Ondas Mecânicas – Parte II
Descrição Matemática de uma Onda

Prof. Marco Simões

Velocidade de uma onda

- A frequência indica quantas ondas ocorrem em um segundo
- O comprimento de onda indica quando cada onda percorre
- Assim, a velocidade de uma onda será

$$v = \lambda \cdot f$$

Função de onda senoidal

- É possível demonstrar que a posição em y de um ponto qualquer da onda pode ser determinado pela função:

$$y(x,t) = A \cdot \cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

- Ou

$$y(x,t) = A \cdot \cos\left(kx - \omega t\right)$$

Tomando $y(x,t) = A \cdot \cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$

e distribuindo 2π, teremos

$$y(x,t) = A \cdot \cos\left[\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right)\right]$$

Chamando $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (número de onda)

E lembrando que $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, teremos:

$$y(x,t) = A \cdot \cos\left(kx - \omega t\right)$$

Função de onda senoidal

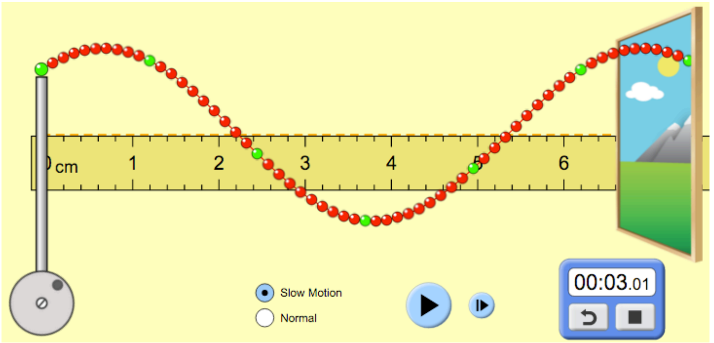
- A função é em relação a duas variáveis: x e t

- Quando fixamos t (por exemplo, t=3s), “congelamos” a onda do instante t=3s e obtemos a posição da onda em função de x.

- Quanto fixamos x (por exemplo, x=2m), “marcamos” essa abcissa e obtemos a posição da onda nessa abcissa em função de t.

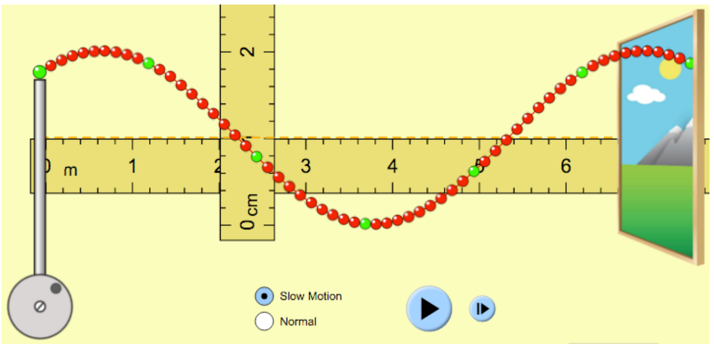
Função de onda senoidal

- Onda ‘congelada’ em t=3



$$y(x,t=3)=A\cdot\cos\left(kx-3\omega\right)$$

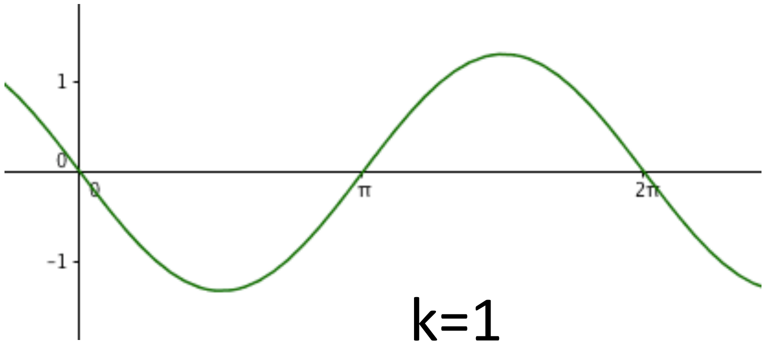
- Onda com x ‘marcado’ em



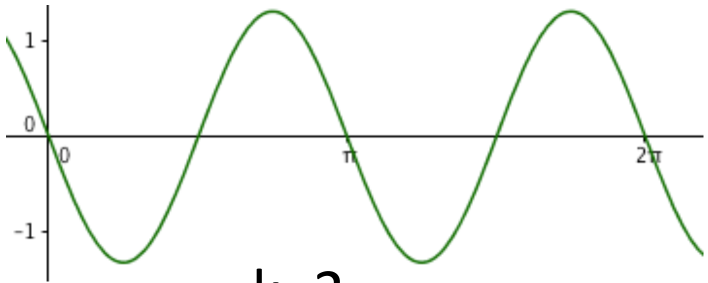
$$y(x=2,t)=A\cdot\cos\left(2k-\omega t\right)$$

