Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 1 - REVISÃO

Expressões do 1º grau; sinal; retas.

Expressões do 2º grau; sinal; parábolas

Nos exercícios 1 a 5, esboce as retas dadas especificando as interseções com os eixos coordenados.

1. $y = 3x + 1$
2. $y = -2$
3. $x = 4$
4. $y - 2 = -x$
5. $2y - x = 3,2$

Nos exercícios 6 a 8, esboce as parábolas dadas especificando o vértice e as interseções com os eixos coordenados, caso existam.

6. $y = x^2 + x - 3$
7. $y = 4x^2 + 4x + 1$
8. $y = -x^2 + x - 1$

Nos exercícios 9 a 16, resolva as inequações. Nos exercícios marcados com "*", relacione as soluções aos gráficos anteriores.

9. $*\ 3x + 1 > 0$
10. $*2 - x \leq 0$
11. $*x^2 + x - 3 > 0$
12. $*\ -x^2 + x - 1 < 0$
13. $*4x^2 + 4x + 1 \leq 0$
14. $x(x - 1) < 0$
15. $\pi x^2 - x + 3 < 0$
16. $2x^2 - 1 \geq 0$

17. Determine os valores reais de b, tais que $x^2 + bx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Para um tal valor de b, como é o gráfico de $y = x^2 + bx + 1$?

18. Determine os valores reais de a e b, tais que $ax^2 + bx - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Escolha valores particulares para a e b e esboce a parábola $y = ax^2 + bx - 1$ correspondente.

19. Determine a equação da reta que passa pelo ponto P=(-2,-1) e é paralela a $y = -x + 1$. Esboce as duas retas.

20. O comprimento de uma circunferência é dado por $C = 2\pi R$. Esboce o gráfico no plano RC.

21. Represente no plano RA a área de um círculo em função de seu raio.

22. No plano FC, esboce o gráfico da equação $C = \dfrac{5}{9}(F - 32)$, que relaciona as temperaturas expressas em Fahrenheit e Celsius. Há alguma temperatura que apresente a mesma leitura nos termômetros Fahrenheit e Celsius? Se existir, qual é?

23. A pressão p experimentada por um mergulhador debaixo d'água está relacionada com sua profundidade d por meio da fórmula $p = kd + 1$, onde k é uma constante. Quando $d = 0$ metro, a pressão é 1 atmosfera. A 100 metros a pressão é 10,94 atmosferas. Esboce o gráfico da pressão em função da profundidade e determine a pressão a 50 metros.

24. Voando horizontalmente a uma altura de 11km, um avião leva 1h para percorrer uma distância de 720km entre dois pontos A e B.

    a) Esboce o gráfico da altura do avião em função do tempo em minutos.

    b) Determine a distância horizontal x percorrida pelo avião em 18 minutos a partir de A. Esboce o gráfico da distância percorrida pelo avião durante o voo em função do tempo t em minutos no plano tx.

25. Uma torneira despeja 4 l de água por minuto numa caixa d'água.

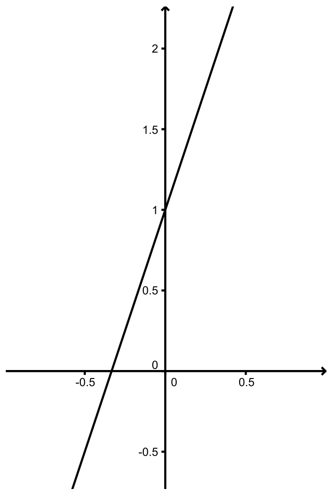
    a) Represente a quantidade Q de água que jorra da torneira em t minutos. Esboce o gráfico no plano tQ.

    b) Supondo que no instante inicial havia 200 l d'água na caixa, represente com uma equação a quantidade de água y presente na caixa no instante t em minutos. Esboce o gráfico.

