UC Análise de Fenômenos Físicos da Natureza

Significado do cálculo da derivada de uma função e regras básicas de derivação

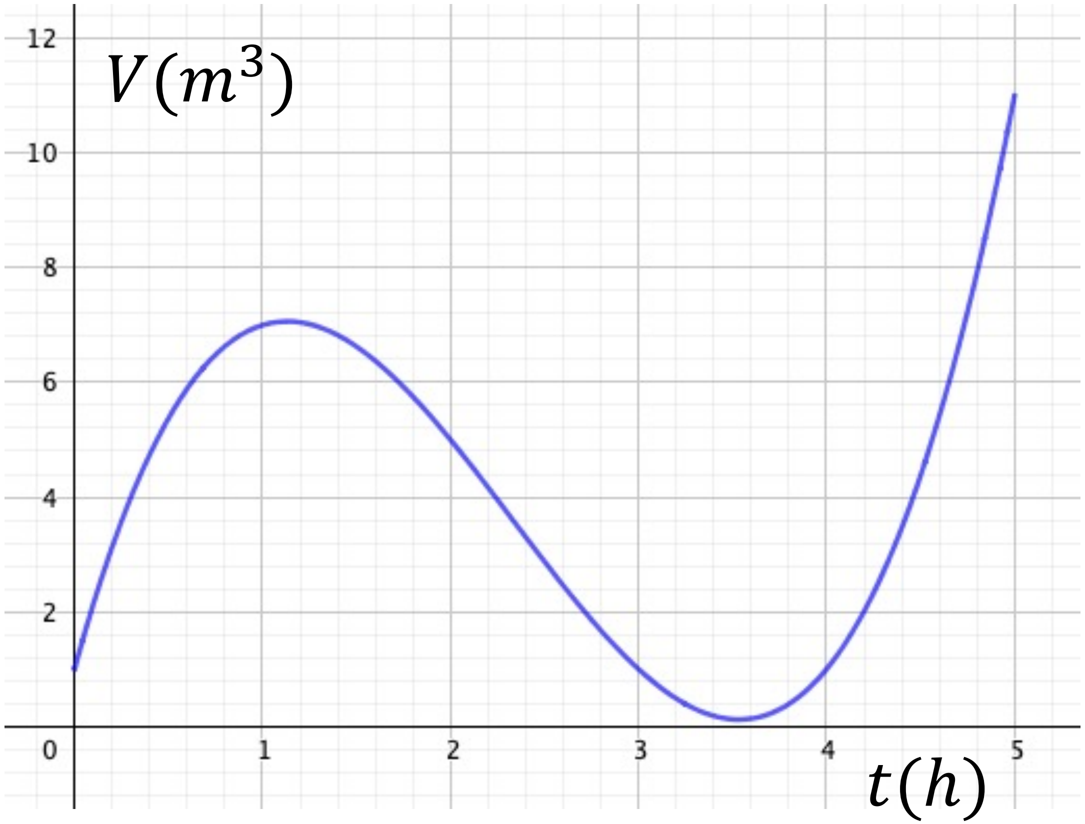
Prof. Simões

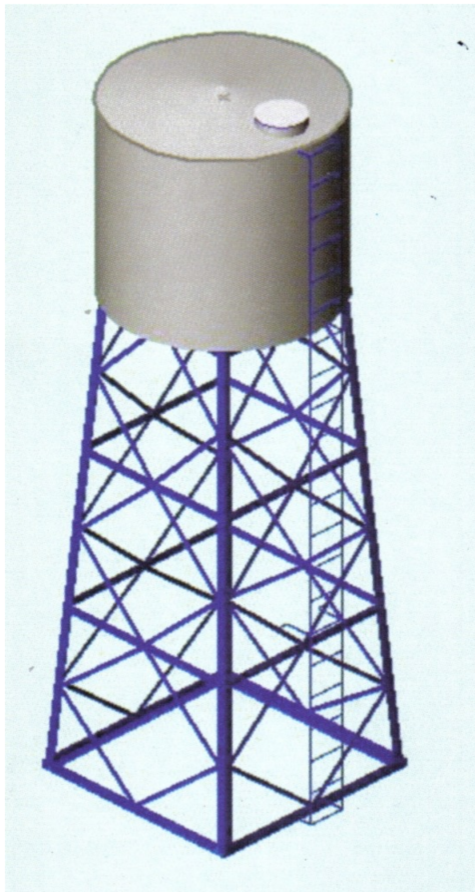
Ao final dessa aula você deverá

- Entender matematicamente o MRU e o significado geométrico da velocidade
- Identificar funções que descrevem movimentos não uniformes
- Analisar graficamente essas funções e o significado geométrico da velocidade média e instantânea
- Obter a velocidade instantânea por aproximações
- Aplicar essas aproximações ao conceito de limite
- Usar o conceito de limite para compreender o significado da derivada
- Aprender as regras básicas de derivação
- Aplicar essas regras na resolução de problemas

Problema típico

- Um reservatório é alimentado e ao mesmo tempo seu fluido é consumido em um processo entre 0h00 e 5h00. O **volume** do reservatório, em m³, é dado pela função $V(t) = t^3 - 7t^2 + 12t + 1$. Calcule a **vazão** em m³/h do reservatório às 2h00 e às 4h30. Indique se o fluxo maior é de alimentação ou de consumo.





Analisando matematicamente o MRU

- Para compreender o conceito de derivada, utilizaremos o estudo do movimento dos corpos.

- No MRU, a posição de um corpo pode ser conhecida em função do tempo por uma função do tipo:

