Análise Dimensional – Prof. Simões

Introdução

A análise dimensional é um assunto fundamental que estuda as grandezas físicas em geral, com respeito às suas dimensões. Como as grandezas físicas sempre estão associadas a dimensões e unidades, podemos dizer o estudo de análise dimensional está presente em todos os ramos da Física e da Engenharia.

Inicialmente, definimos grandeza como uma propriedade de um fenômeno, copo ou substância que pode ser medida e expressa de forma quantitativa. A partir de um número limitado de grandezas físicas fundamentais, podemos criar outras grandezas derivadas, e como utilizar princípios fundamentais de análise dimensional para entender, verificar a exatidão e até prever o formato de fórmulas envolvendo grandezas físicas.

Denominamos grandezas físicas fundamentais um grupo limitado de grandezas que vão nos servir como base para escrevermos outras grandezas. Na Mecânica, por exemplo, definimos as grandezas fundamentais como sendo massa, comprimento e tempo, pois essas são grandezas que não necessitam de outras para serem definidas. As outras grandezas da Mecânica, como velocidade, aceleração etc., serão escritas como uma combinação das grandezas fundamentais, conforme veremos. O Sistema Internacional de Unidades define sete grandezas fundamentais, e associa a cada uma delas uma dimensão, representada por uma letra. As dimensões não são unidades, mas uma forma algébrica de representar as grandezas. Os símbolos das dimensões são padronizados, e são dos seguintes:

Grandeza de Base	Símbolo da dimensão[1]
Massa	M
Comprimento	L
Tempo	T
Corrente elétrica	I
Temperatura termodinâmica	Θ
Quantidade de substância (moles)	N
Intensidade luminosa	J

Os números puros que aparecem nas fórmulas, assim como π, e, arcos, seno, cossenos, tangente, são adimensionais. Também são adimensionais certas grandezas físicas como: coeficiente de atrito, índice de refração, rendimento, número de Reynolds, entre outras. Nas fórmulas dimensionais, que veremos adiante, elas aparecem como iguais a “1”.

[1] Inmetro, 2013

Para indicar que nos referimos à dimensão de uma grandeza, colocamos essa grandeza entre colchetes. Veja esses exemplos:

$m \Rightarrow massa$
$[m] \Rightarrow dimensão\ da\ massa = M$

$\Delta x \Rightarrow deslocamento$
$[\Delta x] \Rightarrow dimensão\ do\ deslocamento = L$

$T \Rightarrow Tempo\ que\ um\ pêndulo\ leva\ para\ completar\ uma\ oscilação\ completa\ (período)$
$[T] \Rightarrow dimensão\ do\ período = T$

Fórmula Dimensional

Todas as grandezas físicas além das fundamentais podem ser expressas matematicamente em função das grandezas físicas fundamentais através de uma fórmula dimensional.

Na Física Mecânica, por exemplo, uma grandeza mecânica qualquer X, que depende da massa, do comprimento e do tempo, tem sua fórmula dimensional escrita da seguinte forma:

$$[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{M^a \cdot L^b \cdot T^c}$$

onde a, b, c são as potências das dimensões das grandezas. Colocamos a grandeza em questão entre parênteses para indicar que essa é uma equação dimensional, e não a fórmula da grandeza.

Exemplo 1: Determine a fórmula dimensional da velocidade escalar v de um corpo.

