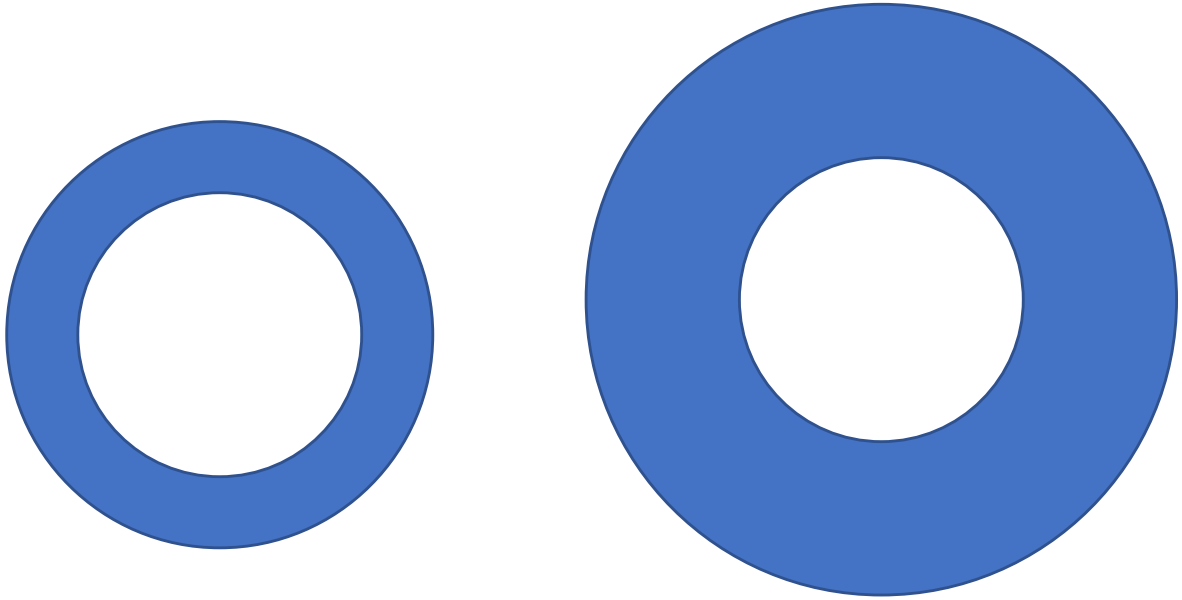
Isolamento de tubos: raio crítico

Prof. Simões

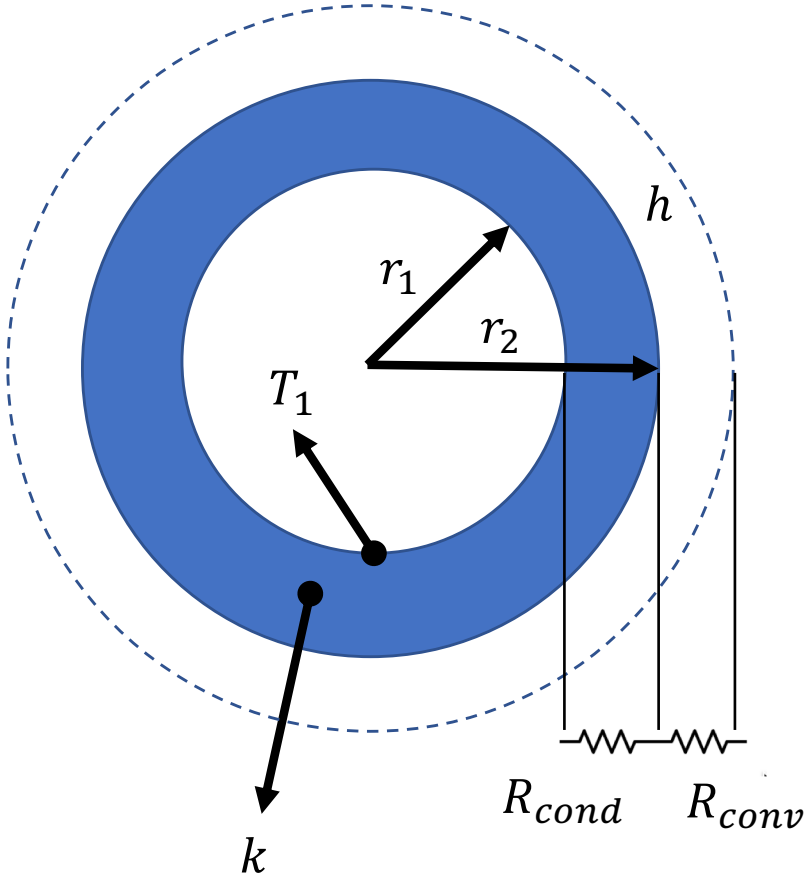
Conceito

- A transferência de calor em um tubo se dá por condução e convecção (não contando aqui a radiação)
- Para diminuir a perda de calor em um tubo, aumentamos a espessura do isolante, para diminuir a perda por condução
- Porém, ao fazer isso, aumentamos a área de transferência por convecção
- Assim, sob certas condições, pode ocorrer que um tubo revestido transfira mais calor do que sem revestimento.
- Essa condição ocorre quando o isolamento está no chamado raio crítico



Determinação do raio crítico