Número de onda

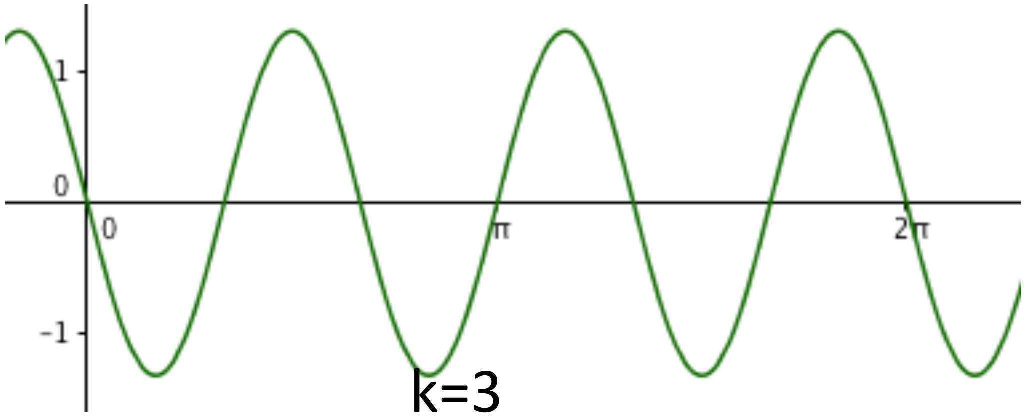
- Número de onda é a quantidade de ondas por unidade de distância, ou seja, o número de vezes que uma onda atinge a mesma fase em uma determinada distância de propagação.



k=1



k=2



k=3

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Número de onda

- Pode também ser expressa por:

$$k = \frac{\omega}{v}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Lembrando que:

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f}$$

Portanto:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\frac{v}{f}} = \frac{2\pi f}{v}$$

Como: $\omega = \lambda f$ podemos também escrever:

$$k = \frac{\omega}{v}$$

Exemplo

ONDA NA CORDA DE UM VARAL Seu primo Tobias está brincando com a corda do seu varal de roupas. Ele desamarra uma das extremidades da corda, mantém a corda esticada e faz essa extremidade oscilar para cima e para baixo senoidalmente com uma amplitude de 0,075 m e uma freqüência igual a 2,0 Hz. A velocidade da onda é $v = 12{,}0$ m/s. No instante $t = 0$ a extremidade possui um deslocamento positivo máximo e está em repouso. Suponha que nenhuma onda seja refletida na extremidade afastada para perturbar a configuração. a) Ache a amplitude, a freqüência angular, o período, o comprimento de onda e o número de onda desta onda. b) Escreva uma função de onda que descreva a onda. c) Escreva equações para o deslocamento em função do tempo na extremidade da corda que Tobias segura e em um ponto situado a 3,0 m dessa extremidade.

Resolução

Dados: $A = 0{,}075\ m$; $f = 2{,}0\ Hz$; $v = 12{,}0\ m/s$

a) $A = 0{,}075\ m$; $\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi\, 2{,}0 \Rightarrow \omega = 13\ rad/s$

$T = \dfrac{1}{f} \Rightarrow T = \dfrac{1}{2{,}0} = 0{,}50\ s$; $v = \lambda . f \Rightarrow \lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{12{,}0}{2{,}0} \Rightarrow \lambda = 6{,}0\ m$

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k = \dfrac{2\pi}{6.0} = 1{,}0\ rad/m$ ou

$k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{13}{12{,}0} = 1{,}0\ rad/m$

b) $y(x,t) = A \cos\left[2\pi\left(\dfrac{x}{\lambda} - \dfrac{t}{T}\right)\right] \Rightarrow y(x.t) = 0{,}075 \times \cos\left[2\pi\left(\dfrac{x}{6{,}0} - 2t\right)\right]$

$y(x,t) = 0.075 \times \cos(1{,}0x - 13t)$

ou $y(x,t) = A \cos(kx - \omega t) \Rightarrow y(x,t) = 0{,}075 \cdot \cos(1{,}0x - 13t)$