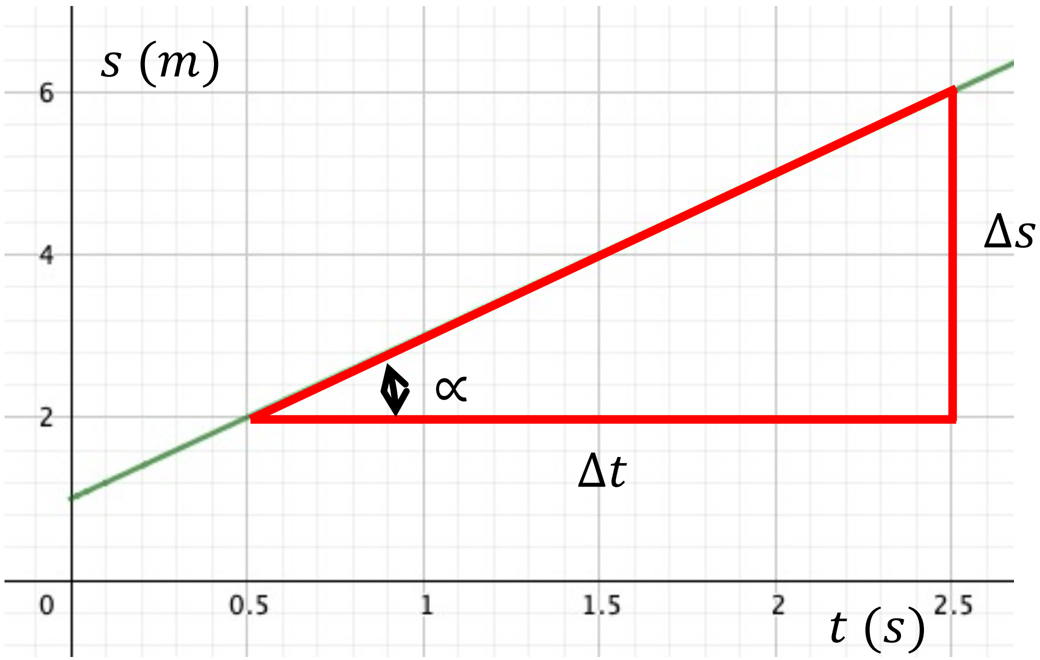
$$s(t) = s_0 + v \cdot \Delta t$$

- Por exemplo, se a posição inicial s_0 de um corpo for 1,0 m, e sua velocidade for 2,0 m/s, sua função será:

$$s(t) = 1{,}0 + 2{,}0 \cdot \Delta t$$

Analisando matematicamente o MRU

- Analisando graficamente essa função, teremos:



Para calcular a velocidade a partir dos dados do gráfico, faríamos:

$$v_m = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \frac{6{,}0 - 2{,}0}{2{,}5 - 0{,}5}$$

$$= 2{,}0\ m/s$$

- Observe que isso corresponde a:

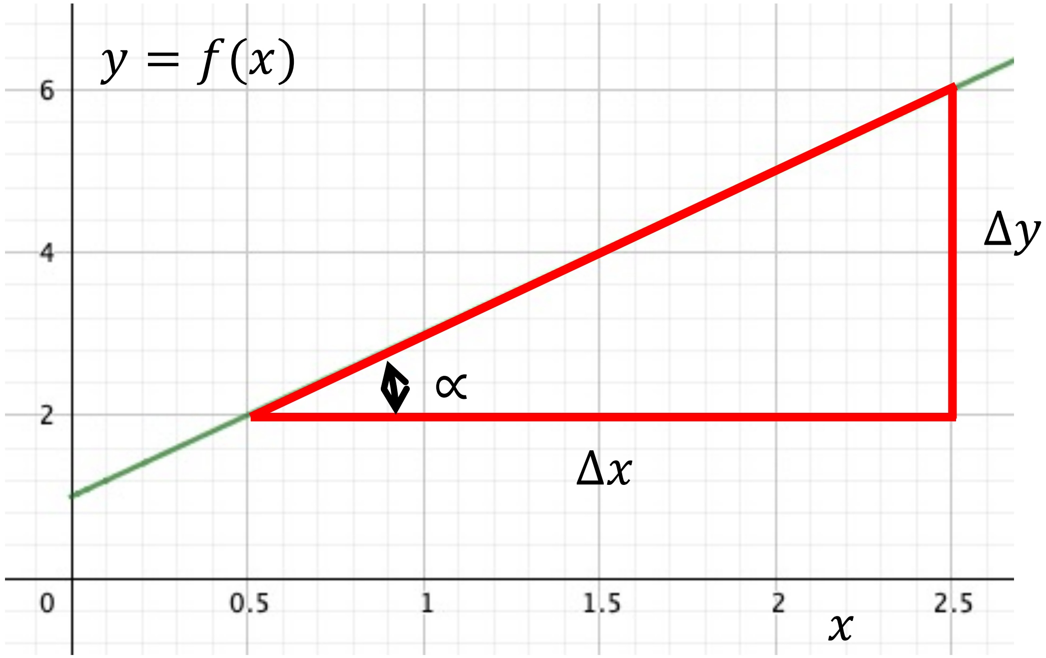
$$\tan \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Analisando matematicamente o MRU

- Generalizando a análise anterior, a função $s(t) = s_0 + v \cdot \Delta t$, corresponde à equação de primeiro grau:

$$f(x) = m \cdot x + b$$

$m \Rightarrow$ coeficiente angular



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

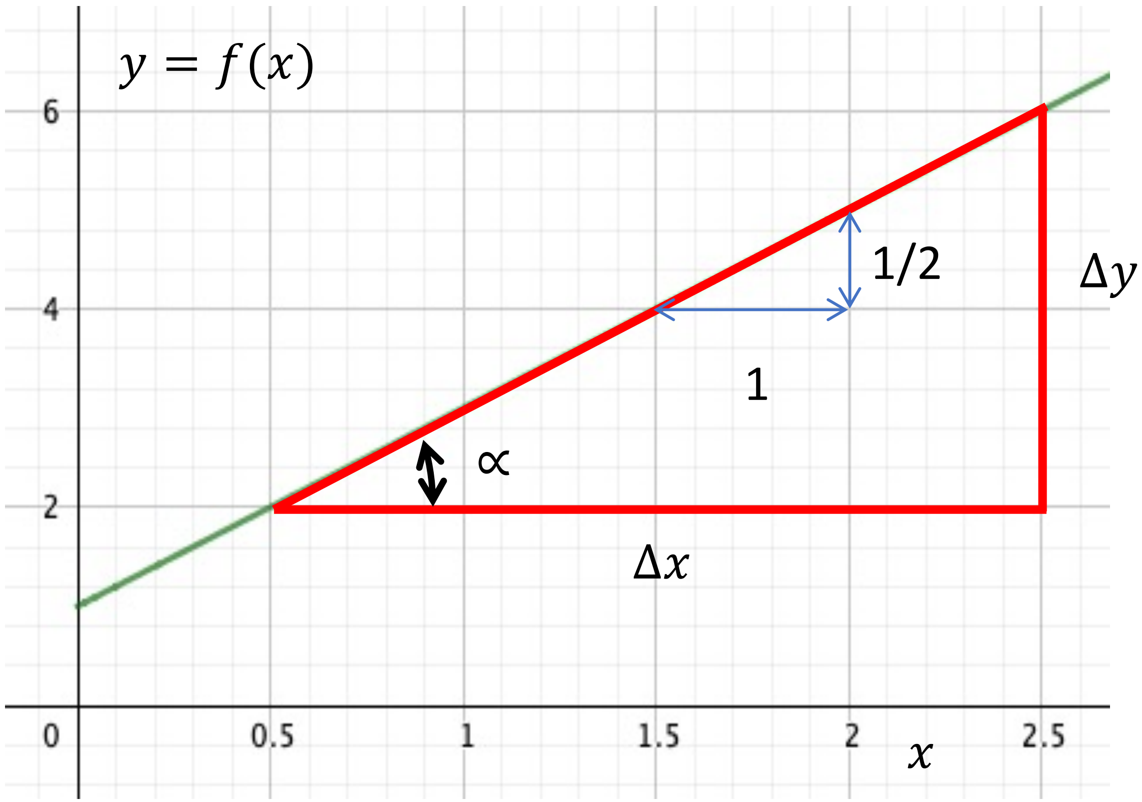
Assim, a velocidade corresponde ao coeficiente angular (ou inclinação) da reta.