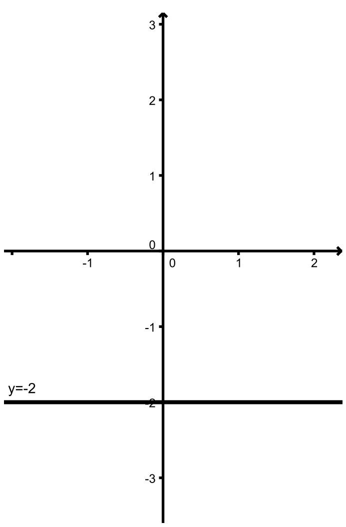
    c) Levando em conta o item b), quanta água exitirá na caixa após 2h e 20min? Supondo que a capacidade máxima da caixa d'água é de 2000 l, quanto tempo levará para enchê-la totalmente?

RESPOSTAS

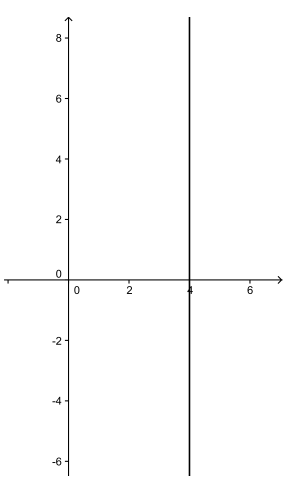
1. Interseção com *ox* em $(-1/3, 0)$
   e com *oy* em (0,1).



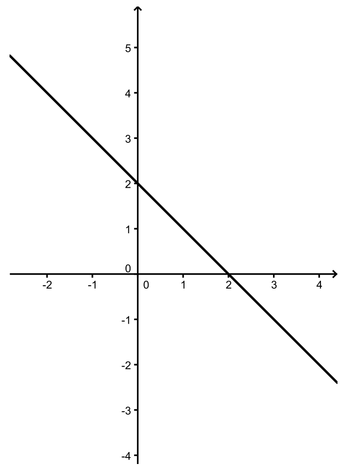
2. Interseção com *ox* não existe
   e com *oy* em (0,-2).



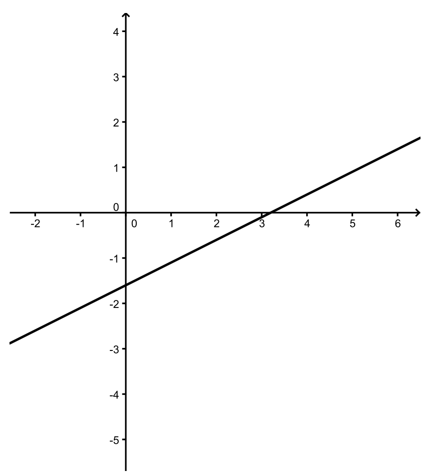
3. Interseção com *ox* em $(4, 0)$
   e com *oy* não existe.



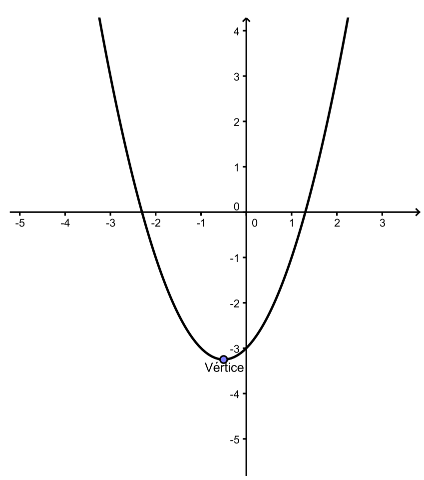
4. Interseção com *ox* em $(2, 0)$
   e com *oy* em (0,2).



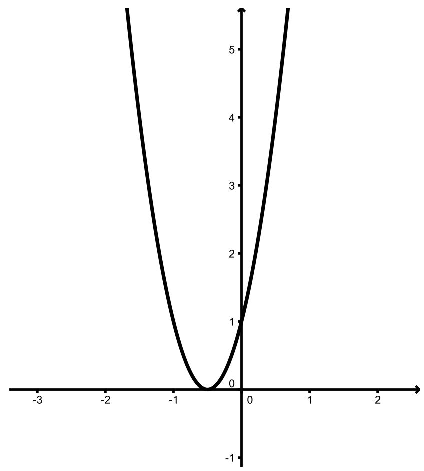
5. Interseção com *ox* em $(-3.2, 0)$
   e com *oy* em (0,1.6).



