Transferência de Calor
Condução: paredes cilíndricas e esféricas

Prof. Marco A. Simões

Lei de Fourier

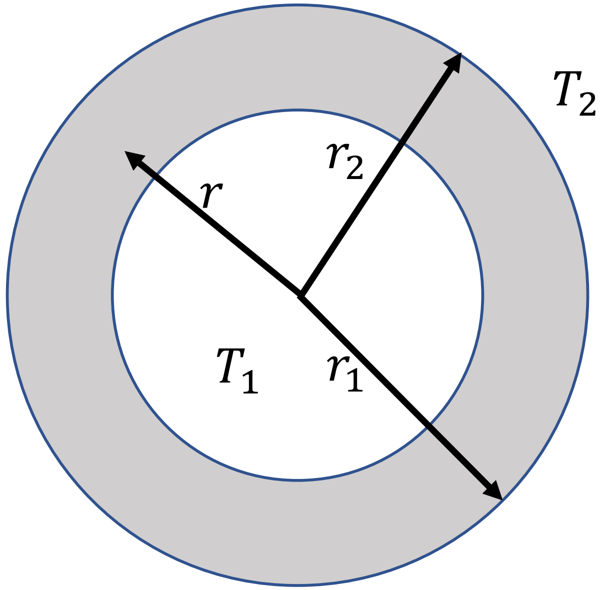
- Aplicando a Lei de Fourier a um tubo de comprimento L, teremos:

$$\dot{q} = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dr}$$

Onde:

$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L$ (área de transmissão)

$\frac{dT}{dr} \Rightarrow$ gradiente de temperatura



- Substituindo, fica:

$$\dot{q} = -k \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \frac{dT}{dr}$$

Lei de Fourier

- Separando as variáveis e integrando, vem:

$$\dot{q} = -k \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \frac{dT}{dr}$$

$$\dot{q} \cdot \frac{1}{r} \cdot dr = -k \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot dT$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \dot{q} \cdot \frac{1}{r} \cdot dr = \int_{T_1}^{T_2} -k \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot dT$$

$$\dot{q} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = -k \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\dot{q} \cdot \ln(r)\Big|_{r_1}^{r_2} = -k \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot T\Big|_{T_2}^{T_1}$$

$$\dot{q} \cdot \left(\ln(\mathrm{r}_2) - \ln(\mathrm{r}_1)\right) = -k \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\dot{q} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 2 \cdot k \cdot \pi \cdot L \cdot (T_1 - T_2) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\dot{q} = \frac{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot (T_1 - T_2)}$$

Exemplo

- Um reservatório cilíndrico de 1,5 m de altura e 80 cm de diâmetro interno é feito de aço e revestido por uma camada de lã de vidro (k=0,038 W/mK) de 5,0 cm de espessura. Considerando que ele armazena um fluido que é mantido a 60°C, e que a temperatura externa é de 25°C, calcule o fluxo de calor, considerando apenas o isolante térmico.

$$\dot{q} = \frac{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot (T_1 - T_2)$$

$$\dot{q} = \frac{2 \cdot 0{,}038 \cdot \pi \cdot 1{,}5}{ln\left(\frac{0{,}45}{0{,}4}\right)} \cdot (60 - 25) \Rightarrow \dot{q} = 1{,}1 \cdot 10^2 \; W$$

Paredes múltiplas

- Para várias camadas sobrepostas, utilizamos a analogia com a Lei de Ohm:

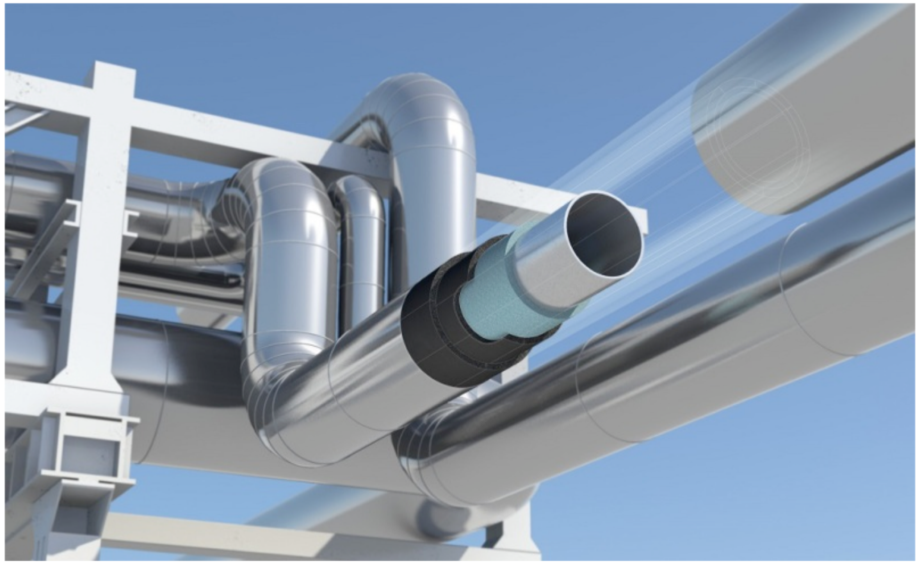
$$I = \frac{1}{R} \cdot V \qquad \dot{q} = \frac{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot (T_1 - T_2)$$

