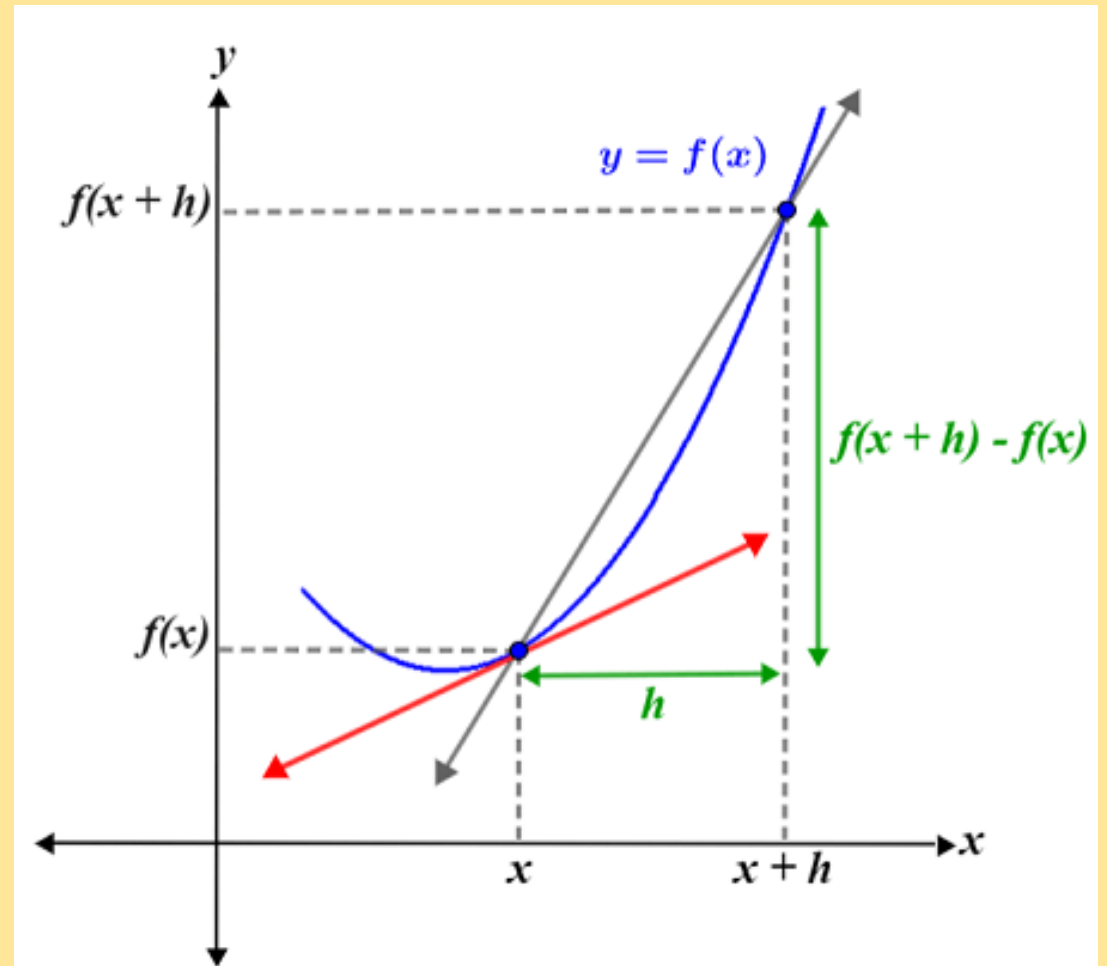


UC Análise de
Fenômenos Físicos
da Natureza

Derivada de uma função

Prof. Simões

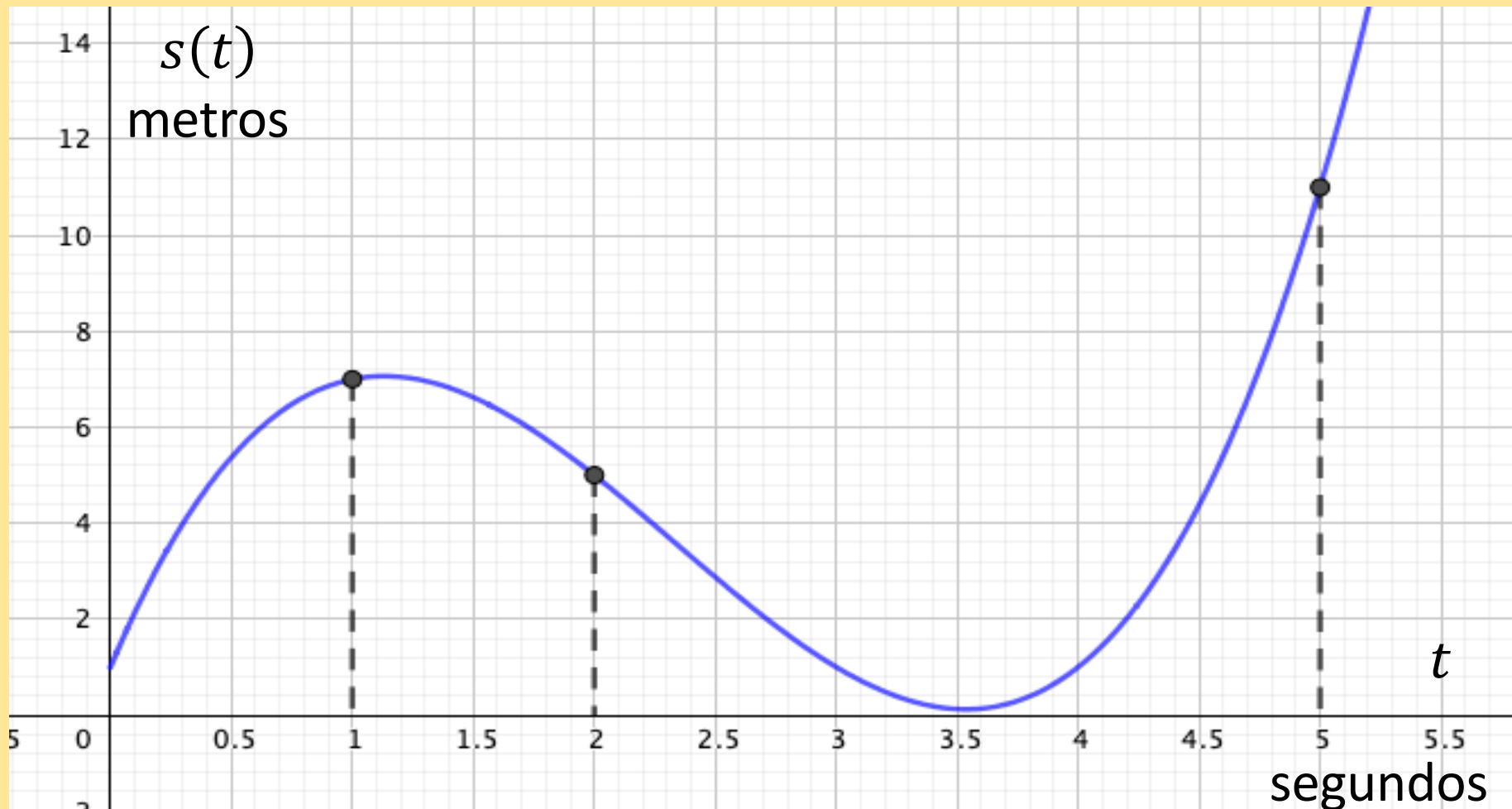


Ao final dessa
aula você
deverá

- Entender matematicamente o MRU e o significado geométrico da **velocidade**
- Identificar funções que descrevem movimentos **não uniformes**
- Analisar graficamente essas funções e o significado geométrico da velocidade **média e instantânea**
- Obter a velocidade instantânea por **aproximações**
- Aplicar essas aproximações ao conceito de **limite**
- Usar o conceito de limite para compreender o significado da **derivada**
- Aprender as **regras básicas** de derivação
- Aplicar essas regras na **resolução de problemas**

Problema típico

- A posição de uma partícula em função do tempo é dada pela função $s(t) = t^3 - 7t^2 + 12t + 1$, onde s é a posição em metros e t o tempo em segundos. Determine a função da velocidade da partícula, e calcule a velocidade nos instantes $t = 1,0$ s, $t = 2,0$ s e $t = 5,0$ s.