- Vamos analisar como o fluxo de calor no cilindro abaixo, de comprimento L, varia em função do raio externo do isolante (ou seja, sua espessura):



Conforme vimos, o fluxo de calor, considerando a convecção externa será dada por:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_t} = \frac{\Delta T}{R_{cond} + R_{conv}} = \frac{\Delta T}{\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi L k} + \frac{1}{h \cdot 2\pi L r_2}}$$

Simplificando, teremos:

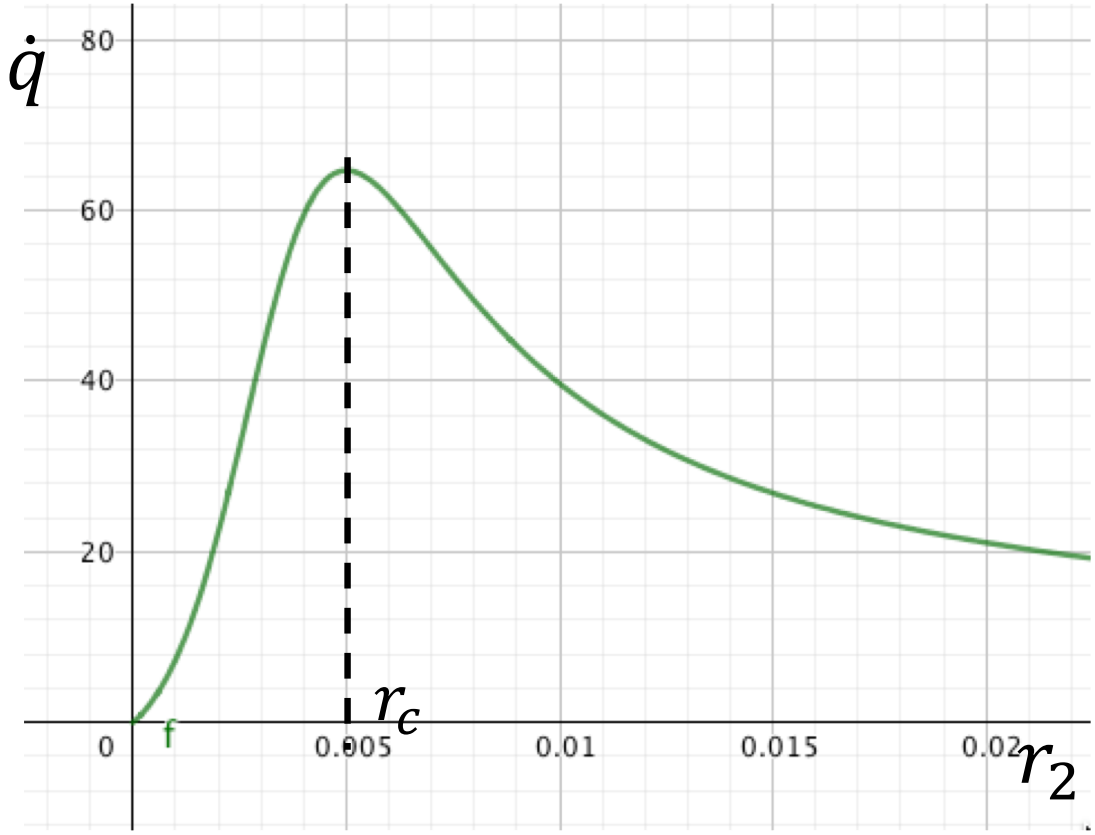
$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{2\pi L k}\left(\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{h r_2}\right)} = \frac{2\pi L k \Delta T}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{h r_2}}$$