Comparando I com $\dot{q}$ e V com $(T_1 - T_2)$, podemos escrever que:

$$\frac{1}{R} = \frac{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

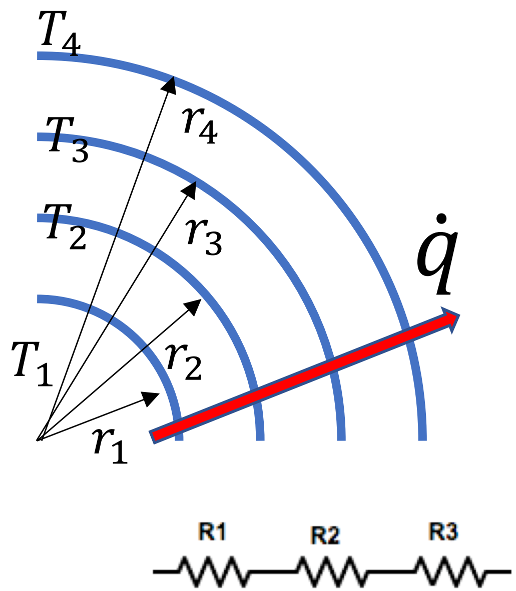
E:

$$R = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L}$$



Paredes múltiplas

- A quantidade de calor que passa por cada camada é a mesma



$$\dot{q} = \frac{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot (T_1 - T_2) \Rightarrow (T_1 - T_2) = \frac{\dot{q} \cdot ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L}$$

$$\dot{q} = \frac{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L}{ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} \cdot (T_2 - T_3) \Rightarrow (T_2 - T_3) = \frac{\dot{q} \cdot ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L}$$

$$\dot{q} = \frac{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L}{ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)} \cdot (T_3 - T_4) \Rightarrow (T_3 - T_4) = \frac{\dot{q} \cdot ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L}$$

Somando os termos das equações, e colocando $\dot{q}$ em evidência, teremos

$$T_1 - T_2 + T_2 - T_3 + T_3 - T_4 = \dot{q} \cdot \left(\frac{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L} + \frac{ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L} + \frac{ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2 \cdot k \cdot \pi \cdot L}\right)$$

$$T_1 - T_4 = \dot{q} \cdot (R_1 + R_2 + R_3)$$

Portanto: $\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_t}$ Onde: $R_t = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n$

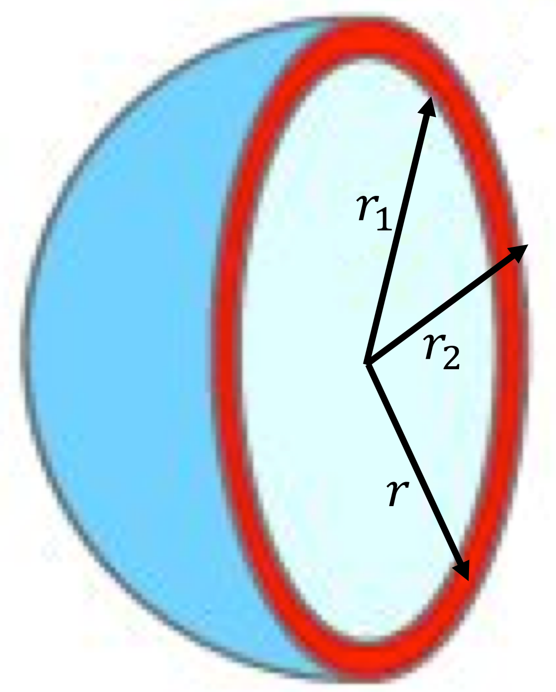
Exemplo

Um reservatório de concreto (k=0,72 W/mK) mantém água a uma temperatura de 80°C, em um ambiente de 25°C. O diâmetro interno do reservatório é de 1,2 m, o comprimento é de 2 metros, e ele tem uma espessura de 5,0 cm. O reservatório é revestido por uma camada de Lã de Rocha (k=0,031 W/mK) de 6,0 cm, e, externamente, por uma manta asfáltica (k=0,75 W/mk) de 5 mm. Calcule o fluxo de calor através da parede cilíndrica.