Analizando matematicamente o MRU

- Para compreender o conceito de **derivada**, utilizaremos o estudo do movimento dos corpos.
- No MRU, a posição de um corpo pode ser conhecida em função do tempo por uma função do tipo:

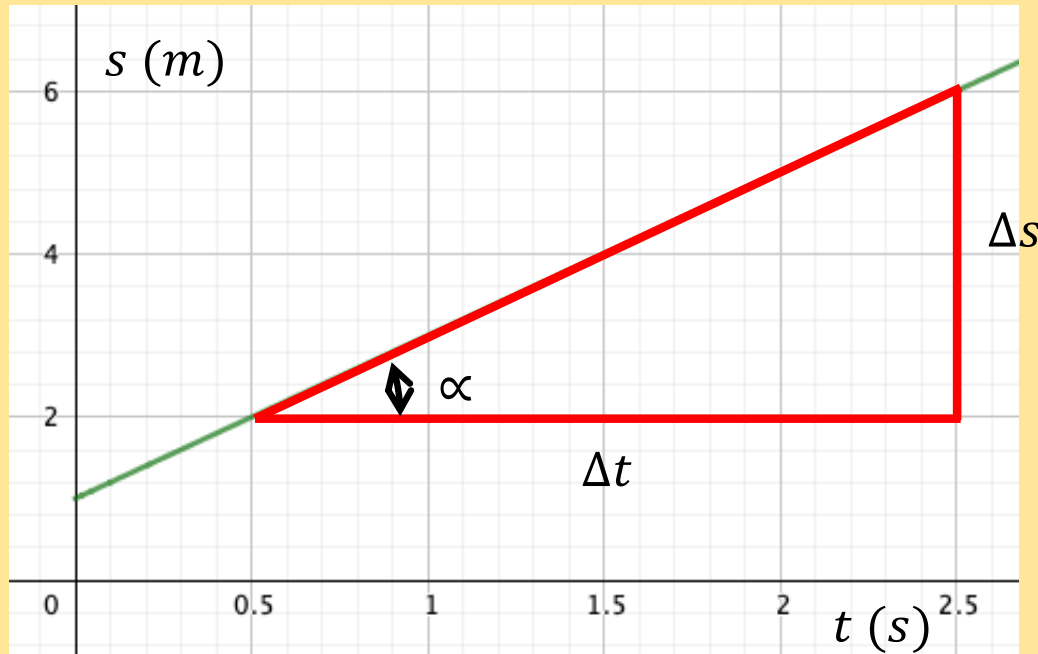
$$s(t) = s_0 + v \cdot \Delta t$$

- Por exemplo, se a posição inicial s_0 de um corpo for 1,0 m, e sua velocidade for 2,0 m/s, sua função será:

$$s(t) = 1,0 + 2,0 \cdot \Delta t$$

Analizando matematicamente o MRU

- Analizando graficamente essa função, teremos:



Para calcular a velocidade a partir dos dados do gráfico, faríamos:

$$v_m = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \frac{6,0 - 2,0}{2,5 - 0,5}$$

$$= 2,0 \text{ m/s}$$

- Observe que isso corresponde a:

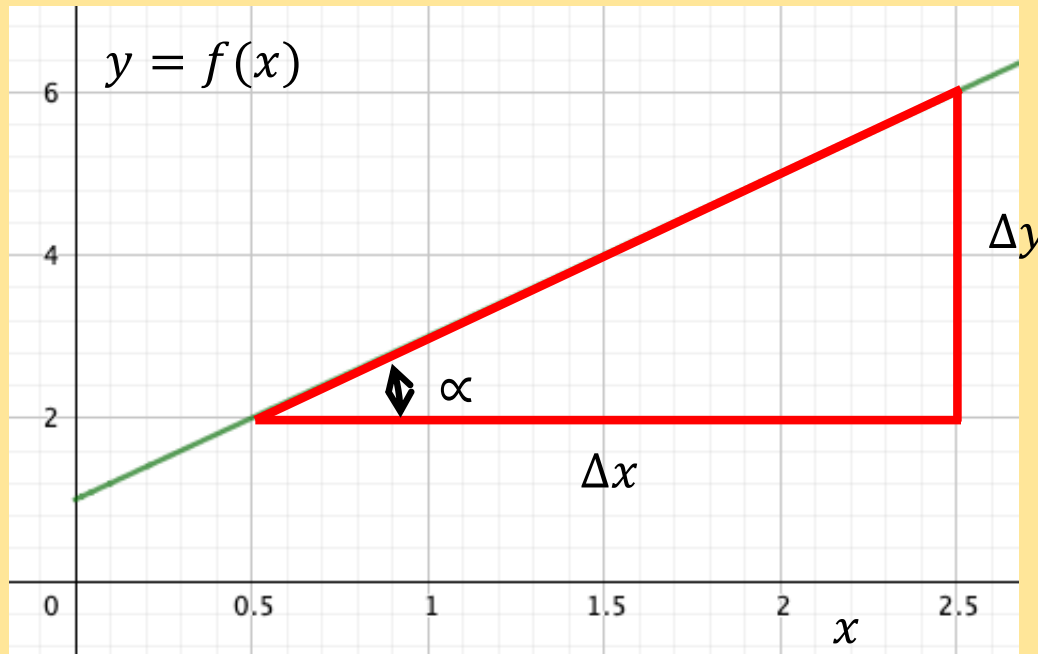
$$\tan \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Analizando matematicamente o MRU

