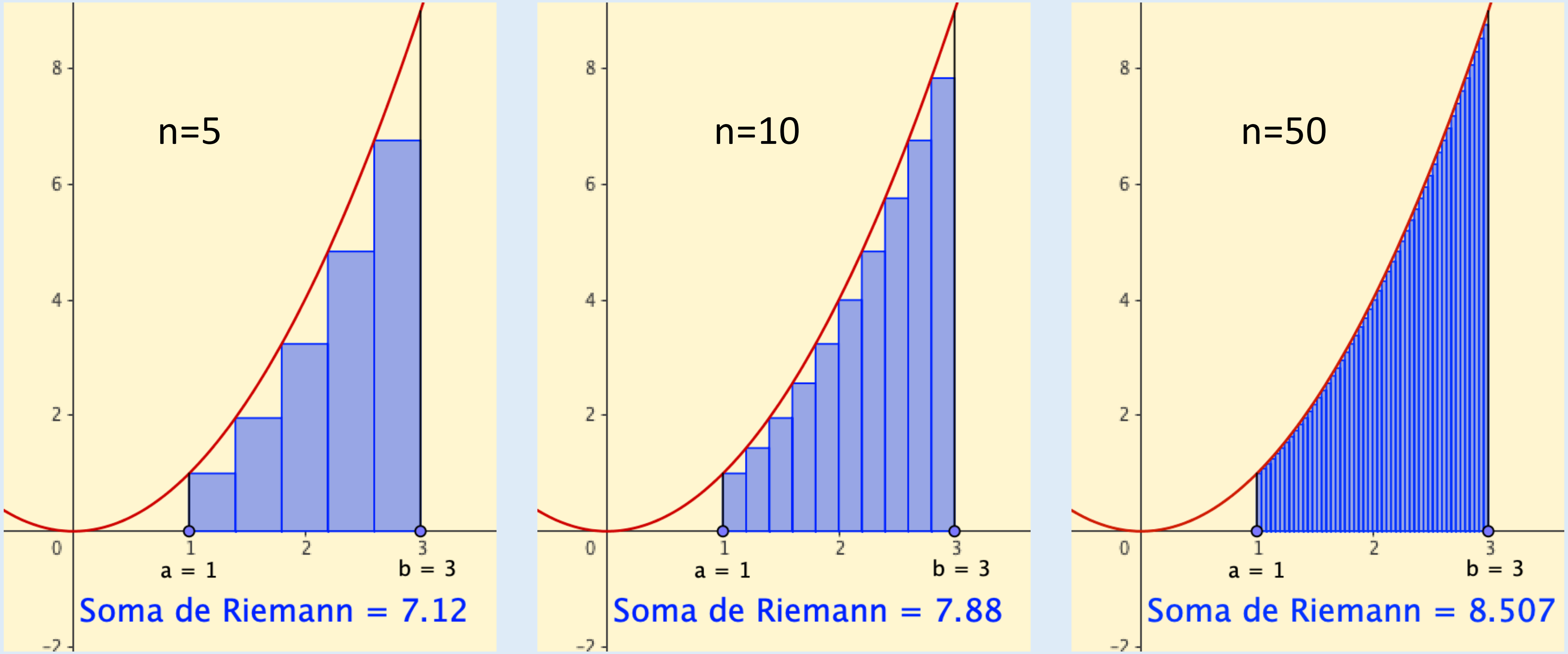
$$v(t) = t^2$$

Já vimos que podemos fazer:

$$\Delta s(t) = \int_1^3 t^2\, dt = \frac{26}{3} = 8{,}7\ m$$

Segundo teorema fundamental do cálculo, significado

- Vamos fazer o cálculo, agora, usando a área. Como é uma figura complexa, dividiremos em retângulos cada vez mais finos, e somaremos suas áreas:



- Observe que quanto maior a quantidade de retângulos (ou, quanto menor o Δx), maior é a aproximação do valor calculado, 8,7 m.