Resolução

c) em $x=0 \Rightarrow y(x=0.t) = 0{,}075 \cos(1{,}0 \times 0 - 13t)$

$$y(x=0,t) = 0{,}075 \cos(-13t).$$

$$y(x=0,t) = 0{,}075 \cos(13t)$$

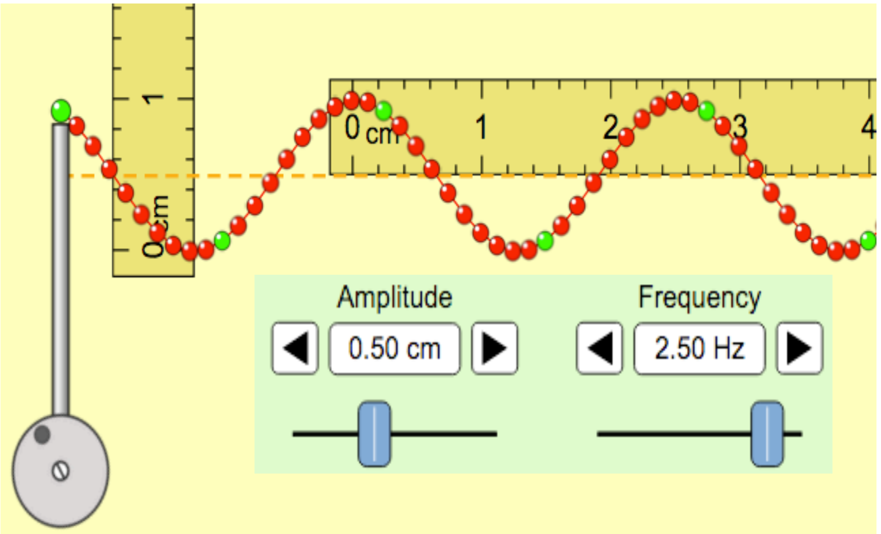
em $x=3{,}0 \Rightarrow y(x=3,t) = 0{,}075 \cos(1{,}0 \times 3{,}0 - 13t).$

$$y(x=3{,}0,t) = 0{,}075 \cos(3{,}0 - 13t)$$

Exercício

- O dispositivo abaixo faz uma corda oscilar 2,5 vezes por segundo com uma amplitude de 0.5 m e comprimento de onda de 2,5 cm. Estabeleça a equação geral da onda, e as equações para x=5,0 cm e t=3,0 s, lembrando que:

$$y(x,t) = A \cdot \cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \quad \text{ou} \quad y(x,t) = A \cdot \cos\left(kx - \omega t\right)$$



Resolução

Dados: $f = 2,5\ Hz$; $A = 0,5\ m$; $\lambda = 2,5\ m$

$T = \frac{1}{2,5} = 0,40\ s$

$y(x,t) = A \cdot \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \Rightarrow y(x.t) = 0,5 \cdot \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{2,5} - \frac{1}{0,40}t\right)\right]$

$y(x,t) = 0,5 \times \cos\left[\frac{2\pi x}{2,5} - \frac{2\pi}{0,40}t\right] \Rightarrow y(x.t) = 0,5 \cdot \cos(2,5x - 16t)$

ou: $y(x,t) = A \cos(kx - wt)$; $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{2,5} = 2,5\ rad/m$

$y(x,t) = 0,5 \cdot \cos(2,5\ x - 16t)$

$w = 2\pi f \Rightarrow w = 2\pi \cdot 2,5 = 16\ rad/s$

p/ $x = 5,0\ cm \Rightarrow y(x{=}0,050, t) = 0,5 \cos(2,5 \times 0,050 - 16t)$

$y(x{=}0.050, t) = 0,5 \cos(0,12 - 16t)$

p/ $t = 3,0\ s \Rightarrow y(x, t{=}3,0) = 0,5 \cdot \cos(2,5x - 48)$

Velocidade

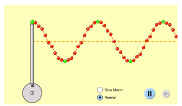
- É possível demonstrar que a velocidade de progação de uma onda mecânica segue a expressão geral:

$$v = \sqrt{\frac{Força\,restauradora}{Inércia\,do\,meio}}$$

- Por exemplo, no caso de uma corda, a velocidade (m/s) será dada por:

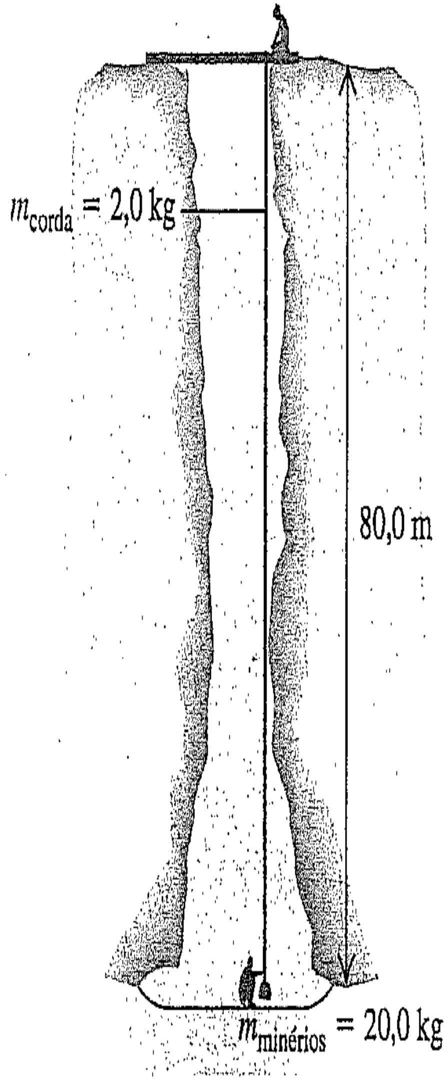
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad [v] = \sqrt{\frac{N}{\frac{kg}{m}}} = \sqrt{\frac{\frac{kg \cdot m}{s^2}}{\frac{kg}{m}}} = \sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m}{kg}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}$$

  - Onde F é a força de tensão da corda (N) e µ sua densidade linear.



Exemplo

CALCULANDO A VELOCIDADE DA ONDA Uma das extremidades de uma corda de náilon está presa a um suporte fixo no topo de um poço vertical de uma mina com profundidade igual a 80,0 m (Figura 15.14). A corda fica esticada pela ação do peso de uma caixa de minérios com massa igual a 20,0 kg presa na extremidade inferior da corda. A massa da corda é igual a 2,0 kg. Um geólogo no fundo da mina, balançando a corda lateralmente, envia um sinal para seu colega que está no topo da mina. a) Qual é a velocidade da onda transversal que se propaga na corda? b) Sabendo que um ponto da corda executa um MHS com freqüência igual a 2,0 Hz, qual é o comprimento de onda da onda?



Resolução

$l = 80\,m \quad ; m_{caixa} = 20{,}0\,kg \quad ; \quad m_{corda} = 2{,}0\,kg$

(a) $F = P = m.g \Rightarrow F = 20{,}0 \times 9{,}81 \Rightarrow F = 196\,N$

$\mu = \dfrac{m}{l} \Rightarrow \mu = \dfrac{2{,}0}{80} \Rightarrow \mu = 2{,}5 \times 10^{-2}\,kg/m$

$v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{196}{2{,}5 \times 10^{-2}}} \Rightarrow v = 88\,m/s$

(b) $v = \lambda . f \Rightarrow \lambda = \dfrac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \dfrac{88}{2{,}0} \Rightarrow \lambda = 44\,m$

Exercício

- Um arame está esticado entre dois mourões, a uma distância de 50 metros. A massa de um metro de arame é 47 g. Ao tocar no arame próximo de um dos mourões você observa que a onda retorna depois de 0,5 segundo. Qual a força de tração que está atuando sobre o arame?

Resolução

$\ell = 50\ m$; $\mu = 47 \times 10^{-3}\ kg/m = 4{,}7 \times 10^{-2}\ kg/m$

$\Delta t = 0{,}50\ s$

$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = \dfrac{2 \times 50}{0{,}5} \Rightarrow v = 200\ m/s$

$v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} \Rightarrow F = \mu \cdot v^2$

$F = 4{,}7 \times 10^{-2} \times 200^2 \Rightarrow F = 1880\ N$

Resumo

- Equação da onda:

$$y(x,t) = A \cdot \cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \quad \text{ou} \quad y(x,t) = A \cdot \cos\left(kx - \omega t\right)$$

- Velocidade da onda: $v = \lambda \cdot f$

- Número de onda: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ ou $k = \dfrac{\omega}{v}$

- Velocidade de uma onda transversal em uma corda: $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$