- Generalizando a análise anterior, a função $s(t) = s_0 + v \cdot \Delta t$, corresponde à equação de primeiro grau:

$$f(x) = m \cdot x + b$$

$m \Rightarrow$ coeficiente angular



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

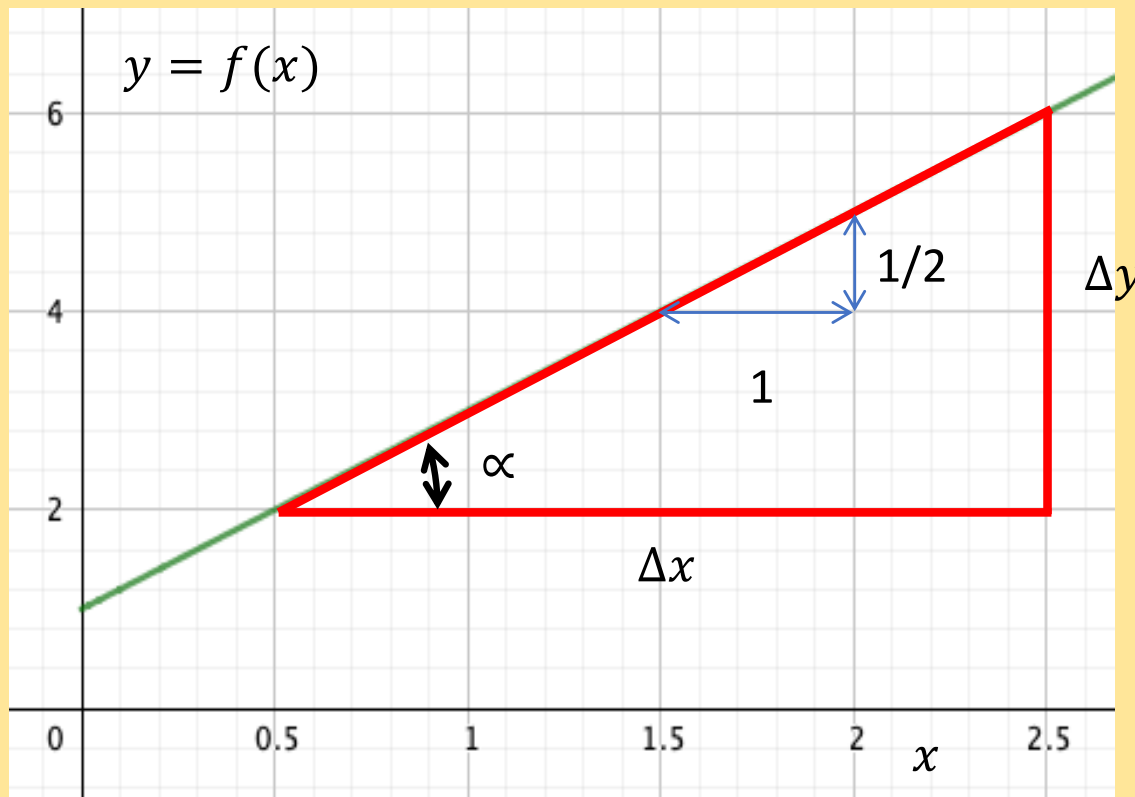
Assim, a velocidade corresponde ao coeficiente angular (ou inclinação) da reta.

Dizemos que ele é a **taxa de variação** da função.

Taxa de variação: quantas unidades a função $f(x)$ varia para cada unidade de variação em x .

Analizando matematicamente o MRU

- No MRU, essa taxa de variação não muda.
- É possível observar pelo gráfico que a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ será sempre a mesma. Portanto:



$$v_m = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

No exemplo:

$$v = \frac{2}{4} = \frac{1 \text{ m}}{2 \text{ s}}$$

Movimentos variados

- Isso pode não acontecer em outros movimentos. Por exemplo, digamos que um corpo se movimenta de acordo com a função:

$$s(t) = 2t^2 + t$$

- Qual a posição do corpo nos instantes $t = 0 \text{ s}$, $t = 1,0 \text{ s}$, $t = 3,0 \text{ s}$ e $t = 4,0 \text{ s}$?

$$s(0) = 2 \cdot 0^2 + 0 \Rightarrow s(0) = 0 \text{ m (origem)}$$

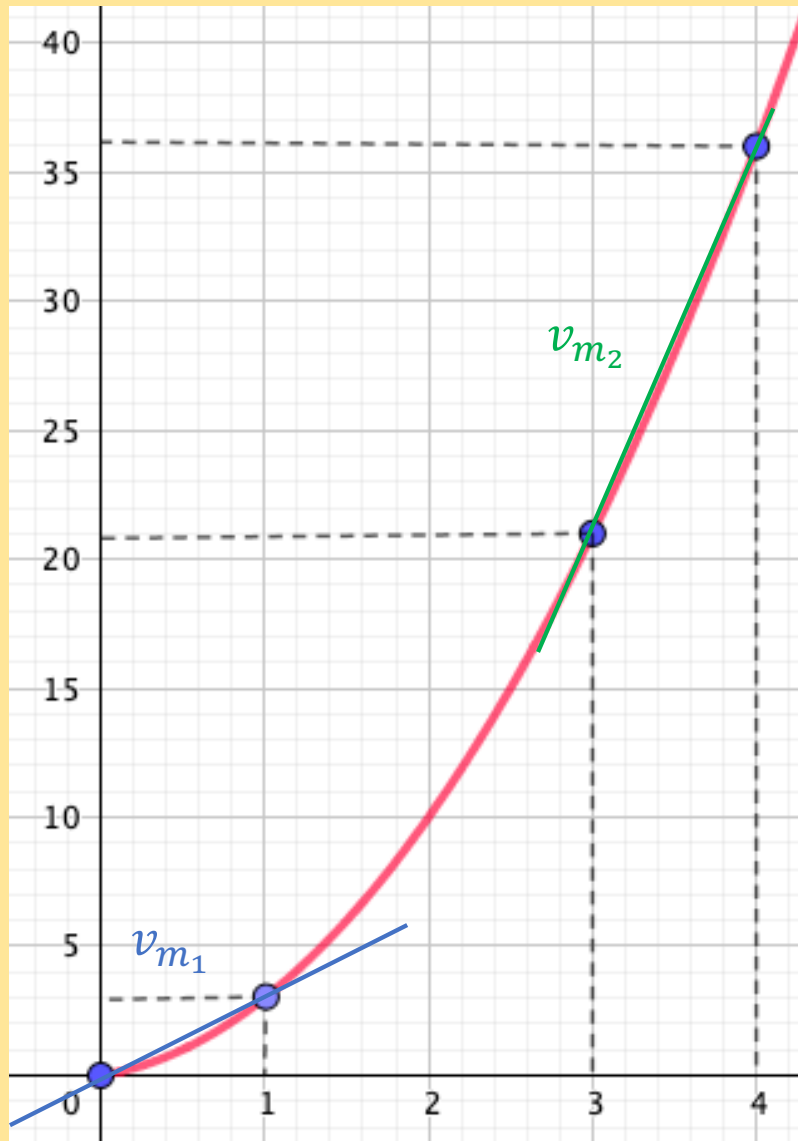
$$s(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \Rightarrow s(1) = 3 \text{ m}$$