Segundo teorema fundamental do cálculo, significado

- A operação que estamos fazendo pode ser representada por:

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

- Inferimos assim que o valor exato da área será:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Essa aproximação sucessiva por meio de somatória é chamada de Soma de Riemann

- Também representada por:

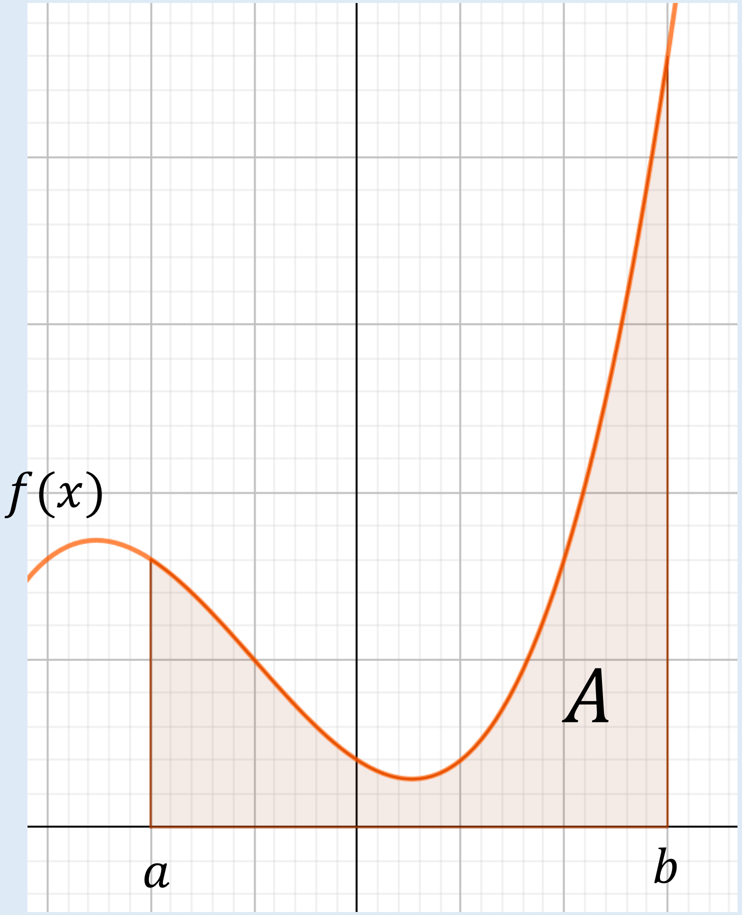
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

ou, no nosso caso:

$$A = \int_1^3 t^2 dx$$

Segundo teorema fundamental do cálculo, significado

- Assim, o **Segundo Teorema Fundamental do Cálculo** estabelece que a integral definida de uma função corresponde numericamente à área projetada da curva dessa função sobre o eixo x, entre os limites de integração



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Exemplo

- Calcular a área A da figura limitada pela função abaixo, entre o eixo x e os limites -2 e 3.