Dizemos que ele é a **taxa de variação** da função.

Taxa de variação: quantas unidades a função $f(x)$ varia para cada unidade de variação em x.

Analisando matematicamente o MRU

- No MRU, essa taxa de variação não muda.
- É possível observar pelo gráfico que a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ será sempre a mesma. Portanto:



$$v_m = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

No exemplo:

$$v = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\frac{m}{s}$$

Movimentos variados

- Isso pode não acontecer em outros movimentos. Por exemplo, digamos que um corpo se movimenta de acordo com a função:

$$s(t) = 2t^2 + t$$

- Qual a posição do corpo nos instantes $t = 0$ s, $t = 1{,}0\ s, t = 3{,}0\ s$ e $t = 4{,}0\ s$?

$$s(0) = 2 \cdot 0^2 + 0 \Rightarrow s(0) = 0\ m\ (origem)$$

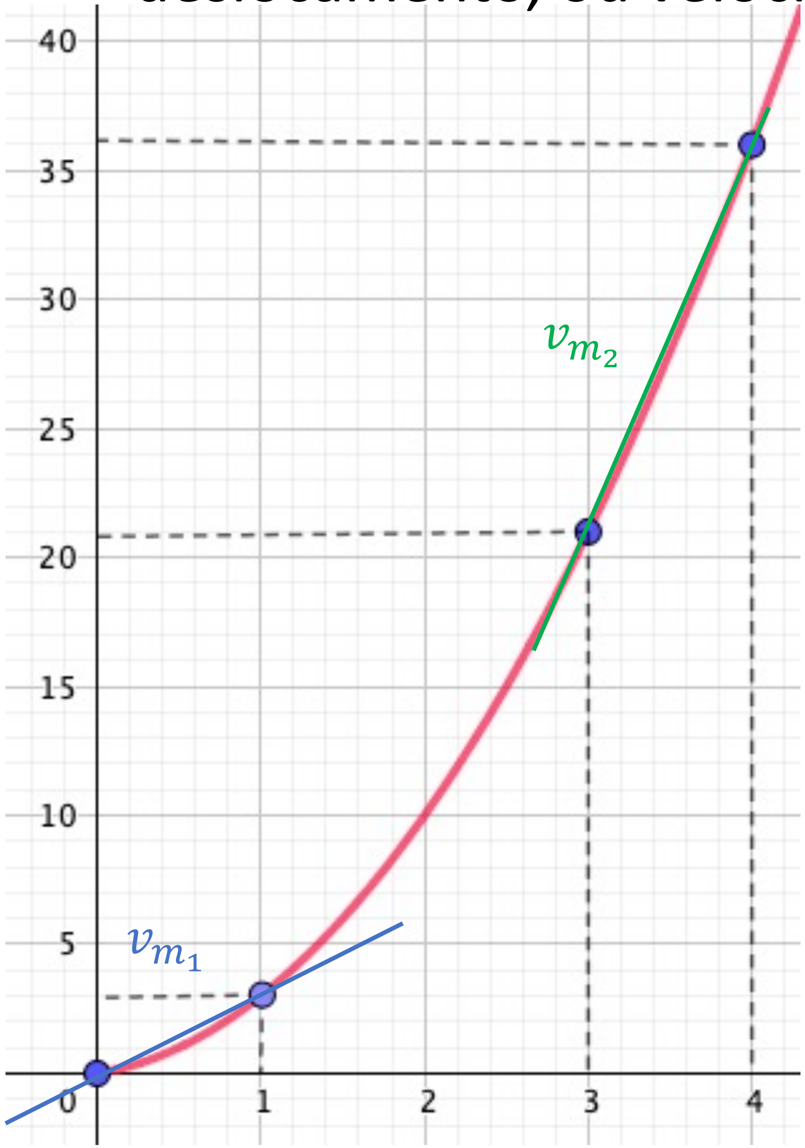
$$s(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \Rightarrow s(1) = 3\ m$$

$$s(3) = 2 \cdot 3^2 + 3 \Rightarrow s(3) = 21\ m$$

$$s(4) = 2 \cdot 4^2 + 4 \Rightarrow s(4) = 36\ m$$

Movimentos variados

- A análise gráfica desse movimento, mostra que a taxa de deslocamento, ou velocidade, desse corpo não é constante:



Velocidade entre 0 s e 1,0 s:

$$v_{m_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3-0}{1-0} = 3{,}0\ \frac{m}{s}$$

Velocidade entre 3,0 s e 4,0 s:

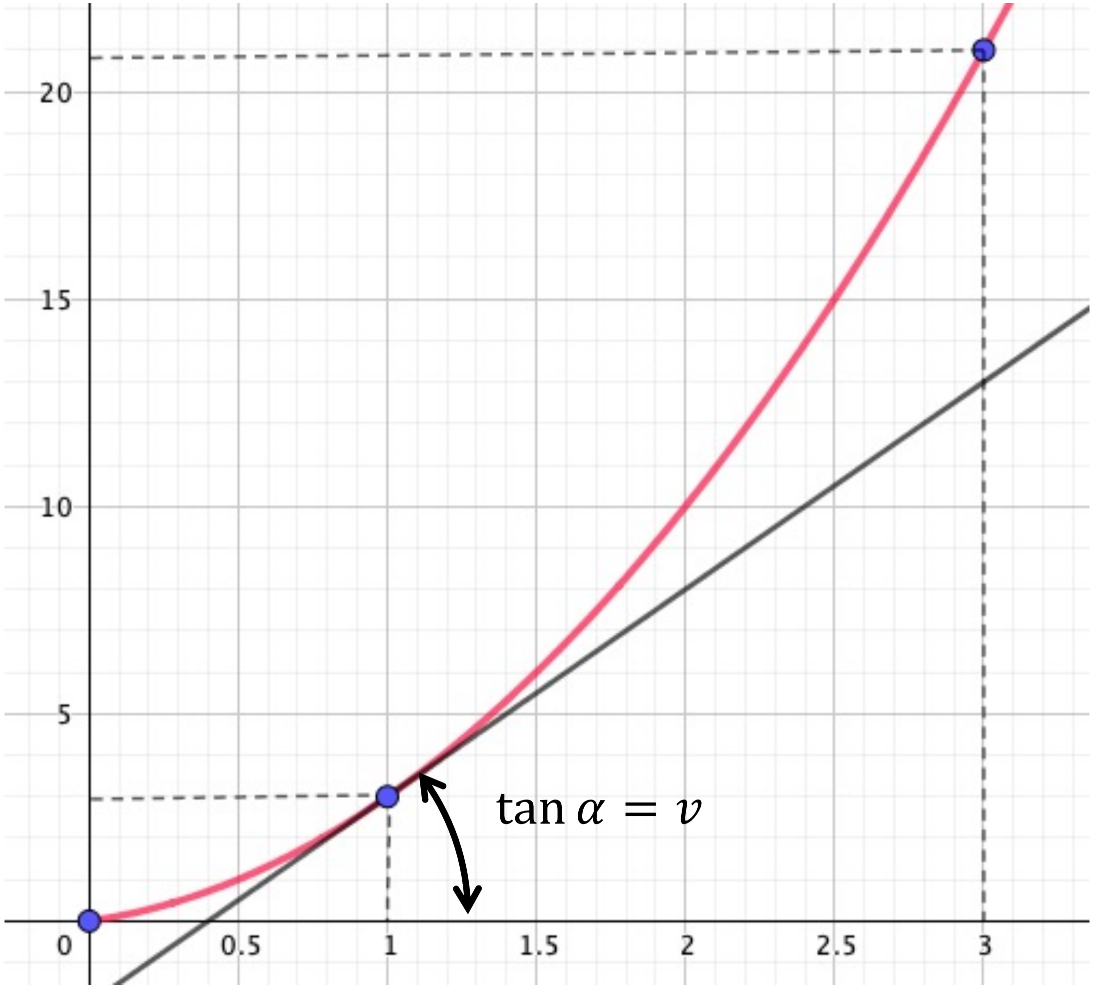
$$v_{m_2} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36-21}{4-3} = 15\ \frac{m}{s}$$

Correspondentemente, inclinação das retas é diferente:

$$\tan \alpha_2 > \tan \alpha_1$$

Derivada de uma função

- O problema que a derivada resolve é: como calcular a velocidade instantânea em um certo instante, por exemplo, para $t = 1{,}0\ s$?



Antes, como vimos, é possível intuir que essa velocidade instantânea procurada corresponde à inclinação da reta tangente ao ponto desejado.

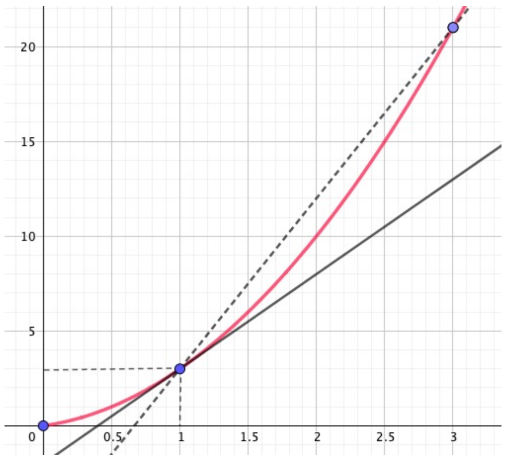
Nesse caso, porém, não podemos fazer:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{0} = \nexists$$

Derivada de uma função

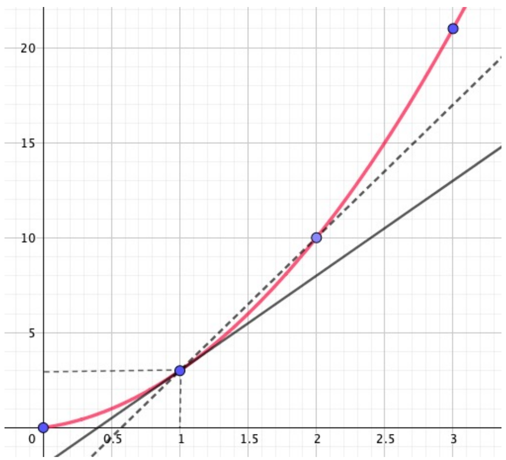
- Uma solução, é fazer o cálculo por aproximações sucessivas, com um Δt cada vez menor.
- Observe que ao passo que calculamos a velocidade média em um intervalo mais próximo de $t = 1{,}0\ s$, sua inclinação fica próxima da que desejamos:

Primeira aproximação:



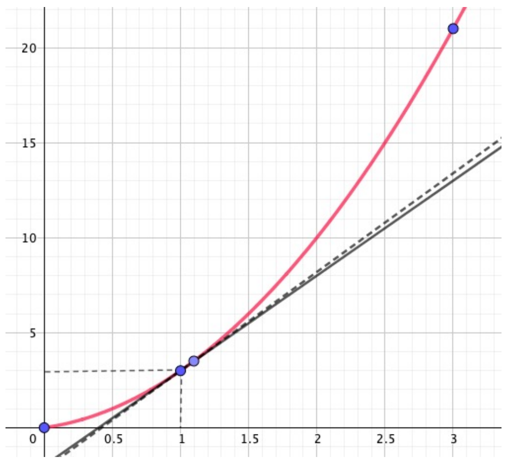
$\Delta t = 2{,}0\ s$

Segunda aproximação:



$\Delta t = 1{,}0\ s$

Terceira aproximação:



$\Delta t = 0{,}1\ s$

Derivada de uma função

- Para calcular a velocidade média em cada caso faremos:
- Primeira aproximação $\Delta t = 3{,}0 - 1{,}0 = 2{,}0\ s$