$$s(3) = 2 \cdot 3^2 + 3 \Rightarrow s(3) = 21 \text{ m}$$

$$s(4) = 2 \cdot 4^2 + 4 \Rightarrow s(4) = 36 \text{ m}$$

Movimentos variados

- A análise gráfica desse movimento, mostra que a taxa de deslocamento, ou velocidade, desse corpo não é constante:



Velocidade entre 0 s e 1,0 s:

$$v_{m_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3 - 0}{1 - 0} = 3,0 \frac{m}{s}$$

Velocidade entre 3,0 s e 4,0 s:

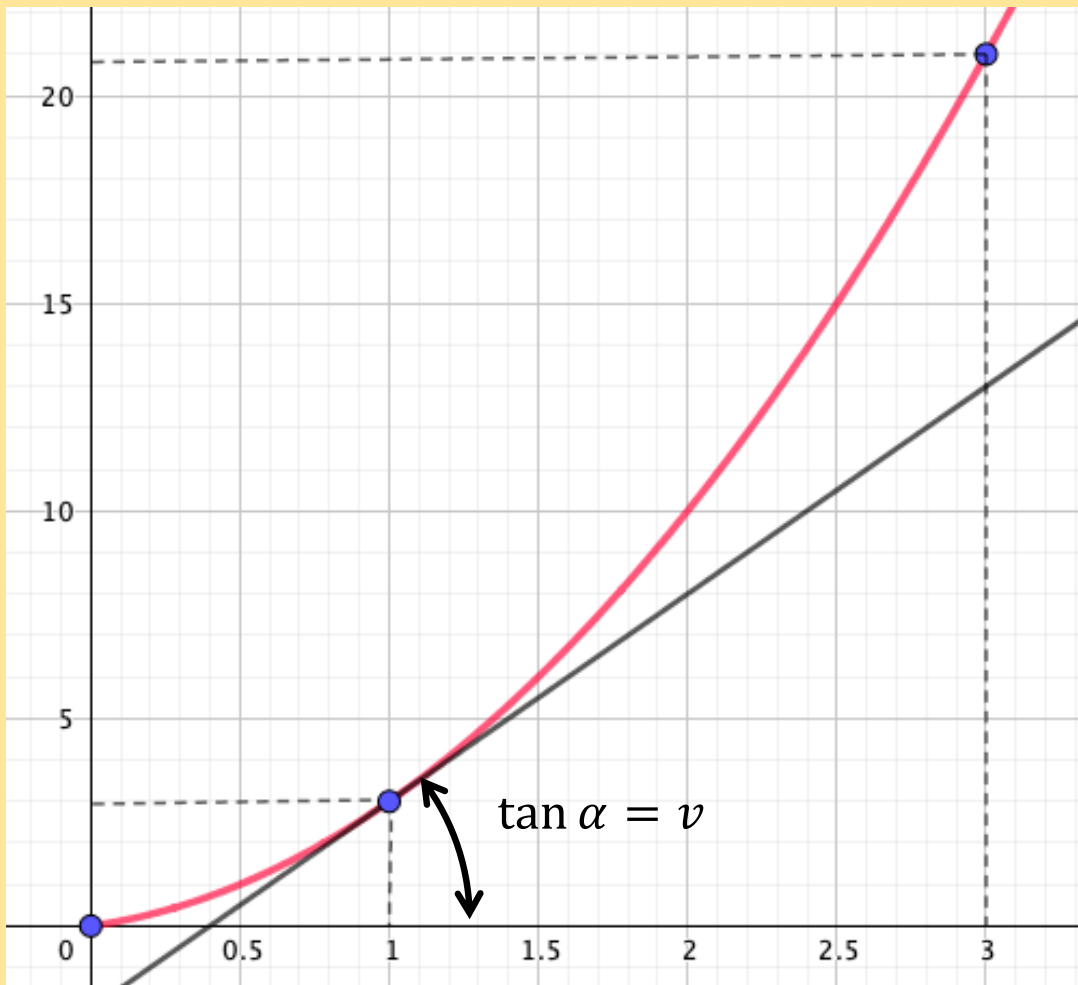
$$v_{m_2} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36 - 21}{4 - 3} = 15 \frac{m}{s}$$

Correspondentemente, inclinação das retas é diferente:

$$\tan \alpha_2 > \tan \alpha_1$$

Derivada de uma função

- O problema que a derivada resolve é: como calcular a velocidade instantânea em um certo instante, por exemplo, para $t = 1,0 \text{ s}$?



É possível intuir que essa velocidade instantânea procurada corresponde à inclinação da reta tangente ao ponto desejado.

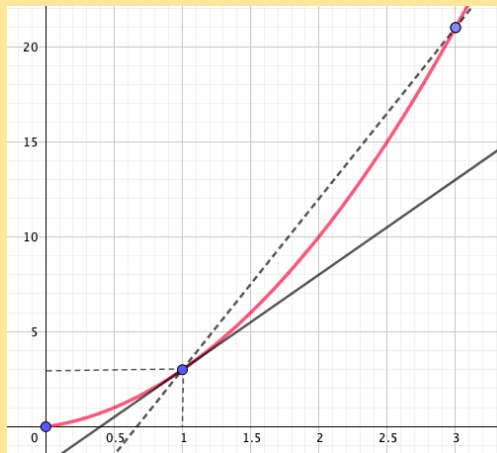
Nesse caso, porém, não podemos fazer:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{0} = \cancel{\neq}$$