Solução: Para definirmos a fórmula dimensional de v, devemos fazer:

$$[v] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} \Rightarrow [v] = \frac{L}{T} \Rightarrow [v] = L^1 \cdot T^{-1}\ \ ou\ [v] = M^0 L^1 T^{-1}$$

Soma e subtração de dimensões

Só podemos somar grandezas de mesma dimensão, ou seja L + L, M + M, e T + T, e assim por diante. A resultado da soma será a mesma dimensão. Por exemplo, seja a fórmula para calcular a distância D composta por três trechos A, B e C:

$$D = A + B + C$$

A fórmula dimensional será:

$$[D] = [A] + [B] + [C] \Rightarrow [D] = L + L + L \Rightarrow [D] = L$$

Por que não escrevemos 3L? Porque não estamos lidando com os comprimentos em si, mas com a dimensão dos comprimentos. A soma de três comprimentos resulta também em um comprimento. Assim, na análise dimensional, teremos que:

$$L + L = L$$

$$T + T = T$$

$$M + M = M$$

Produto e quociente de dimensões

Quanto fazemos o produto ou quociente de duas grandezas físicas, a unidade dimensional resultante é, igualmente, o produto ou quociente, respectivamente. Por exemplo, ao determinar a dimensão da área de um trapézio, fazemos:

$$A_T = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

$$[A_T] = \frac{L+L}{1} \cdot L \Rightarrow [A_T] = L \cdot L \Rightarrow [A_T] = L^2$$

Tabelas de dimensões

É possível encontrar na literatura e em sites especializados tabelas de dimensões já calculadas que podem ser úteis para estudo. Segue um exemplo:

Grandeza	Dimensão
Velocidade	LT^{-1}
Aceleração	LT^{-2}
Força	MLT^{-2}
Trabalho	ML^2T^{-2}
Energia	ML^2T^{-2}
Torque	ML^2T^{-2}
Potência	ML^2T^{-3}
Pressão	$ML^{-1}T^{-2}$
Massa específica	ML^{-3}
Peso específico	$ML^{-2}T^{-2}$
Frequência	T^{-1}

Exercícios de aplicação

Utilizando-se dos símbolos dimensionais das grandezas fundamentais do S.I., determine as fórmulas dimensionais das equações abaixo. Confira com a tabela quando possível:

a) Perímetro da circunferência: $P = \pi \cdot d$

....

....

....

....

b) Área do círculo: $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

....

....

....

....

$c)$ Aceleração linear: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

....
....
....
....

$d)$ Energia cinética: $E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}$

....
....
....
....

$e)$ Força: $F = m \cdot a$

....
....
....
....

$f)$ Trabalho: $\tau = F \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha$

....
....
....
....

$g)$ Constante elástica da mola: $k = \frac{F}{\Delta x}$

....
....
....
....

$h)$ Pressão: $P = \frac{F}{A}$

....
....
....
....

Homogeneidade dimensional

Segundo o princípio estabelecido pelo físico e matemático Jean-Baptiste Fourier (1768-1830), uma equação é considerada consistente do ponto de vista de análise dimensional quando somamos ou subtraímos as mesmas grandezas, e quando o resultado tem a mesma grandeza do que estamos calculando.

Exemplo 2: Verifique se há homogeneidade na equação definida da energia potencial gravitacional. Utilize a tabela ou as dimensões calculadas anteriormente:

$$E_g = m \cdot g \cdot h$$

Solução: Comparamos a fórmula dimensional do primeiro membro com a do segundo:

1º termo → $[E_g] = M \cdot L^2 . T^{-2}$
2º termo → $[m \cdot g \cdot h] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$

A fórmula dimensional de ambos os termos é igual, de modo que a equação analisada é dimensionalmente homogênea.

A homogeneidade dimensional de uma equação é critério de verificação de sua validade, ou seja, é uma das condições necessárias para que uma equação seja correta.

Exercícios de Aplicação

Verifique se há homogeneidade nas equações abaixo:

$a)\ x_2 = x_1 + v \cdot \Delta t$

....
....
....
....

$b)\ F = m \cdot \mathrm{a}$

....
....
....
....

$c)\ E = m \cdot \mathrm{c}^2$

....
....
....
....

$d)\ x_2 = x_1 + v_1 \Delta t + \dfrac{a \Delta t^2}{2}$

....
....
....
....

$e)\ v_2^2 = v_1^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x$

....
....
....
....