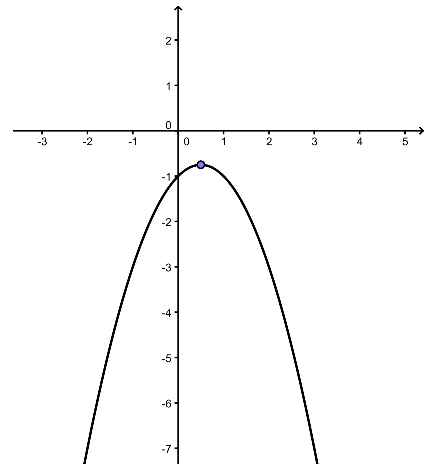
6. Vértice em $(-1/2, -13/4)$, interseção com *ox*
   em $(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, 0)$e $(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, 0)$ e com *oy* em (0,-3).



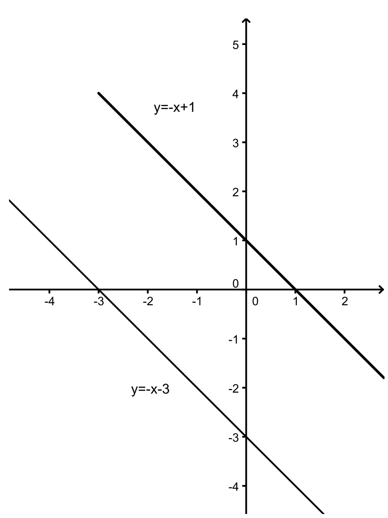
7. Vértice em $(-1/2, 0)$, interseção com ox em $(-1/2, 0)$ e com oy em (0,1).



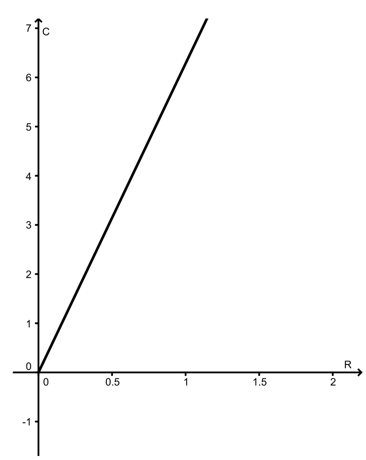
8. Vértice em $(1/2, -3/4)$, interseção com ox não existe, pois as raízes não são reais $(\Delta < 0)$ e com oy em (0,-1).



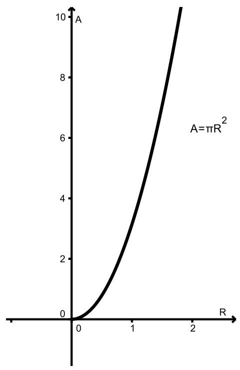
9. $S = \{x; x > -1/3\}$
10. $S = \{x; x \geq 2\}$
11. $S = \{x; x < \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\ ou\ x > \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\}$
12. $S = \mathbb{R}$
13. $S = \{-1/2\}$
14. $S = \{x; 0 < x < 1\}$
15. $\emptyset$
16. $\{x; x \leq \frac{-\sqrt{2}}{2}\ ou\ x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$
17. $y = x^2 + bx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, se $\Delta < 0$, pois nesse caso a parábola dada por $y = x^2 + bx + 1 > 0$ possui concavidade voltada para cima e não tem raízes reais. Logo, devemos ter $\Delta = b^2 - 4 < 0$, que é outra expressão quadrática com variável b. Então, $\Delta = b^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < b < 2$.
O gráfico de $y = x^2 + bx + 1$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, que não intercepta o eixo x, pois não possui raízes reais, cujo vértice é no ponto $(-b/2, (4 - b^2)/4)$ e que intercepta o eixo y no ponto (0,1).
18. Se $a = 0$, $y = bx - 1$ troca de sinal em $\mathbb{R}$. Se $a \neq 0$, para termos $y = ax^2 + bx - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ a concavidade da parábola deve ser para baixo e o $\Delta < 0$. Logo, $a < 0$ e devemos determinar os valores de b, tais que $\Delta = b^2 + 4a < 0$, que é uma expressão quadrática na variável b. Portanto, como $b^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow b = \pm 2\sqrt{-a}$ (note que $-a > 0$), temos que $\Delta = b^2 + 4a < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{-a} < b < 2\sqrt{-a}$.
19. $y = -x - 3$