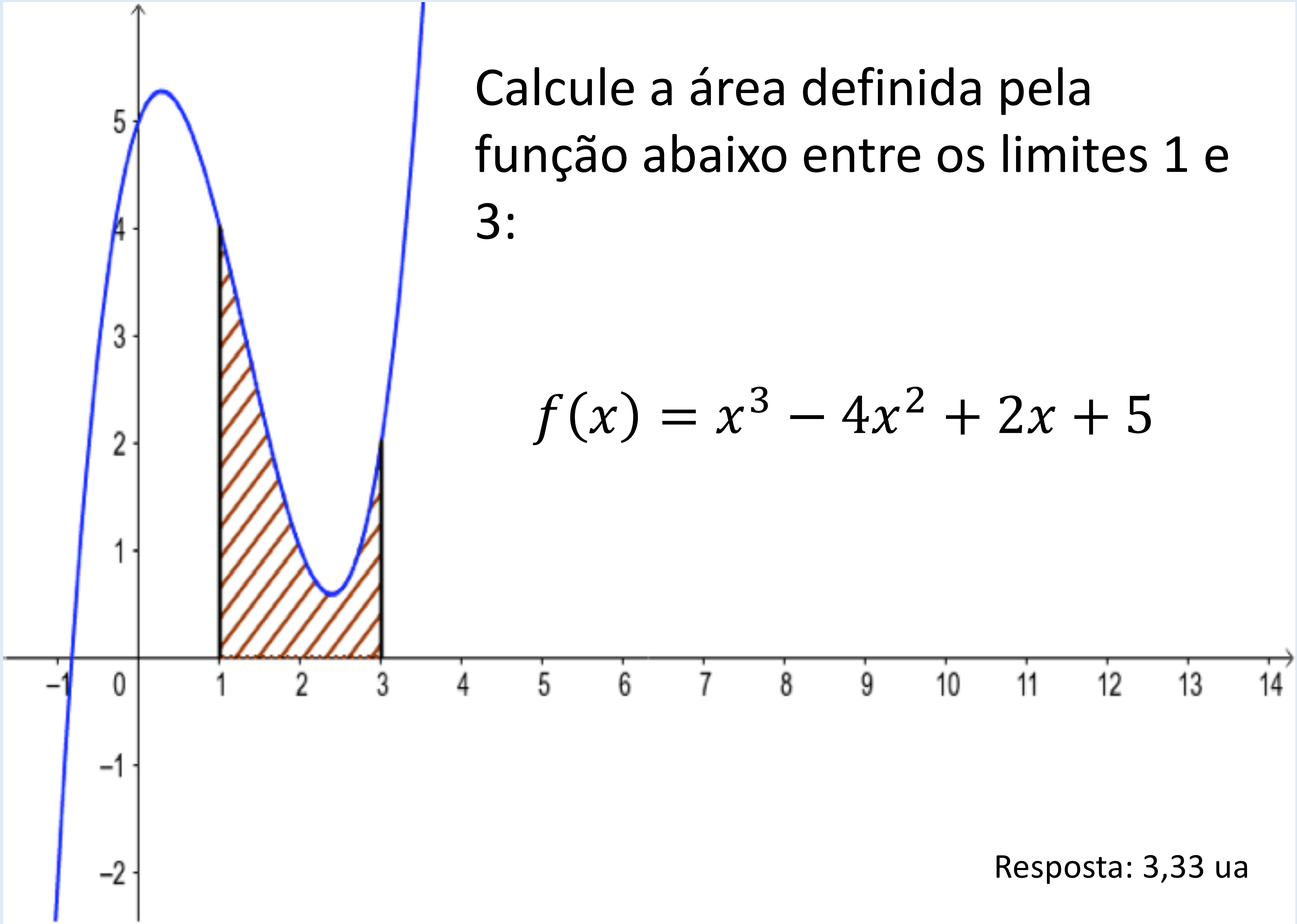
$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$

Resposta: 245/4=61,25 ua

Resolução

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$

Exercício



Calcule a área definida pela função abaixo entre os limites 1 e 3:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 5$$

Resposta: 3,33 ua

Resolução

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 5$$

Integração por substituição

- Antes de fazer as aplicações, é importante conhecer pelo menos mais uma regra básica que facilita o cálculo da integral de algumas funções.
- A regra da potência também se aplica a funções, representadas por u, abaixo:

$$\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, para\, n \neq -1$$

- Essa apresentação é útil para integrarmos funções do tipo:

$$\int 15x^2(x^3+4)^4 dx$$

Resolução

$$\int 15x^2(x^3+4)^4dx$$

Integração por substituição

- Resolução:

$$\int 15x^2(x^3+4)^4dx$$

Faremos

$$u = x^3 + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

Substituindo, temos:

$$\int 15x^2(x^3+4)^4dx = \int 15x^2u^4\frac{du}{3x^2} = 5\int u^4du = 5\cdot\frac{u^5}{5} + C = u^5 + C$$

Portanto:

$$\int 15x^2(x^3+4)^4dx = (x^3+4)^5 + C$$

Exemplos

- Resolver por substituição de variáveis

$$\int_0^1 6x^2\sqrt{2x^3+1}\,dx =$$

Resposta: 2,8

Exemplos

- Resolver por substituição de variáveis

$$\int_1^2 x^3\sqrt{3x^4+2}\,dx =$$

Resposta: 19

Resumo

- Ao final dessa aula você deve ser capaz de:
  - Entender a integral como a operação inversa da derivada
  - Utilizar esse conceito para compreender o significado do Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo
  - Calcular a integral indefinida de funções simples usando a regra da potência
  - Entender o significado algébrico do Segundo Teorema Fundamental do Cálculo
  - Aplicar a integral definida no cálculo de áreas de funções
  - Utilizar o método da substituição para o cálculo de integrais