Determinação do raio crítico

- Analisando o comportamento dessa expressão em função do raio externo do isolante, r_2, teremos o seguinte gráfico:

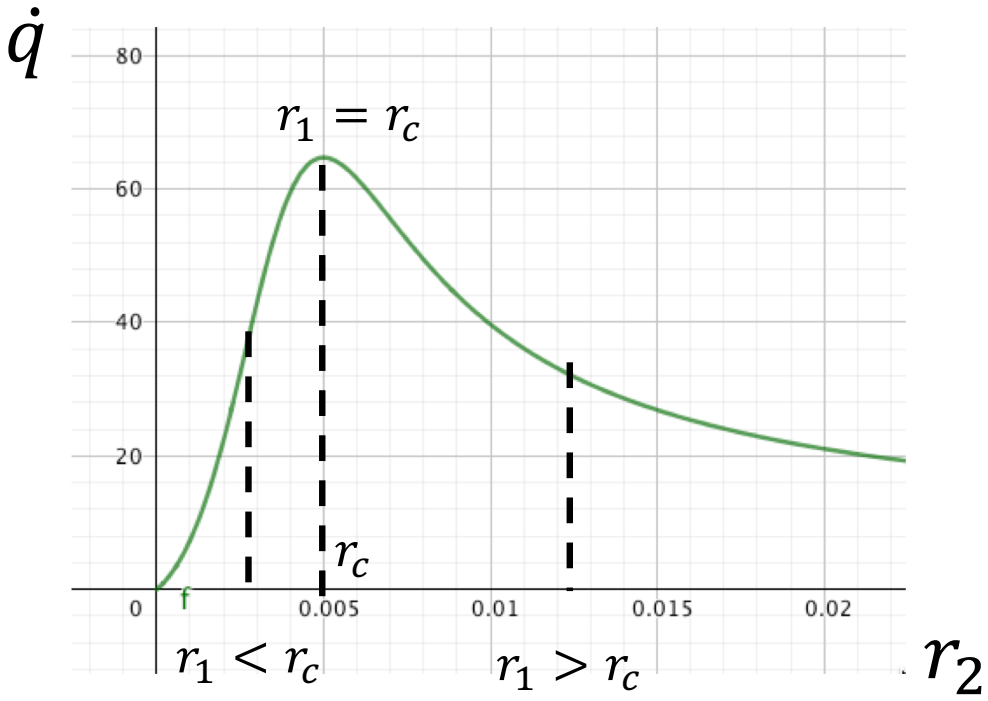
$$\dot{q} = \frac{2\pi L k \Delta T}{\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{h r_2}}$$

É possível verificar que há um raio, chamado raio crítico r_c, para o qual o fluxo de calor é máximo.



Determinação do raio crítico

- Na prática, isso significa que, se o raio interno do isolante, r_1 for menor que r_c e aplicarmos o isolante, estaremos aumentando a transmissão de calor, e não diminuindo.



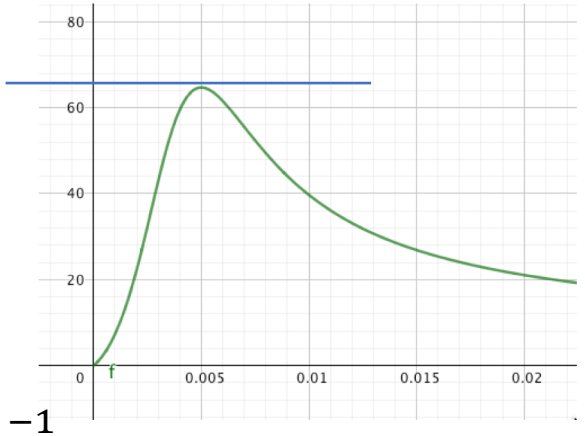
Se desejamos que o isolante transmita o máximo de calor, fazemos com que $r_1 = r_c$. Esse é o caso dos condutores elétricos.