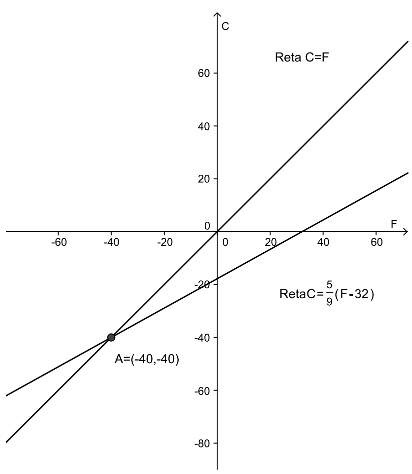
20. $C = 2\pi R$



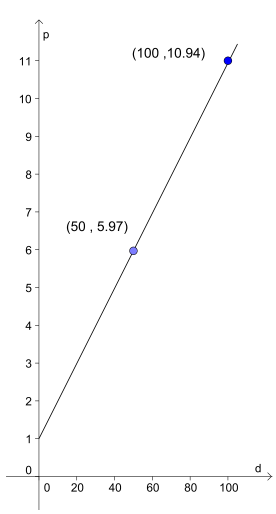
21. $A = \pi R^2$



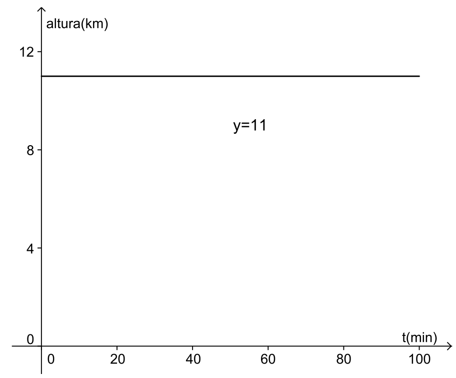
22. A temperatura que apresenta a mesma leitura nos dois termômetros ocorre quando $C = F$, isto é no ponto de interseção entre as duas retas $\frac{5}{9}(F - 32) = F \Leftrightarrow 5F - 160 = 9F \Leftrightarrow 4F = -160 \Leftrightarrow F = -40$. Tal ponto é $(-40, -40)$.



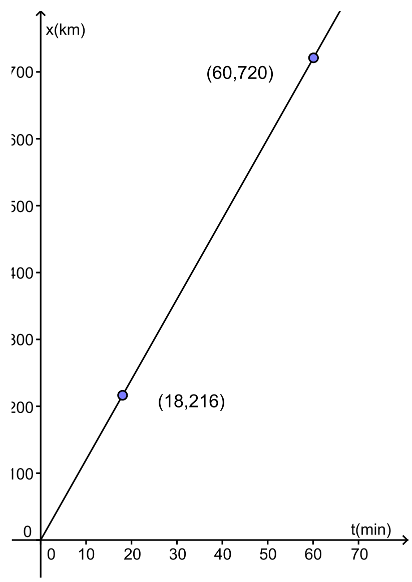
23. Vamos calcular o valor de k usando o valor dado para a pressão a 100m, então $10,94 = 100k + 1 \Rightarrow k = \dfrac{9,94}{100}$. Assim, $p = \dfrac{9,94}{100} \times 50 + 1 \Leftrightarrow$ $p = 4,97 + 1 = 5,97$. atmosferas.