$s(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \Rightarrow s(1) = 3\ m$

$s(3) = 2 \cdot 3^2 + 3 \Rightarrow s(3) = 21\ m$

$$v_m = \frac{21 - 3{,}0}{2{,}0} = \mathbf{9,0}\ \frac{m}{s}$$

- Segunda aproximação $\Delta t = 2{,}0 - 1{,}0 = 1{,}0\ s$

$s(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 \Rightarrow s(2) = 10\ m$

$$v_m = \frac{10 - 3{,}0}{1{,}0} = \mathbf{7,0}\ \frac{m}{s}$$

- Terceira aproximação $\Delta t = 1{,}1 - 1{,}0 = 0{,}1\ s$

$s(1{,}1) = 2 \cdot 1{,}1^2 + 1{,}1 \Rightarrow s(1{,}1) = 3,52\ m$

$$v_m = \frac{3{,}52 - 3{,}0}{0{,}1} = \mathbf{5,2}\ \frac{m}{s}$$

Derivada de uma função

- Prosseguindo com o auxílio de uma planilha, verificamos que com um intervalo de tempo cada vez menor, a velocidade para $t = 1{,}0\ s$ se aproxima progressivamente de $5{,}0\ m/s$. Como demonstrar que para $\Delta t = 0\ s$ ela será exatamente $5{,}0\ m/s$?

$s_1\ (m)$	$t_2\ (s)$	$s_2\ (m)$	$\Delta s\ (m)$	$\boldsymbol{\Delta t\ (s)}$	**v_m (m/s)**
3,0	3	21	18	**2**	**9**
3,0	2	10	7	**1**	**7**
3,0	1,1	3,52	0,52	**0,1**	**5,2**
3,0	1,01	3,0502	0,0502	**0,01**	**5,02**
3,0	1,001	3,005002	0,005002	**0,001**	**5,002**
3,0	1,0001	3,00050002	0,00050002	**0,0001**	**5,0002**
3,0	1,00001	3,0000500002	0,0000500002	**0,00001**	**5,00002**

Derivada de uma função

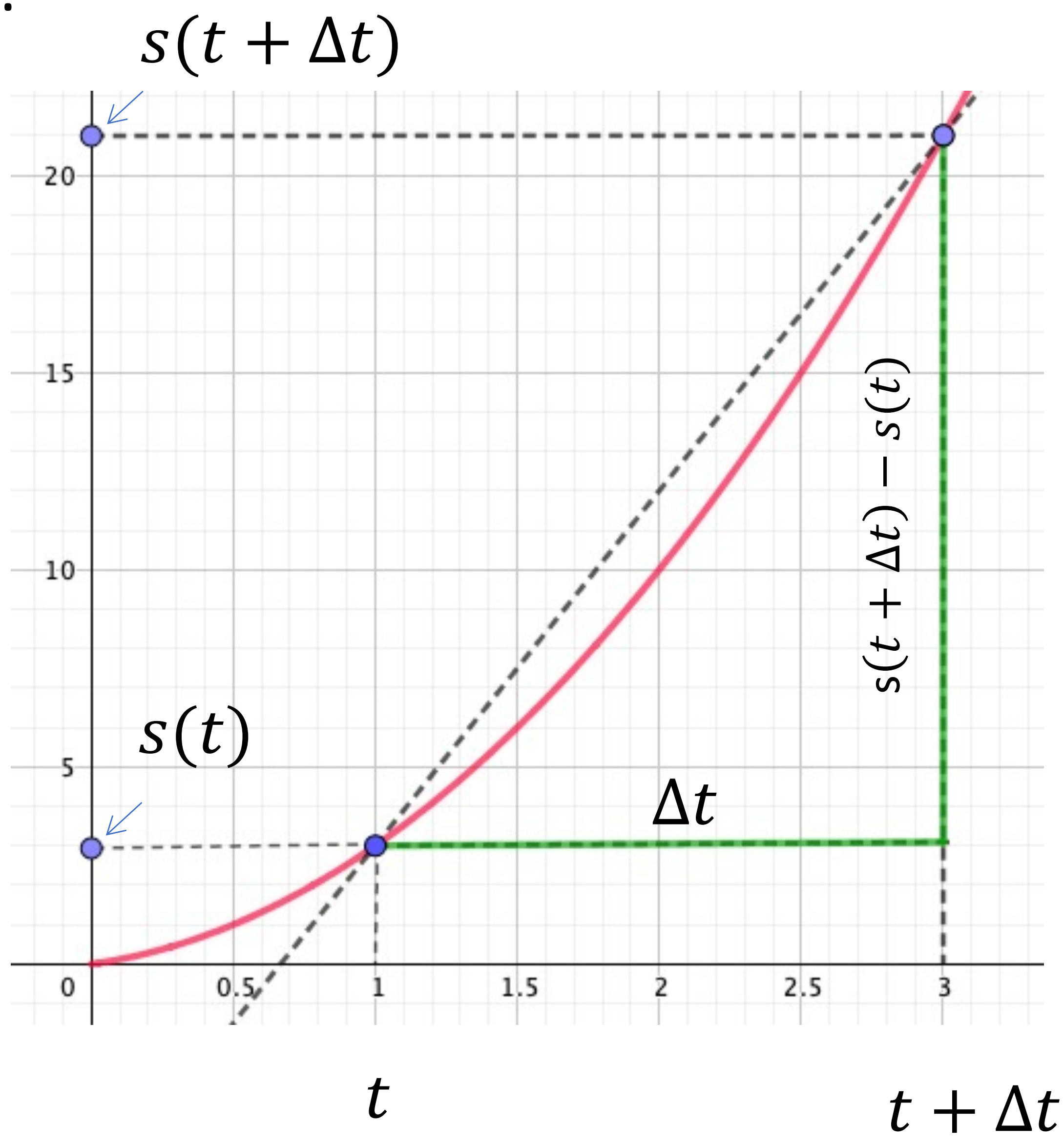
- Relembrando, a velocidade média em um intervalo de tempo Δt é calculada por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Onde:

$s(t + \Delta t) \Rightarrow$ posição final

$s(t) \Rightarrow$ posição inicial



Derivada de uma função

- Aplicando esse raciocínio em nossa função exemplo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Onde $\begin{cases} s(t) = 2 \cdot t^2 + t \\ s(t + \Delta t) = 2 \cdot (t + \Delta t)^2 + (t + \Delta t) \end{cases}$