Caso $r_1 = r_c$, o isolante sempre diminuirá a transmissão de calor.

Porém ele deverá ser maior o suficiente para fazer com que o fluxo de calor seja menor do que o tubo sem revestimento

Determinação do raio crítico

- Para calcular o raio crítico, usamos o teorema de Fermat de que no valor crítico (máximo ou mínimo) a derivada da função é igual a zero.



$$\frac{dq}{dr_2} = 0$$

$$\frac{dq}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\frac{2\pi Lk\Delta T}{\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_2}} = 2\pi Lk\Delta T \cdot \frac{d}{dr_2}\left(\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_2}\right)^{-1} =$$

$$= 2\pi Lk\Delta T \cdot (-1)\left(\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_2}\right)^{-2} \cdot \frac{d}{dr_2}\left(\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_2}\right) =$$

$$= -2\pi Lk\Delta T \cdot \left(\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_2}\right)^{-2} \cdot \left[\frac{\mathrm{r}_1}{\mathrm{r}_2} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{k}{hr_2^2}\right] = 0$$

Determinação do raio crítico

- Como o primeiro termo do produto é diferente de zero, já que são apenas constantes, e o segundo não pode ser zero, pois é um denominador, teremos que:

$$\left[\frac{\mathrm{r}_1}{\mathrm{r}_2}\cdot\frac{1}{r_1}-\frac{k}{hr_2^2}\right]=\frac{1}{\mathrm{r}_2}-\frac{k}{hr_2^2}=0$$

$$1-\frac{k}{hr_2}=0\Rightarrow\frac{k}{hr_2}=1\Rightarrow r_2=\frac{k}{h}$$

- Assim, o raio crítico depende apenas do coeficiente de condutividade do material isolante e do coeficiente de película.

$$r_c=\frac{k}{h}$$

Obs.: é possível demonstrar que esse é um ponto de máximo fazendo o teste da segunda derivada.

Exemplo

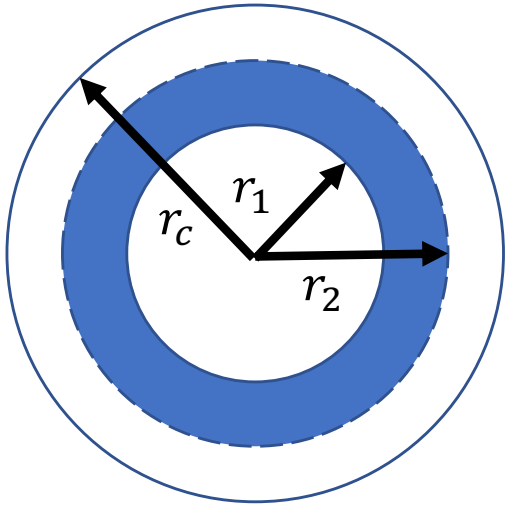
Um tubo de um material isolante com k = 0,208 W/mK, com diâmetro interno de 3,0 cm, igual ao diâmetro externo do tubo, reveste um tubo metálico cuja temperatura externa é de 120°C. A temperatura ambiente é de 20°C e o coeficiente de película é de 8,5 W/m^2K. Considerando um comprimento unitário:

a. Determine o raio crítico desse tubo isolante, e analise o resultado.

b. Plote o gráfico q x r_2 para o sistema

c. Determine a espessura mínima do isolante, a partir da qual passa a diminuir o fluxo de calor.

Resolução



a) Determinação do raio crítico:

$$r_c = \frac{k}{h} = \frac{0{,}208}{8{,}5}$$

$$r_c = 2{,}45 \cdot 10^{-2}\ m = 2{,}45\ cm$$

Análise: o raio crítico é maior do que o raio do tubo, 0,015 cm. Portanto será necessário analisar o gráfico.