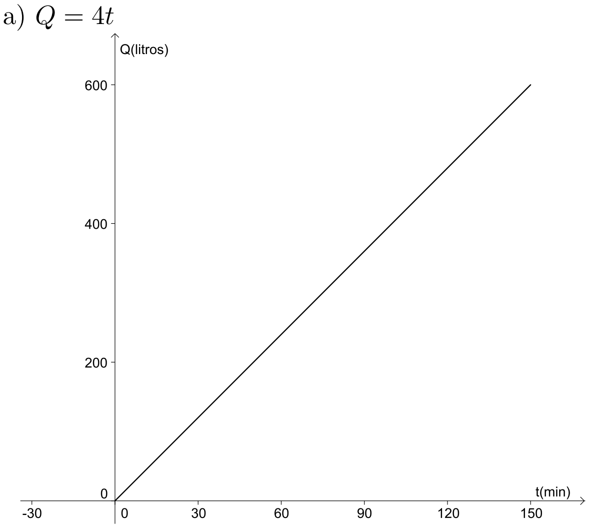
24. a)A altura $y = 11$ é constante, então temos a reta horizontal $y = 11$



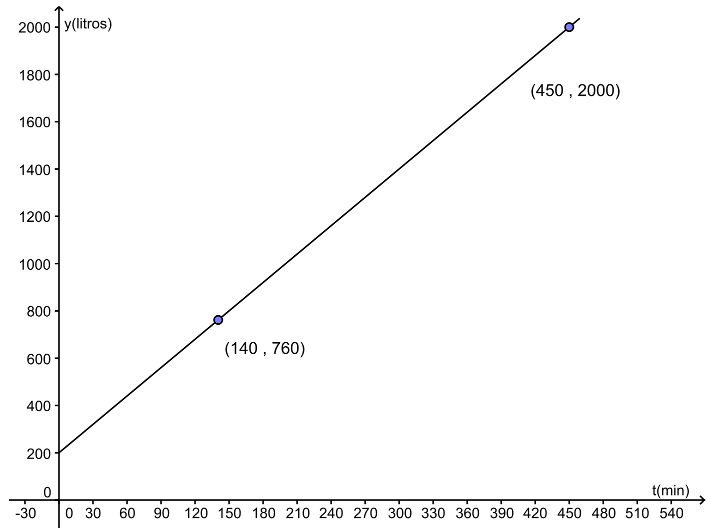
b) Se em $60min$ a distância percorrida é de $720\,km$, então em $1\,min$ são percorridos $720/60 = 12\,km$, portanto, a distância percorrida em 18 minutos a partir de A é de $12 \times 18 = 216km$. Para $t \geq 0$, temos $x = 12t$.



25. a) $Q = 4t$



25-b)$y = 200 + 4t$



c)Após 2h e 20min, ou seja, 140 min, teremos $y = 200 + 4 \times 140 = 760\, litros$ na caixa.

A caixa encherá quando $2000 = 200 + 4t$, isto é quando $t = 1800/4 = 450\, min$. Portanto a caixa levará 7h e 30 min para encher (veja os pontos marcados no gráfico anterior). ■

uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 2

Equações, inequações

Domínios, módulo

Nos exercícios 1 a 7 resolva, se possível, as equações, indicando em cada passo a propriedade algébrica dos números reais utilizada.

1. $x(x^2 - 4x + 1) = x$
2. $x^2(x^2 - 4) = x(x - 2)$
3. $2x(x^2 - 1)^2 = 4x^3(x^2 - 1)$
4. $x^2|x^2 - 4| = x(x - 2)$
5. $|4x| + 1 = |x|$
6. $|x^3| = x^3 - x^2$
7. $\dfrac{\dfrac{2}{1-x} + x}{x^2 - 1} = 0$

Nos exercícios 8 a 17 resolva, se possível, as inequações, indicando em cada passo a propriedade de ordem dos números reais utilizada.