Derivada de uma função

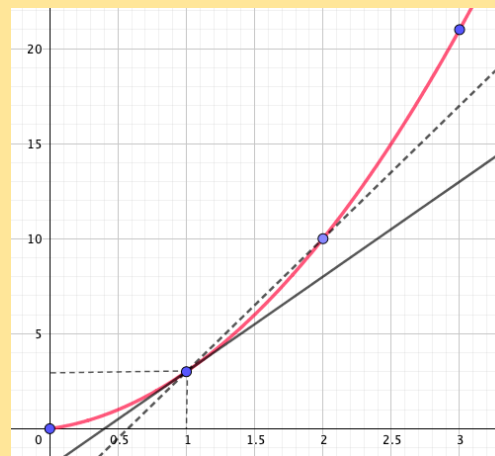
- Uma solução, é fazer o cálculo por aproximações sucessivas, com um Δt cada vez menor.
- Observe que ao passo que calculamos a velocidade média em um intervalo mais próximo de $t = 1,0 \text{ s}$, sua inclinação fica próxima da que desejamos:

Primeira aproximação:



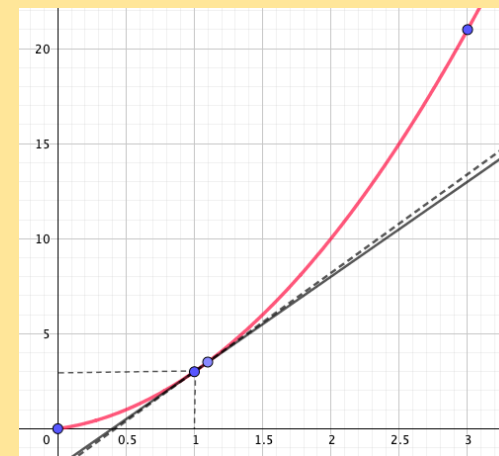
$\Delta t = 2,0 \text{ s}$

Segunda aproximação:



$\Delta t = 1,0 \text{ s}$

Terceira aproximação:



$\Delta t = 0,1 \text{ s}$

Derivada de uma função

- Para calcular a velocidade média em cada caso faremos:
- Primeira aproximação $\Delta t = 3,0 - 1,0 = 2,0 \text{ s}$

$$s(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \Rightarrow s(1) = 3 \text{ m}$$

$$s(3) = 2 \cdot 3^2 + 3 \Rightarrow s(3) = 21 \text{ m}$$

$$v_m = \frac{21 - 3,0}{2,0} = \mathbf{9,0} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Segunda aproximação $\Delta t = 2,0 - 1,0 = 1,0 \text{ s}$

$$s(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 \Rightarrow s(2) = 10 \text{ m}$$

$$v_m = \frac{10 - 3,0}{1,0} = \mathbf{7,0} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Terceira aproximação $\Delta t = 1,1 - 1,0 = 0,1 \text{ s}$

$$s(1,1) = 2 \cdot 1,1^2 + 1,1 \Rightarrow s(1,1) = 3,52 \text{ m}$$

$$v_m = \frac{3,52 - 3,0}{0,1} = \mathbf{5,2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Derivada de uma função

- Prosseguindo com o auxílio de uma planilha, verificamos que com um intervalo de tempo cada vez menor, a velocidade para $t = 1,0 \text{ s}$ se aproxima progressivamente de $5,0 \text{ m/s}$. Como demonstrar que para $\Delta t = 0 \text{ s}$ ela será exatamente $5,0 \text{ m/s}$?

$s_1 \text{ (m)}$	$t_2 \text{ (s)}$	$s_2 \text{ (m)}$	$\Delta s \text{ (m)}$	$\Delta t \text{ (s)}$	$v_m \text{ (m/s)}$
3,0	3	21	18	2	9
3,0	2	10	7	1	7
3,0	1,1	3,52	0,52	0,1	5,2
3,0	1,01	3,0502	0,0502	0,01	5,02
3,0	1,001	3,005002	0,005002	0,001	5,002
3,0	1,0001	3,00050002	0,00050002	0,0001	5,0002
3,0	1,00001	3,0000500002	0,0000500002	0,00001	5,00002

Derivada de uma função

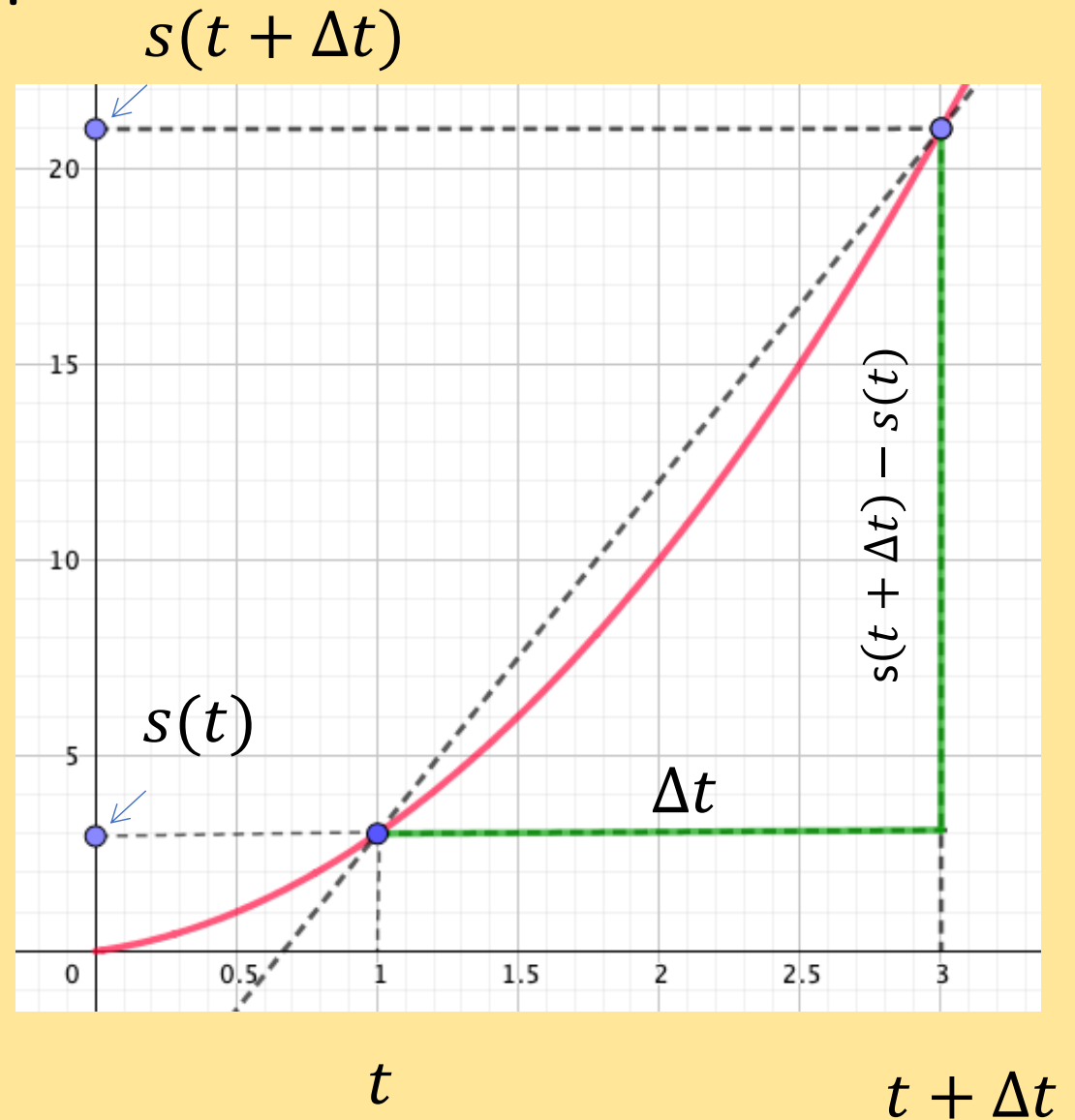
- Relembrando, a velocidade média em um intervalo de tempo Δt é calculada por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Onde:

$s(t + \Delta t) \Rightarrow$ posição final

$s(t) \Rightarrow$ posição inicial



Derivada de uma função

- Aplicando esse raciocínio em nossa função exemplo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad \text{Onde } \begin{cases} s(t) = 2 \cdot t^2 + t \\ s(t + \Delta t) = 2 \cdot (t + \Delta t)^2 + (t + \Delta t) \end{cases}$$

Teremos:

$$v_m = \frac{2 \cdot (t + \Delta t)^2 + (t + \Delta t) - (2 \cdot t^2 + t)}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{2 \cdot (t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + \Delta t^2) + (t + \Delta t) - (2 \cdot t^2 + t)}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{2 \cdot t^2 + 4 \cdot t \cdot \Delta t + 2 \cdot \Delta t^2 + t + \Delta t - 2 \cdot t^2 - t}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{4 \cdot t \cdot \Delta t + 2 \cdot \Delta t^2 + \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow v_m = 4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t + 1$$

Derivada de uma função

- Assim, temos que:

$$v_m = 4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t + 1$$

- Como vimos, para a $v_m = v$, o valor de Δt terá que ser infinitesimalmente próximo de zero
- Aqui introduzimos o conceito matemático de **limite** de uma função, escrito como:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

- Interpretação: a velocidade instânea de um corpo é o resultado do quociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, quando o valor de Δt tende a zero.

Derivada de uma função

- No nosso exemplo, já desenvolvemos que:

$$v_m = 4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t + 1$$

- Assim, usando a definição de limite:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t + 1)$$

- Com Δt tendendo a zero, a parcela $2 \cdot \Delta t$ não terá efeito na soma, e a expressão fica:

$$v(t) = 4 \cdot t + 1$$

Derivada de uma função

- Essa expressão é chamada de **derivada** de $s(t)$ e fornece a velocidade instantânea do corpo para qualquer valor de t .
- Sua notação matemática é a seguinte:

$$v(t) = \frac{d}{dt} s(t) = \frac{d}{dt} (2t^2 + t) = 4 \cdot t + 1$$

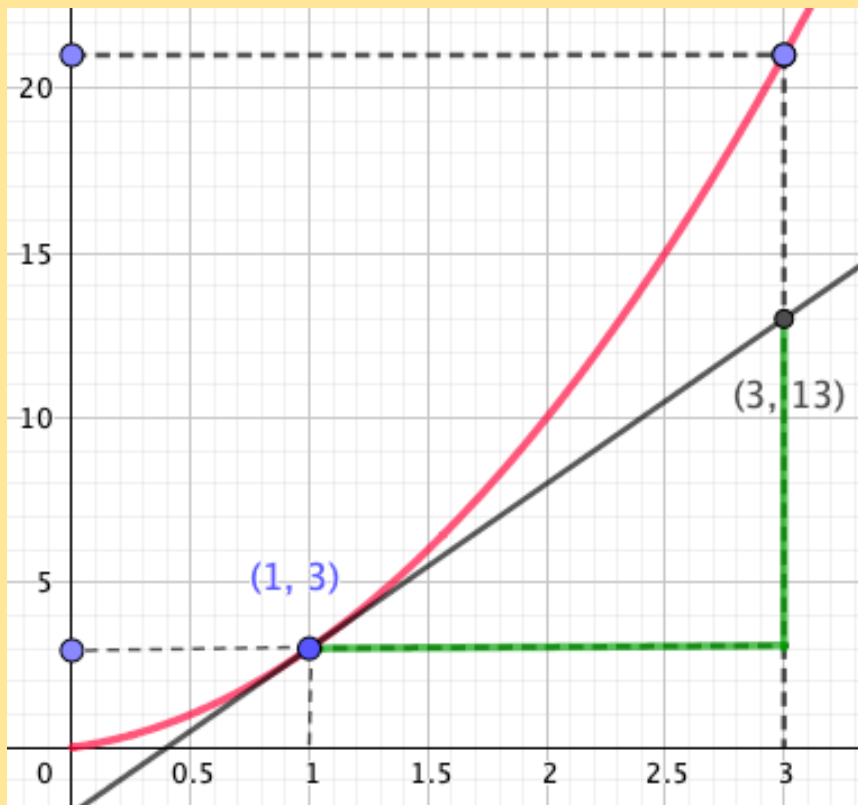
- Lemos: a derivada do espaço em relação ao tempo é a velocidade.
- Essa notação é preferível por sempre indicar em relação a que variável estamos derivando.
- Uma forma alternativa seria $s'(t) = v(t)$

Derivada de uma função

- No nosso caso, buscávamos a velocidade para $t = 1,0$ s:

$$v(1,0) = 4 \cdot 1,0 + 1 = 5,0 \frac{m}{s}$$

que era o valor inferido por aproximação.