$f)\ v_2 = v_1 + a \cdot \Delta t$

....
....
....
....

Unidade de constantes

Com a homogeneidade dimensional, é possível determinar (ou estabelecer) também a dimensão de algumas constantes físicas. Por exemplo, determinar a dimensão da constante gravitacional G na lei da atração entre os corpos, de Newton:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$$

$[F] = \mathrm{MLT}^{-2}$
$[M] = M$
$[m] = M$
$[d] = L$

$$M^1 L^1 T^{-2} = M^x L^y T^z . \frac{M \cdot M}{L^2} \Rightarrow M^1 L^1 T^{-2} = M^{x+2} L^{y-2} T^z$$

Assim

$$x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$$
$$y - 2 = 1 \Rightarrow y = 3$$
$$z = -2$$

$$[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$$

De fato, seu valor com unidades do SI é $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

Teorema de Bridgman

Com esse teorema, é possível determinar qual a fórmula que rege um fenômeno a partir das variáveis que o afetam. Ele diz que se for constatado experimentalmente que uma determinada grandeza física X depende das grandezas A, B, C, etc, independentes entre si, então a grandeza X pode ser expressa da seguinte forma:

$$X = K \cdot A^a \cdot B^b \cdot C^c \ldots.$$

onde K é um fator numérico, cujo valor é determinado mediante experiências.

Exemplo 3: Numa experiência, verifica-se que o período T de oscilação de um sistema massa-mola depende somente da massa m do corpo e da constante elástica k_{el} da mola. Então, pelo Teorema de Bridgman:

$$X = K \cdot A^a \cdot B^b \cdot C^c \ldots. \Rightarrow T = K \cdot m^a \cdot k_{el}^b$$

Deseja-se calcular o valor de a e b. Para isso, aplica-se a homogeneidade dimensional na fórmula obtida pelo Teorema de Bridgman. Como T é o período de oscilação, trata-se de tempo. Portanto:

$[T] = T, ou\ [T] = M^0 L^0 T^1$

Do outro lado da igualdade temos que:

$[m] = M$

A constante elástica vem da Lei de Hooke, $k_{el} = \frac{F}{\Delta x}$. Assim:

$$[k_{el}] = \frac{\left(M \cdot \frac{L}{T^2}\right)}{L}$$

Portanto:

$$\left[K \cdot m^a \cdot k_{el}^b\right] = 1 \cdot M^{\,a} \cdot \left[\frac{\left(M \cdot \frac{L}{T^2}\right)}{L}\right]^b = M^a \cdot \left[M \cdot \frac{L}{T^2} \cdot \frac{1}{L}\right]^b = M^a \cdot M^b \cdot T^{-2b}$$

$$\left[K \cdot m^a \cdot k_{el}^b\right] = M^{a+b} \cdot T^{-2b}$$

Como os dois lados devem ser iguais, faremos:

$$M^0 \cdot L^0 \cdot T^1 = M^{a+b} \cdot L^0 \cdot T^{-2b}$$

Igualando os expoentes, podemos determinar a e b:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2b = 1 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, temos que:

$$b = -\frac{1}{2} \ e \ a = \frac{1}{2}$$

Substituindo em $T = K \cdot m^a \cdot k_{el}^b$, teremos:

$$T = K \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot K_{el}^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow T = K \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{el}}}$$

Com as experiências, verifica-se que $K = 2\pi$. Assim, a fórmula final fica:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{el}}}$$

Com isso, determinamos a fórmula do período de oscilação do sistema massa-mola utilizando o Teorema de Bridgman, na Análise Dimensional.

Exercícios de Aplicação

1. A força centrípeta F_{cp} depende da massa m da velocidade escalar v do objeto e do raio r da órbita do movimento. Determinar a equação da força centrípeta.

....
....
....
....
....
....

2. Determine os valores de x, y e z para que a equação: (força)^x (massa)^y = (volume) (energia)^z seja dimensionalmente correta.