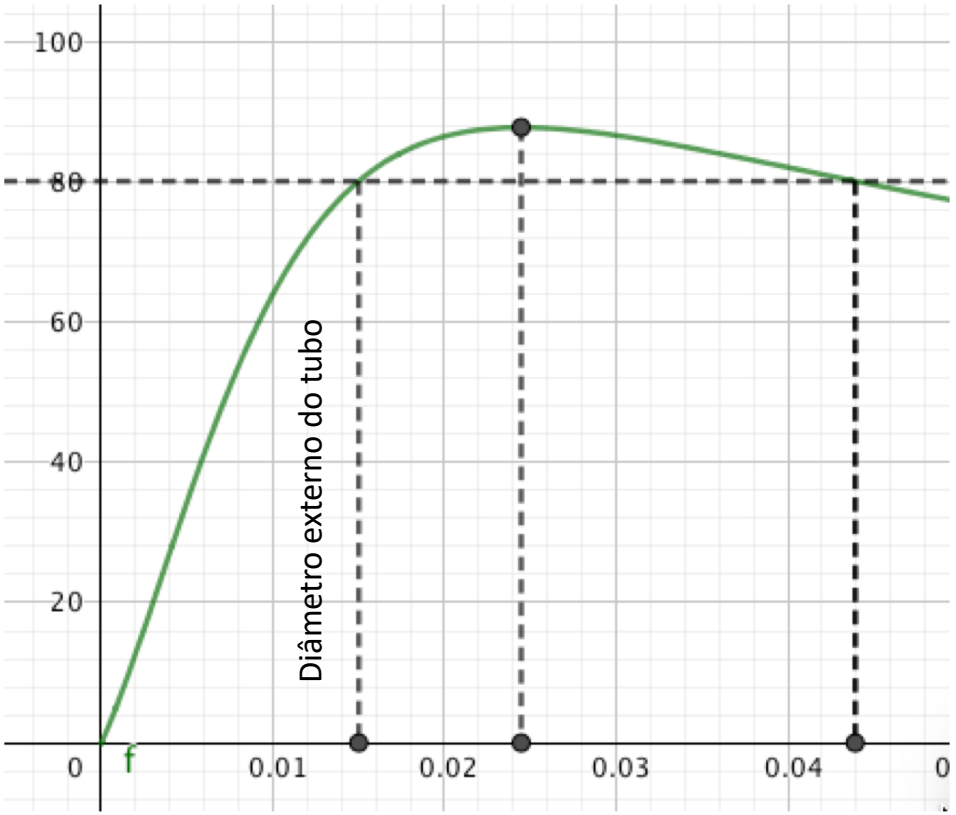
b) Análise do fluxo em função do raio externo do isolante:

$$\dot{q} = \frac{2\pi L k \Delta T}{\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{h r_2}} = \frac{2\pi \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}208 \cdot (120 - 20)}{\ln\frac{r_2}{1{,}5 \cdot 10^{-2}} + \frac{0{,}208}{8{,}5 \cdot r_2}}$$

Resolução

- Plotando essa função, teremos:

r2 (m)	q (W)
0,015	80,1
0,020	86,3
0,025	**87,7**
0,029	86,8
0,034	84,9
0,039	82,6
0,044	**80,2**
0,049	77,8
0,053	75,6



O grafico mostra que o isolante térmico será eficiente apenas a partir de um raio externo de 0,044 m. Ou seja, para que esse tubo seja isolado será necessária uma espessura mínima de 0,044-0,015=0,029 m, ou seja 2,9 cm.

Exemplo

Um cabo elétrico de alumínio com 15 mm de diâmetro deverá ser isolado com borracha (k = 0,156 W/mK). O cabo estará ao ar livre (h = 8,5 W/m^2K) a 20°C. Investigue o efeito da espessura da isolação na dissipação de calor por metro de cabo, admitindo que a temperatura na superfície do cabo é de 65°C.