8. $x^2 \leq 16$
9. $2x \leq x^2$
10. $\dfrac{x+1}{x(x^2-1)} < \dfrac{1}{x^2-1}$
11. $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x}{x-1} \leq 1$
12. $x - 1 > \dfrac{2}{x}$
13. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+1}{x-2} \leq 0$
14. $\dfrac{x^3}{(x+3)(x-2)} < \dfrac{x+x^2}{(x+3)(x-2)}$
15. $\dfrac{3x+1}{2x-1} + 1 > \dfrac{5x+3}{2x+5}$
16. $\dfrac{1}{|x|-1} < \dfrac{1}{|x|}$
17. $0 \leq -x^2 + 4x \leq 3$

Nos exercícios 18 a 20 determine o domínio e estude o sinal de cada expressão. Represente o domínio na reta orientada.

18. $E(x) = \dfrac{\dfrac{\dfrac{1}{x^2-2}}{x}}{\dfrac{1}{x} - x}$
19. $E(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x}{x^2(1 - \dfrac{1}{x}) - 2x}$
20. $E(x) = \dfrac{5x}{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 - 4}$

21. Descubra a hipótese que falta sobre a ou/e b para tornar correta a equivalência abaixo:

$$\frac{|a|}{b^2 + b} \leq 1 \Leftrightarrow |a| \leq b^2 + b$$

22. **a)** Determine a solução de $|x| \leq x^2$.
    b) Represente o conjunto solução de a) na reta orientada.
    c) Interprete a inequação em a) no plano cartesiano.

23. **a)** Determine os valores de x,tais que, a reta $y = 2x + 1$ está abaixo da parábola $y = 2 - x^2$. Faça um esboço dos dois gráficos no plano cartesiano.
    b) Determine os valores de c, tais que a reta $y = 2x + c$ possua algum ponto de interseção com a parábola $y = 2 - x^2$. Esboce.

24. Considere o problema : "Determinar os pontos da reta numérica cuja distância a -1 é maior do que 2."

   a) Resolva o problema geometricamente.

   b) Apresente o problema acima utilizando símbolos e notação matemática.

25. Seja b, um número real fixado, mas arbitrário. Diga quantas soluções existem para a equação $|bx| = b$.

26. Se $-1 \leq x \leq 2$, determine o menor intervalo a que $y = 1 - 2x$ deve pertencer. Atribua um significado geométrico para o problema no plano cartesiano.

27. Verifique se cada afirmativa abaixo é *falsa* ou *verdadeira*. Se *falsa*, dê um contraexemplo, se *verdadeira*, demonstre-a.

   a) $a < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 1$.

   b) $a \geq b - 3 \Rightarrow a^3 \geq a^2 b - 3a^2$.

   c) $2a < b^2 \Rightarrow 2a^3 < a^2 b^2$.

   d) $ab \leq a \Rightarrow b \leq 1$.

   e) $|a|b > a \Leftrightarrow b > \dfrac{a}{|a|}$.

   f) $|a|b < 1 \Leftrightarrow a = 0 \; ou \; b < \dfrac{1}{|a|}$.

   g) $|a| < |b| \Rightarrow |a + 1| < |b + 1|$

28. Complete e esboce na reta numérica.

   a) Se $x \in (-5, 3]$, então $x + 2$ pertence ao intervalo...... .

   b) $x^2 > 4 \Leftrightarrow x$ pertence ao intervalo ....

   c) Se $-5 < x < 3 \Rightarrow |x| <$ ....

   d) Se $|x| < 2 \Rightarrow |x + 3| <$ ..... e $|x - 1| <$ ..... .