Graficamente, é possível observar que essa é, de fato, a inclinação da reta tangente:

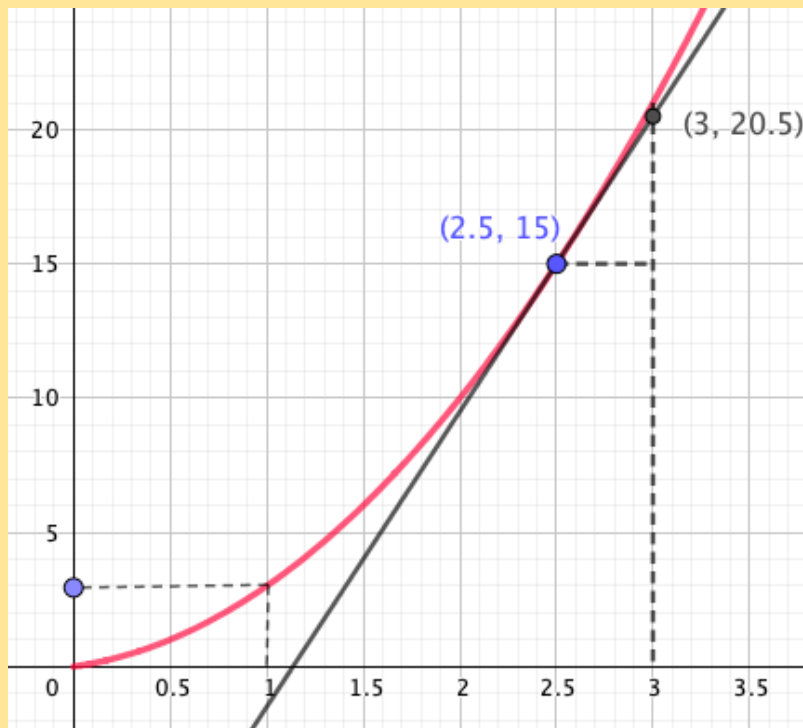
$$m = v = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$v = \frac{13 - 3}{3 - 1} = 5,0 \text{ m/s}$$

Derivada de uma função

- Com essa função derivada, podemos obter a velocidade instantânea para qualquer valor de t . Por exemplo, para $t = 2,5$ s, teremos:

$$v(2,5) = 4 \cdot 2,5 + 1 = 11 \frac{m}{s}$$



Graficamente:

$$m = v = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$v = \frac{20,5 - 15}{3,0 - 2,5} = 11 \text{ m/s}$$

Derivada de uma função - conclusões

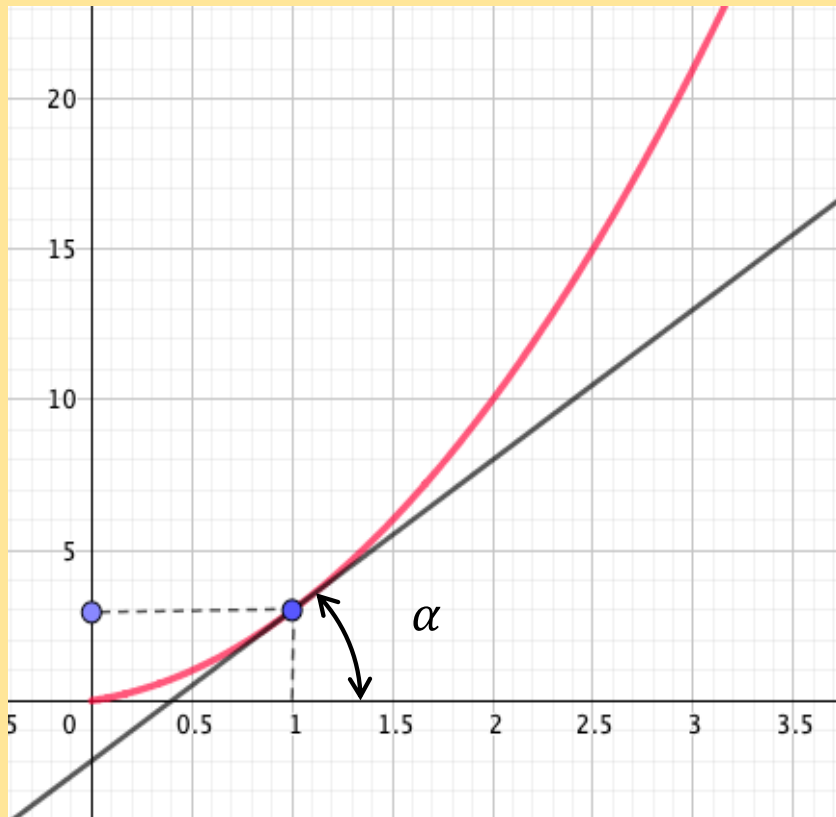
- A derivada de uma função expressa a **taxa de variação** dessa função em um determinado ponto.
- A expressão geral da derivada de uma função é:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Esse procedimento é chamado de **Regra dos Quatro Passos**
 - 1) Calculamos o valor da função com um incremento de tempo
 - 2) Do resultado anterior, subtraímos o valor da função sem o incremento
 - 3) Dividimos o resultado anterior pelo intervalo de tempo considerado
 - 4) Calculamos o limite da função resultante, com o intervalo tendendo a zero

Derivada de uma função - conclusões

- Graficamente, o valor da derivada é o da **inclinação da reta tangente** à função nesse ponto.



$$\frac{d}{dx} f(x) = \tan \alpha$$

Regras básicas de derivação

- Podemos deduzir uma regra fundamental de derivação a partir dos seguintes exemplos:

Derivar as funções abaixo usando a definição (limite):

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{d}{dx}x^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x - x^2}{\Delta x} =$$

$$\frac{d}{dx}x^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x$$

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

Regras básicas de derivação

- Continuação

$$f(x) = x^3$$

$$\frac{d}{dx}x^3 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}x^3 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 = 3x^2 \quad \therefore \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

$$f(x) = x^4$$

$$\frac{d}{dx}x^4 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}x^4 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}x^4 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4x^3 + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^3 = 4x^3 \quad \therefore \frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$$

Regras básicas de derivação

- Observe que:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$$

- Assim, deduzimos que:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Obs.: uma demonstração cabal dessa regra pode ser feita com o binômio de Newton

Regras básicas de derivação

- A derivada de uma constante é zero.

Pela definição:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

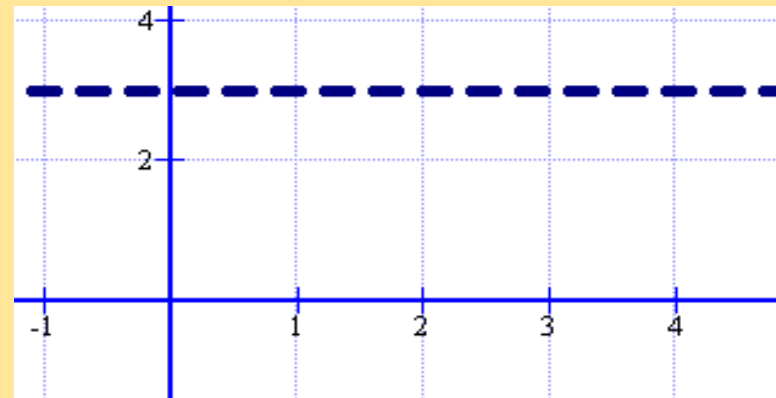
Como:

$$f(x) = C \text{ e } f(x + \Delta x) = C$$

teremos:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

- De fato, a derivada é a taxa de variação, e uma constante não varia; a inclinação de sua curva é zero