Teremos:

$$v_m = \frac{2 \cdot (t + \Delta t)^2 + (t + \Delta t) - (2 \cdot t^2 + t)}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{2 \cdot (t^2 + 2 \cdot t \cdot \Delta t + \Delta t^2) + (t + \Delta t) - (2 \cdot t^2 + t)}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{2 \cdot t^2 + 4 \cdot t \cdot \Delta t + 2 \cdot \Delta t^2 + t + \Delta t - 2 \cdot t^2 - t}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{4 \cdot t \cdot \Delta t + 2 \cdot \Delta t^2 + \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow \boldsymbol{v_m = 4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t + 1}$$

Derivada de uma função

- Assim, temos que:

$$v_m = 4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t + 1$$

- Como vimos, para a $v_m = v$, o valor de Δt terá que ser infinitesimalmente próximo de zero
- Aqui introduzimos o conceito matemático de **limite** de uma função, escrito como:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad ou \quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

- Interpretação: a velocidade instânea de um corpo é o resultado do quociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, quando o valor de Δt tende a zero.

Derivada de uma função

- No nosso exemplo, já desenvolvemos que:

$$v_m = 4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t + 1$$

- Assim, usando a definição de limite:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (4 \cdot t + 2 \cdot \Delta t + 1)$$

- Com Δt tendendo a zero, a parcela $2 \cdot \Delta t$ não terá efeito na soma, e a expressão fica:

$$v(t) = 4 \cdot t + 1$$

Derivada de uma função

- Essa expressão é chamada de **derivada** de $s(t)$ e fornece a velocidade instantânea do corpo para qualquer valor de t.
- Sua notação matemática é a seguinte:

$$v(t) = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\mathrm{s}(t) = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(2t^2 + t) = 4 \cdot t + 1$$

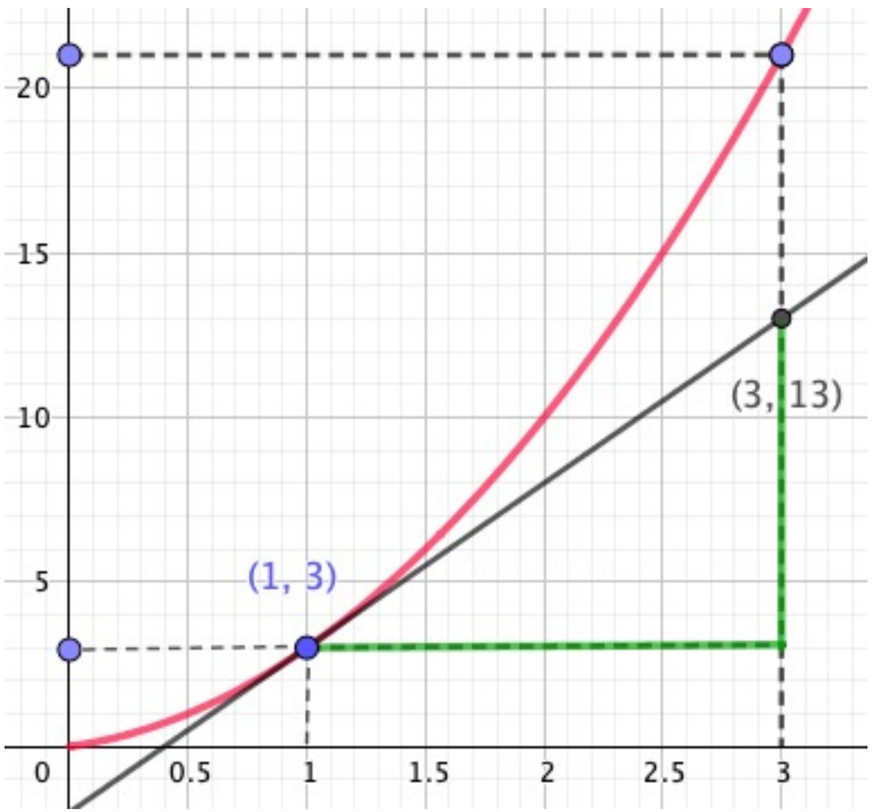
- Lemos: a derivada do espaço em relação ao tempo é a velocidade.
- Essa notação é preferível por sempre indicar em relação a que variável estamos derivando.
- Uma forma alternativa seria $s'(t) = v(t)$

Derivada de uma função

- No nosso caso, buscávamos a velocidade para $t = 1{,}0\ s$:

$$v(1{,}0) = 4 \cdot 1{,}0 + 1 = 5{,}0\ \frac{m}{s}$$

que era o valor inferido por aproximação.



Graficamente, é possível observar que essa é, de fato, a inclinação da reta tangente:

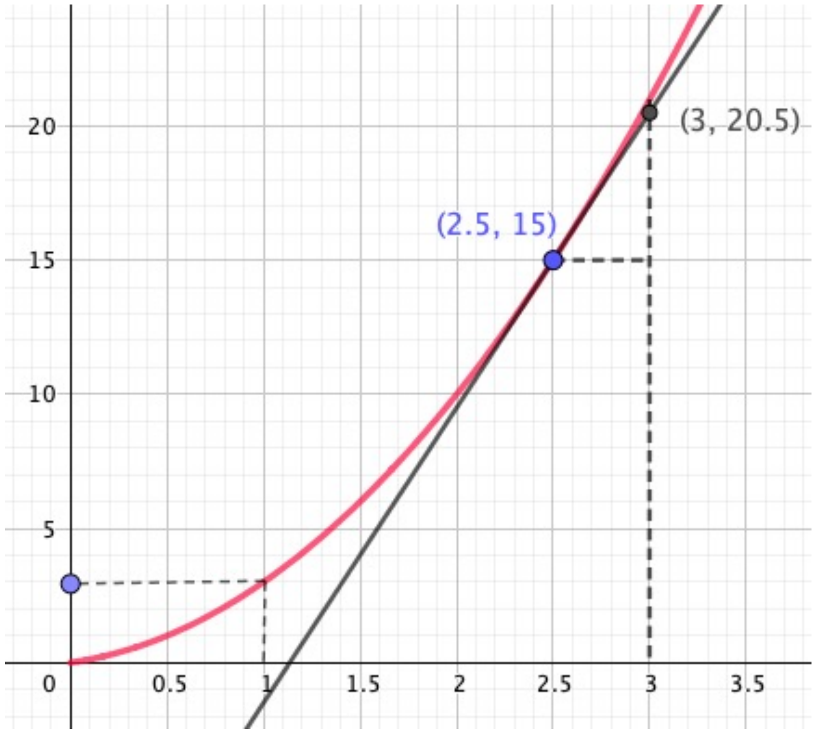
$$m = v = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$v = \frac{13 - 3}{3 - 1} = 5{,}0\ m/s$$