29. Escreva a definição de cada expressão, abrindo o(s) módulo(s), e esboce o gráfico no plano cartesiano.

   a) $y = |2x + 1|$

   b) $y = |x^2 - x|$

   c) $y = |2 - x^2|$

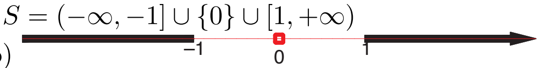
   d) $y = ||x| - 1|$

   e) $y = \left| \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} \right|$

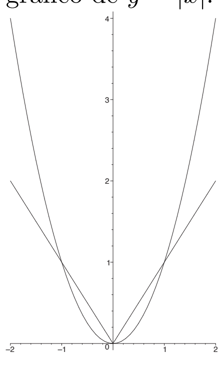
   f) $y = \dfrac{x|x^2 + 2x - 3|}{x + 3}$

   g) $y = x^2 - |x^2 - x| - 1$

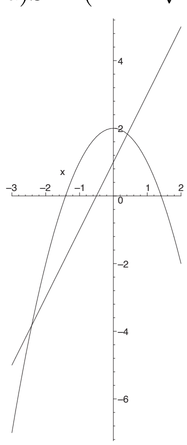
Respostas :

1. $S = \{0, 4\}$
2. $S = \{0, 2, -1 \pm \sqrt{2}\}$
3. $S = \{0, \pm 1\}$
4. $S = \{-1 - \sqrt{2}, -1, 0, 2\}$
5. $S = \emptyset$
6. $S = \{0\}$
7. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ e $S = \{2\}$.
8. $S = [-4, 4]$
9. $S = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$
10. $S = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$
11. $S = [-2, 1)$
12. $S = (-1, 0) \cup (2, +\infty)$
13. $S = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
14. $S = (-\infty, -3) \cup \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$
15. $S = (-5/2, -1/8) \cup (1/2, \infty)$
16. $S = (-1, 1)$
17. $S = [0, 1] \cup [3, 4]$
18. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}, 0, \pm 1\}$; $E(x) > 0\ se\ x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$; $E(x) < 0\ se\ x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.
19. $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$; $E(x) > 0\ se\ x \in (3, \infty)$;$E(x) < 0\ se\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$;
20. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1/3\}$; $E(x) > 0\ se\ x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1/3)$; $E(x) < 0\ se\ x \in (-1, 0) \cup (1/3, \infty)$
21. $a \in \mathbb{R}, b \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
22. a)$S = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$
    b) 

    c)S representa as abscissas dos pontos sobre os gráficos , tais que a parábola $y = x^2$ está acima ou intersecta o gráfico de $y = |x|$.Veja a representação abaixo:



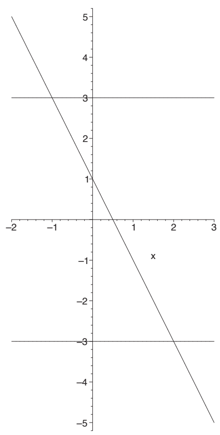
23. a)$S = (-1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$. Esboço dos gráficos:



    b)Qualquer $c \leq 3$. Para $c = 3$ há um único ponto de interseção e para cada $c < 3$ há dois pontos.

24. a)$S = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
    b)Determine a solução da inequação $|x + 1| > 2$.
25. Se $b = 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$. Se $b > 0 \Rightarrow S = \{\pm 1\}$. Se $b < 0 \Rightarrow S = \varnothing$.

26. $S = [-3, 3]$.O gráfico da reta $y = 1 - 2x$ está entre as retas $y = -3$ e $y = 3$, para $x \in [-1, 2]$.



27. **a)** $(F) : a = -1$.

    b) (V),pois se $a = 0$ vale a igualdade. Se $a \neq 0$,então $a^2 > 0$ e pela monotonicidade da multiplicação o resultado segue.

    c) $(F); a = 0$.

    d) $(F); a = -1, b = 2$.

    e) (V).Observe que $a \neq 0$. Pela monotonicidade da multiplicação a equivalência segue, já que $|a| > 0$.

    f) (V), pela monotonicidade da multiplicação (prop.1.4.4), segue que $|a|b < 1 \Leftrightarrow |a| = 0 \; ou \; b < \dfrac{1}{|a|} \Leftrightarrow a = 0 \; ou \; b < \dfrac{1}{|a|}$, onde na última equivalência usamos a prop. do módulo 1.7.1.

    g) (F); $a = 1 \; e \; b = -3$.