....
....
....
....
....
....

3. Na equação dimensional homogênea $x = a \cdot t^2 - b \cdot t^3$, em que x tem a dimensão de comprimento L e t tem T, as dimensões a e b são, respectivamente iguais a?

....
....

....
....
....
....

Exercícios Propostos

1. O quociente da unidade de força dividida pela unidade de velocidade pode ser utilizado para medir:

a) potência
b) trabalho
c) vazão volumétrica de gás
d) vazão volumétrica de líquidos
e) vazão de massas

2. A intensidade F da força que age em uma partícula é dada em função do tempo t conforme a expressão $F = A + Bt$ onde A e B são parâmetros constantes e não nulos. Adotando como fundamentais as grandezas massa M comprimento L e tempo T, obtenha as equações dimensionais dos parâmetros A e B.

3. Na expressão $F = Ax^2$, F representa força e *x* um comprimento. Se MLT^{-2} é a fórmula dimensional da força, a fórmula dimensional de A é igual a?
a) $ML^{-1}T^{-2}$
b) $ML^{3}T^{-2}$
c) L^{2}
d) MT^{-2}
e) M

4. Um físico apresentou uma teoria reformulando alguns conceitos nas leis de Mecânica Newtoniana. Um jornal, pretendendo reproduzir essa teoria, apresentou como expressão da intensidade da força gravitacional F entre duas partículas de massas m_1 e m_2, separadas por uma distância r, a relação:

$$F = \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot (1 + v^2 + r \cdot a)$$

onde v é a intensidade da velocidade relativa e a é a intensidade da aceleração relativa entre os corpos. A respeito desta expressão assinale a opção correta:
a) A expressão pode estar correta apenas quando $v = 0$ e $a = 0$.
b) A expressão é dimensionalmente correta.
c) A expressão é dimensionalmente absurda, pois só podemos somar parcelas que tenham a mesma equação dimensional, além disso, mesmo no caso em que $v = 0$ e $a = 0$, o segundo membro não tem equação dimensional de força.
d) A expressão estaria dimensionalmente correta se o conteúdo dos parênteses fosse:

$$1 + \frac{v^2}{r \cdot a}$$

e) A expressão está correta.

5. Um estudante de física resolvendo certo problema chegou à expressão final:

$$F = 2 \cdot (m_1 + m_2) \cdot v \cdot t^2$$

onde F representa uma força, m_1 e m_2 representam massas, v é uma velocidade linear, t é tempo. Outro estudante resolvendo o mesmo problema chegou à expressão:

$$F = 2 \cdot (m_1 + m_2) \cdot \frac{v}{t}$$

Mesmo sem conhecer os detalhes do problema você deve ser capaz de verificar qual das respostas acima obviamente deve estar errada. Explique qual delas é certamente errada.

6. Na expressão seguinte, x representa uma distância, v uma velocidade, a uma aceleração, e k representa uma constante adimensional. Qual deve ser o valor do expoente n para que a expressão seja fisicamente correta?

$$x = k \cdot \frac{v^n}{a}$$

7. Na análise de determinados movimentos, é bastante razoável supor que a força de atrito seja proporcional ao quadrado da velocidade da partícula que se move, isto é $F_{at} = K \cdot v^2$. A unidade da constante de proporcionalidade K no S. I. é:

$a)\ \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

$b)\ \frac{kg \cdot s^2}{m^2}$

$c)\ \frac{kg \cdot m}{s}$

$d)\ \frac{kg}{m}$

$e)\ \frac{kg}{s}$

8. Num movimento oscilatório, a abscissa x da partícula é dada em função do tempo t por $x = A + B\ cos\ (Ct)$, onde A, B e C são parâmetros constantes não nulos. Adotando como fundamentais as dimensões M (massa), L (comprimento) e T (tempo), obtenha as fórmulas dimensionais de A, B e C.