Casca esférica

- Aplicando a Lei de Fourier a uma esfera, teremos:

$$\dot{q} = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dr}$$



Onde:

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ (área de transmissão)

$\frac{dT}{dr} \Rightarrow$ gradiente de temperatura

- Substituindo, fica

$$\dot{q} = -k \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{dT}{dr}$$

Casca esférica

- Separando as variáveis e integrando, vem:

$$\dot{q} = -k \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{dT}{dr} \Rightarrow \dot{q} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot dr = -k \cdot 4 \cdot \pi \cdot dT$$

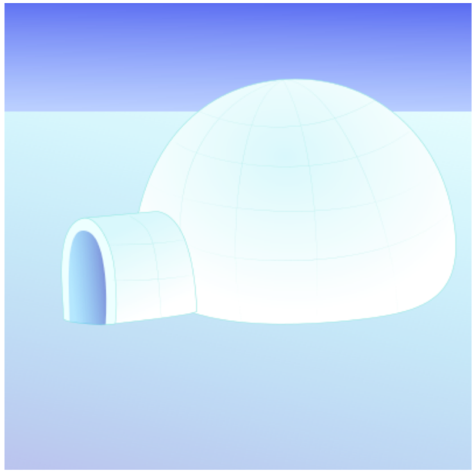
$$\int_{r_1}^{r_2} \dot{q} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot dr = \int_{T_1}^{T_2} -k \cdot 4 \cdot \pi \cdot dT \Rightarrow \dot{q} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -k \cdot 4 \cdot \pi \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\dot{q} \cdot \left(-\frac{1}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2} \right) = -4 \cdot k \cdot \pi \cdot T\bigg|_{T_1}^{T_2} \Rightarrow \dot{q} \left(-\frac{1}{r_2} - \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right) = -4 \cdot k \cdot \pi \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\dot{q} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 4 \cdot k \cdot \pi \cdot (T_1 - T_2) \Rightarrow \boldsymbol{\dot{q}} = \frac{\boldsymbol{4 \cdot k \cdot \pi}}{\boldsymbol{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}} \cdot (\boldsymbol{T_1 - T_2})$$

Exemplo

Um iglu é uma habitação construída por algumas tribos da região ártica, que provê proteção contra as baixas temperaturas do ambiente. Suponha que um iglu tenha um diâmetro interno de 4,0 metros, e uma espessura de 30 cm de gelo compactado (k=0,3 W/mK). Calcule o fluxo de calor considerando -45°C de temperatura externa e 5°C de temperatura interna. Considere apenas a semiesfera.



$$\text{Esfera inteira: } \dot{q} = \frac{4 \cdot k \cdot \pi}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot (T_1 - T_2)$$

$$\dot{q} = \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot \pi}{\frac{1}{2{,}0} - \frac{1}{2{,}3}} \cdot \big(5 - (-45)\big)$$

$$\dot{q} = 2{,}9\ kW \qquad \text{Semiesfera: } \frac{2{,}9}{2} \Rightarrow \dot{q} = 1{,}5\ kW$$

Casca esférica com camadas sobrepostas

- Aplicando a analogia com a Lei de Ohm, similarmente aos tubos, temos que:

$$I = \frac{1}{R} \cdot V \qquad \dot{q} = \frac{4 \cdot k \cdot \pi}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot (T_1 - T_2)$$

- Portanto

$$\frac{1}{R} = \frac{4 \cdot k \cdot \pi}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

e

$$R = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4 \cdot k \cdot \pi}$$

- Assim:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_t}$$

Onde $R_t = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n$

Exemplo

Suponha que no exemplo do reservatório, ele tenha duas semiesferas como fechamento. Calcule o fluxo de calor pelas semi esferas.

Foram dados:

Temperatura interna: 80°C

Temperatura externa: 25°C

Diâmetro interno do reservatório: 1,2 m

$k_{concreto}$=0,72 W/mK, espessura de 5,0 cm

$k_{Lã\ de\ Rocha}$=0,031 W/mK, espessura de 6,0 cm

$k_{Manta\ asfáltica}$=0,75 W/mk, espessura de 5,0 mm