Derivada de uma função

- Com essa função derivada, podemos obter a velocidade instantânea para qualquer valor de t. Por exemplo, para $t = 2{,}5\ s$, teremos:

$$v(2{,}5) = 4 \cdot 2{,}5 + 1 = 11 \frac{m}{s}$$



Graficamente:

$$m = v = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$v = \frac{20{,}5 - 15}{3{,}0 - 2{,}5} = 11\ m/s$$

Derivada de uma função - conclusões

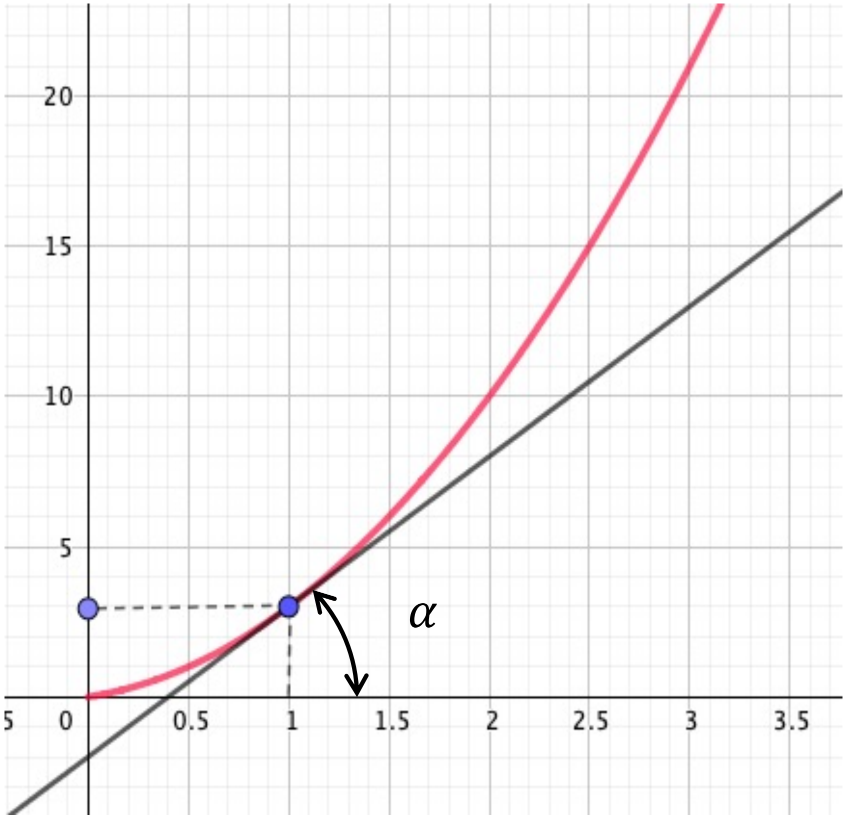
- A derivada de uma função expressa a **taxa de variação** dessa função em um determinado ponto.
- A expressão geral da derivada de uma função é:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Esse procedimento é chamado de Regra dos quatro passos
  1) Calculamos o valor da função com um incremento de tempo
  2) Do resultado anterior, subtraímos o valor da função sem o incremento
  3) Dividimos o resultado anterior pelo intervalo de tempo considerado
  4) Calculamos o limite da função resultante, com o intervalo tendendo a zero

Derivada de uma função - conclusões

- Graficamente, o valor da derivada é o da **inclinação da reta tangente** à função nesse ponto.



$$\frac{d}{dx} f(x) = \tan \alpha$$

Regras básicas de derivação

- Podemos deduzir uma regra fundamental de derivação a partir dos seguintes exemplos:

Derivar as funções abaixo usando a definição (limite):

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{d}{dx}x^2 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x - x^2}{\Delta x} =$$

$$\frac{d}{dx}x^2 = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}x^2 = 2x}$$

Regras básicas de derivação

- Continuação

$f(x) = x^3$

$$\frac{d}{dx}x^3 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}x^3 = \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 = 3x^2 \quad \therefore \quad \boldsymbol{\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2}$$

$f(x) = x^4$

$$\frac{d}{dx}x^4 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}x^4 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}x^4 = \lim_{\Delta x \to 0} 4x^3 + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^3 = 4x^3 \quad \therefore \quad \boldsymbol{\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3}$$

Regras básicas de derivação

- Observe que:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$$

- Assim, deduzimos que:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Obs.: uma demonstração cabal dessa regra pode ser feita com o binômio de Newton

Regras básicas de derivação

- A derivada de uma constante é zero.

Pela definição:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

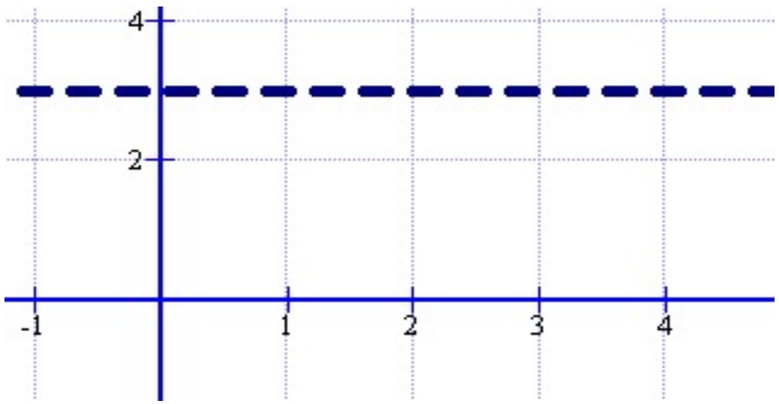
Como:

$$f(x) = C \; e \; f(x+\Delta x) = C$$

teremos:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

- De fato, a derivada é a taxa de variação, e uma constante não varia; a inclinação de sua curva é zero



Regras básicas de derivação

- Derivada da soma e da diferença

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v$$

$$\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{d}{dx}u - \frac{d}{dx}v$$

- A derivada de x é 1

$$\frac{d}{dx}x = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Exemplos

1. Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$a)\, f(x) = 4x^3$$

$$b)\, f(x) = x^{\frac{3}{4}}$$

$$c)\, f(x) = \sqrt[3]{x}$$

2. Calcule a derivada das funções abaixo para o valor fornecido:

$$a)\, f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 6, \text{ para } x = 2$$

$$b)\, f(x) = \frac{2x^4}{5} + \frac{2}{3x^7}, \text{ para } x = 1$$

Regras básicas de derivação

- Derivada do produto:

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

- Exemplo: calcular $\frac{d}{dx} f(x)$, sendo $f(x) = x^3 . (x^2 + 1)$

$$u = x^3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$v = x^2 + 1 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = x^3 \cdot 2x + (x^2 + 1) \cdot 3x^2$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 2x^4 + 3x^4 + 3x^2$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 5x^4 + 3x^2$$

Regras básicas de derivação

- Derivada do quociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

- Exemplo: calcular $\frac{d}{dx}f(x)$, sendo $f(x) = x^3/(x^2+1)$

$$u = x^3 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$$

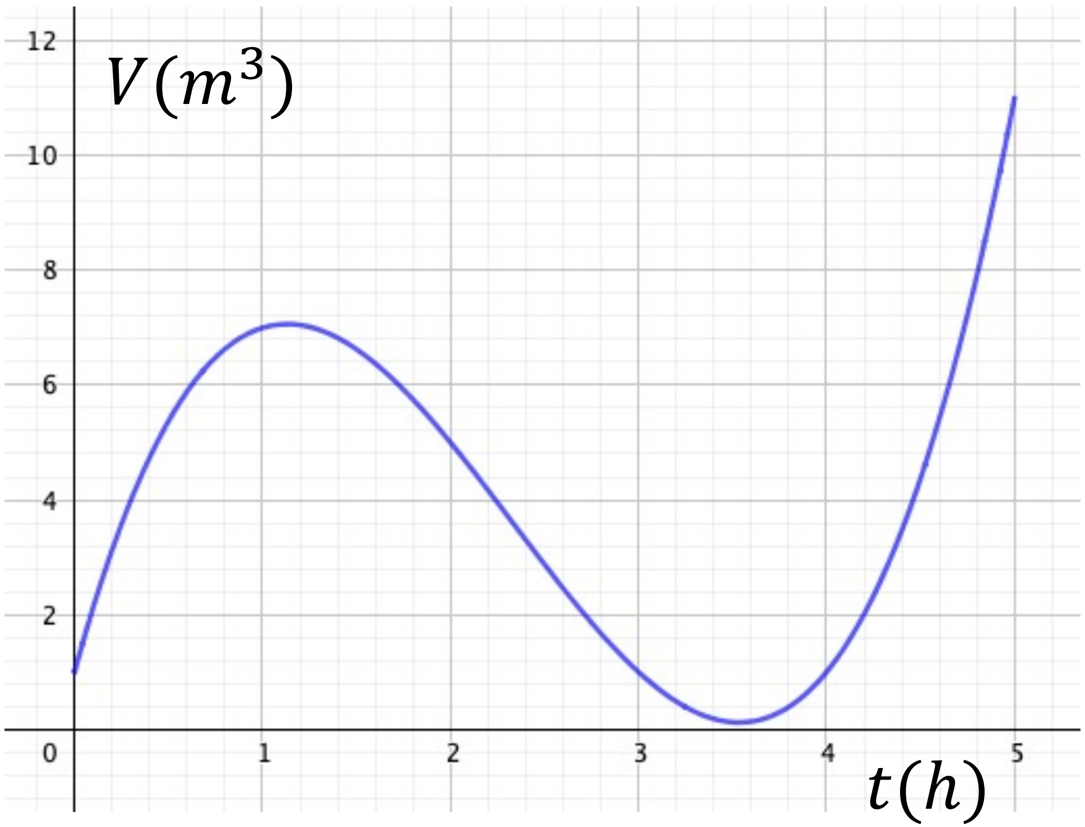
$$v = x^2 + 1 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$$

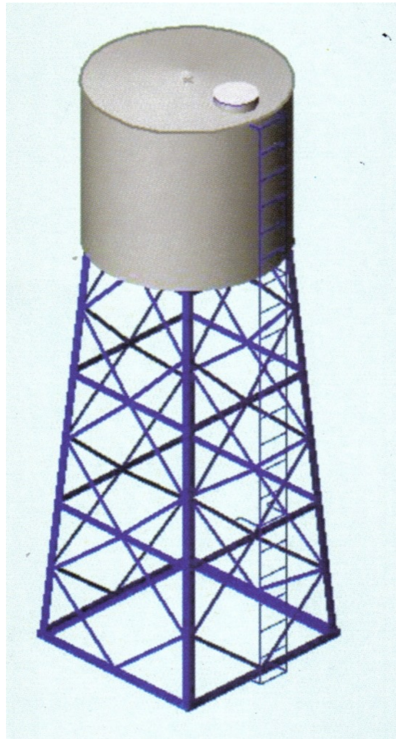
$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

Aplicação

- Um reservatório é alimentado e ao mesmo tempo seu fluido é consumido em um processo entre 0h00 e 5h00. O **volume** do reservatório, em m³, é dado pela função $V(t) = t^3 - 7t^2 + 12t + 1$. Calcule a **vazão** do tanque em m³/h do reservatório às 2h00 e às 4h30. Indique se o fluxo maior é de alimentação ou de consumo.





Resposta: 2h00: -4,0 m³/h, consumo; 4h30: 9,75 m³/h, alimentação.

Aplicação

- Um corpo se desloca de acordo com a função $s(t) = \frac{t^3}{4} + 2t$. Calcule:
  - Seu deslocamento entre os instantes $t_1 = 2{,}0\ s$ e $t_2 = 4{,}0\ s$,
  - Sua velocidade média nesse intervalo,
  - A função de sua velocidade instantânea
  - O valor da velocidade instantânea em cada um desses instantes.

Exercícios proposto

- Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número N de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado $N(t) = 64t - \frac{t^3}{3}$. Calcule:
  - Quantas pessoas estarão infectadas no 4º dia?
  - Qual a velocidade de propagação no 4º dia?
  - Qual a velocidade de propagação no 8º dia?

Nessa aula você

- Identificou funções que descrevem movimentos não uniformes
- Analisou graficamente essas funções e o significado geométrico da velocidade média e instantânea
- Explorou o conceito de limite para compreender o significado da derivada
- Entendeu o cálculo da derivada como sendo o cálculo da taxa de variação de uma função
- Aprendeu as regras básicas de derivação na resolução de problemas
- Aplicou as regras básicas na resolução de problemas