Regras básicas de derivação

- Derivada da soma e da diferença

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v$$

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}u - \frac{d}{dx}v$$

- A derivada de x é 1

$$\frac{d}{dx}x = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Exemplos

1. Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$a) f(x) = 4x^3$$

$$b) f(x) = x^{\frac{3}{4}}$$

$$c) f(x) = \sqrt[3]{x}$$

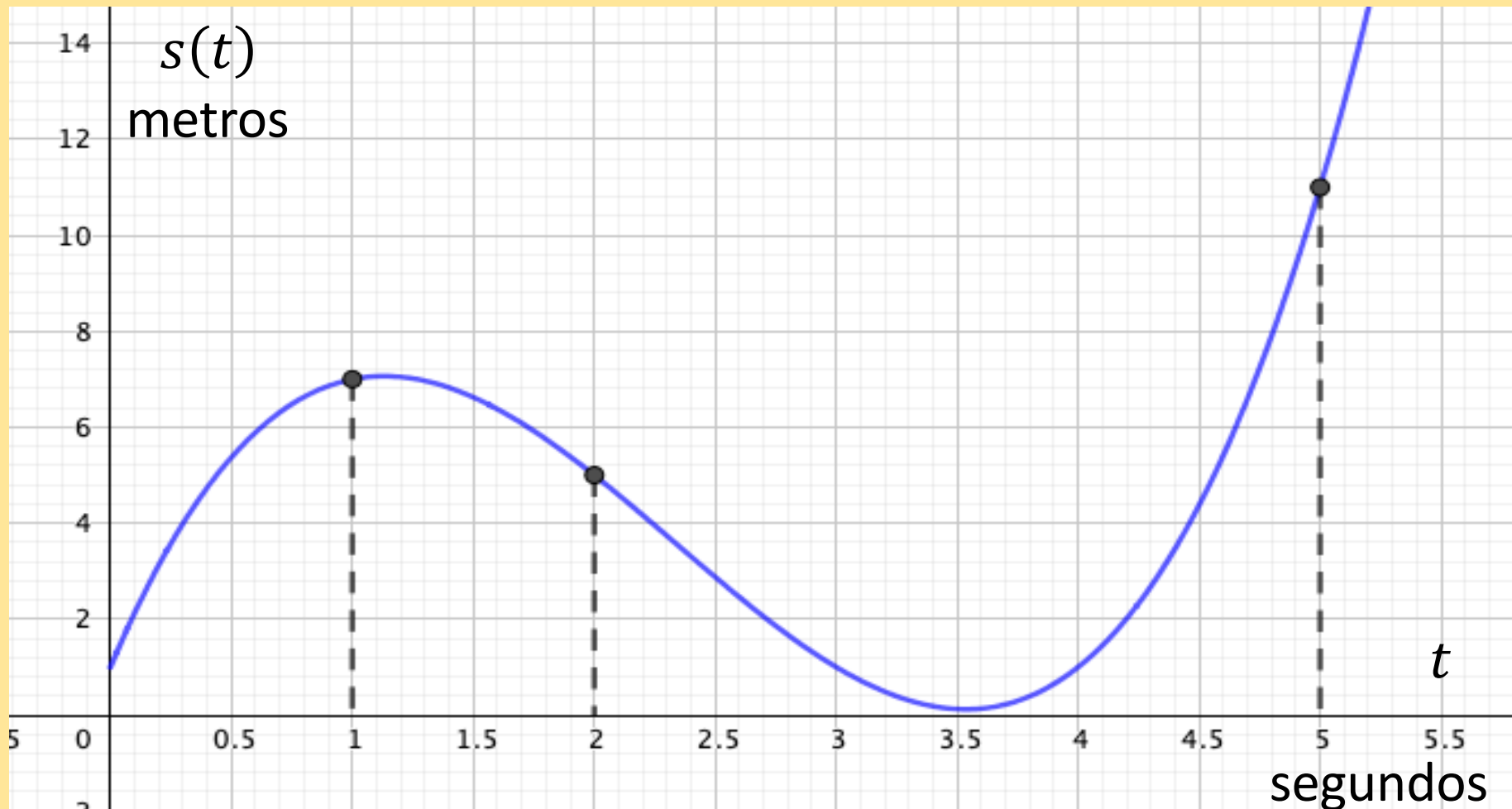
2. Calcule a derivada das funções abaixo para o valor fornecido:

$$a) f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 6, \text{ para } x = 2$$

$$b) f(x) = \frac{2x^4}{5} + \frac{2}{3x^7}, \text{ para } x = 1$$

Problema típico

- A posição de uma partícula em função do tempo é dada pela função $s(t) = t^3 - 7t^2 + 12t + 1$, onde s é a posição em metros e t o tempo em segundos. Determine a função da velocidade da partícula, e calcule a velocidade nos instantes $t = 1,0$ s, $t = 2,0$ s e $t = 5,0$ s.



Regras básicas de derivação

- Derivada do produto:

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

- Exemplo: calcular $\frac{d}{dx} f(x)$, sendo $f(x) = x^3 \cdot (x^2 + 1)$

$$u = x^3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$v = x^2 + 1 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = x^3 \cdot 2x + (x^2 + 1) \cdot 3x^2$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 2x^4 + 3x^4 + 3x^2$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 5x^4 + 3x^2$$

Regras básicas de derivação

- Derivada do quociente:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

- Exemplo: calcular $\frac{d}{dx} f(x)$, sendo $f(x) = x^3 / (x^2 + 1)$

$$u = x^3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$v = x^2 + 1 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Aplicação

- Um corpo se desloca de acordo com a função $s(t) = \frac{t^3}{4} + 2t$. Calcule:
 - Seu deslocamento entre os instantes $t_1 = 2,0 \text{ s}$ e $t_2 = 4,0 \text{ s}$,
 - Sua velocidade média nesse intervalo,
 - A função de sua velocidade instantânea
 - O valor da velocidade instantânea em cada um desses instantes.

Exercícios proposto

- Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número N de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado $N(t) = 64t - \frac{t^3}{3}$. Calcule:
 - Quantas pessoas estarão infectadas no 4º dia?
 - Qual a velocidade de propagação no 4º dia?
 - Qual a velocidade de propagação no 8º dia?

Nessa aula você

- Identificou funções que descrevem movimentos não uniformes
- Analisou graficamente essas funções e o significado geométrico da velocidade média e instantânea
- Explorou o conceito de limite para compreender o significado da derivada
- Entendeu o cálculo da derivada como sendo o cálculo da taxa de variação de uma função
- Aprendeu as regras básicas de derivação na resolução de problemas
- Aplicou as regras básicas na resolução de problemas