Resolução

a) Determinação do raio crítico:

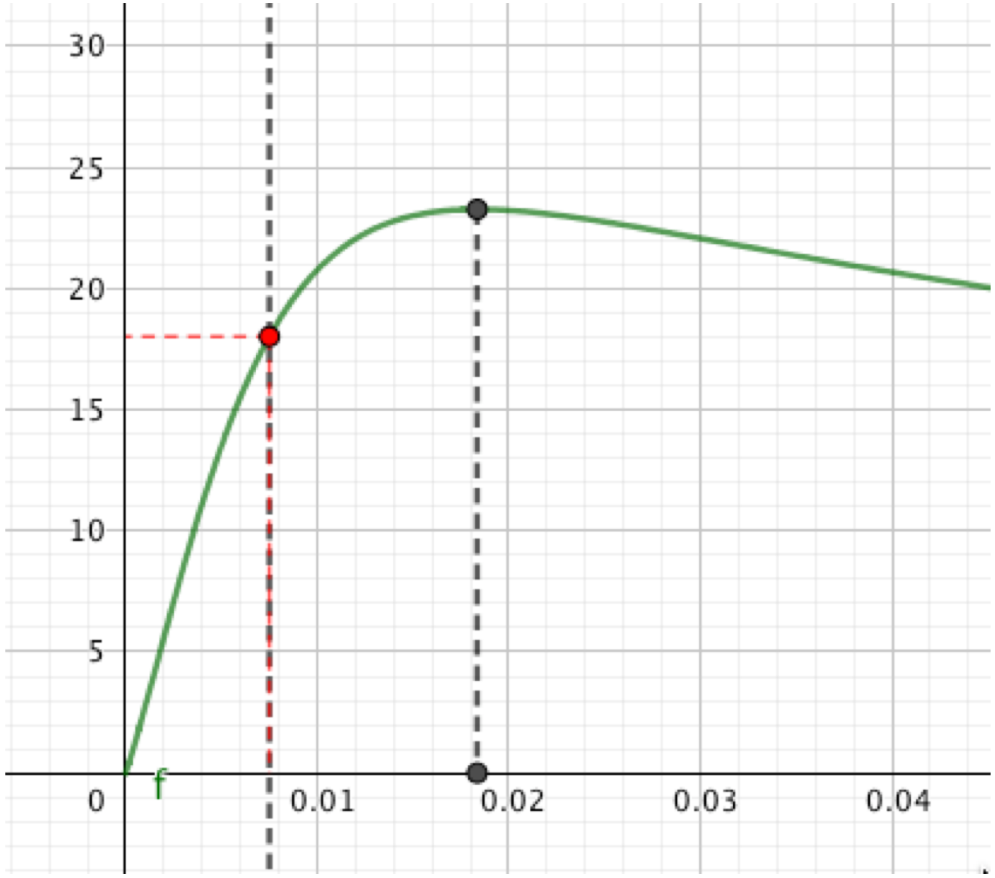
$$r_c = \frac{k}{h} = \frac{0{,}156}{8{,}5} \Rightarrow r_c = 1{,}84 \cdot 10^{-2}\ m = 1{,}84\ cm$$

b) Análise do fluxo em função do raio externo:

$$\dot{q} = \frac{2\pi L k \Delta T}{\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{h r_2}} = \frac{2\pi \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}156 \cdot (65 - 20)}{\ln\frac{r_2}{7{,}5 \cdot 10^{-3}} + \frac{0{,}156}{8{,}5 \cdot r_2}}$$

Resolução

x	y(x)
0.00850	19.3
0.0110	21.5
0.0135	22.7
0.0160	23.2
0.0185	23.3
0.0210	23.2
0.0235	22.9
0.0260	22.6
0.0285	22.3



Observamos que sem o revestimento, o cabo dissipa 18 W por metro. Porém, com um revestimento de 0.0185-0,0075=0,011 cm de espessura, a dissipação seria de 23,3 W, isto é, 30% maior.

Exercício

Um tubo de um material isolante com k = 0,25 W/mK, com diâmetro interno de 1,0 cm, igual ao diâmetro externo do tubo, reveste um tubo metálico cuja temperatura externa é de 200°C. A temperatura ambiente é de 20°C e o coeficiente de película é de 10 W/m^2K. Considerando um comprimento unitário:

a. Determine o raio crítico desse tubo isolante, e analise o resultado.

b. Plote o gráfico q x r_2 para o sistema

c. Determine a espessura mínima do isolante, a partir da qual passa a diminuir o fluxo de calor.