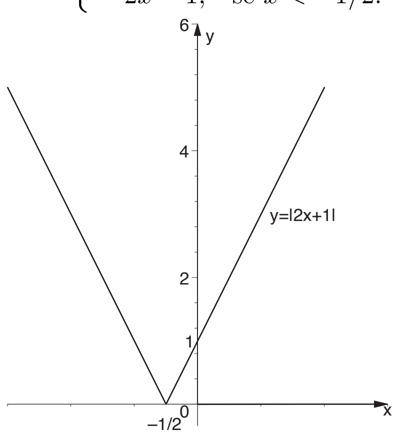
28. **a** (-3,5]

    b) $(-\infty, -2)$ ou $(2, +\infty)$

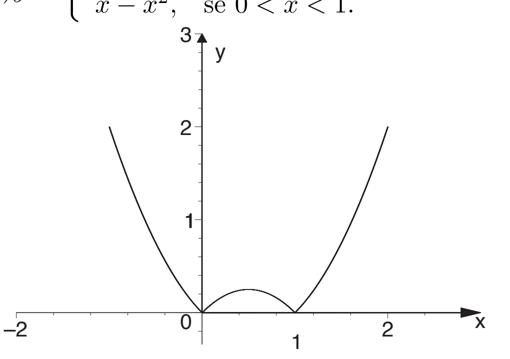
    c) $|x| < 5$

    d) $|x + 3| < 5$ e $|x - 1| < 3$.

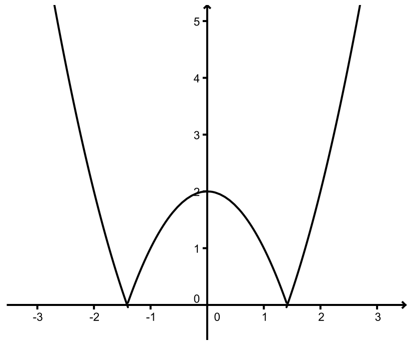
29. **a)** a)$y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \geq -1/2; \\ -2x - 1, & \text{se } x < -1/2. \end{cases}$



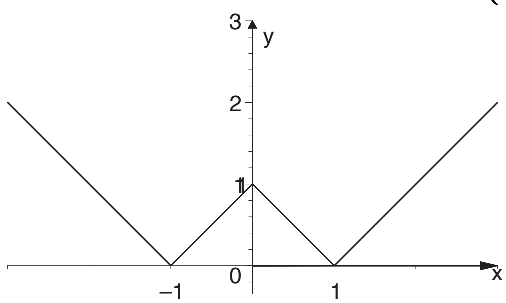
b) b)$y = \begin{cases} x^2 - x, & \text{se } x \geq 1 \; ou \; x \leq 0; \\ x - x^2, & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$



c) c)$y = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{se } x \geq \sqrt{2} \textit{ ou } x \leq -\sqrt{2}; \\ 2 - x^2, & \text{se } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}. \end{cases}$

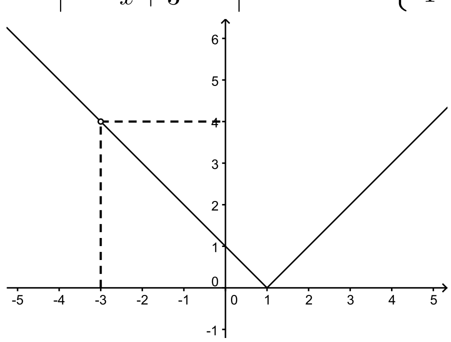


d) d)$y = \begin{cases} |x| - 1, & \text{se } x \geq 1 \textit{ ou } x \leq -1 \\ 1 - |x|, & \text{se } -1 < x < 1. \end{cases} = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \geq 1; \\ 1 - x, & \text{se } 0 \leq x < 1. \\ 1 + x, & \text{se } -1 < x < 0. \\ -x - 1, & \text{se } x \leq -1; \end{cases}$



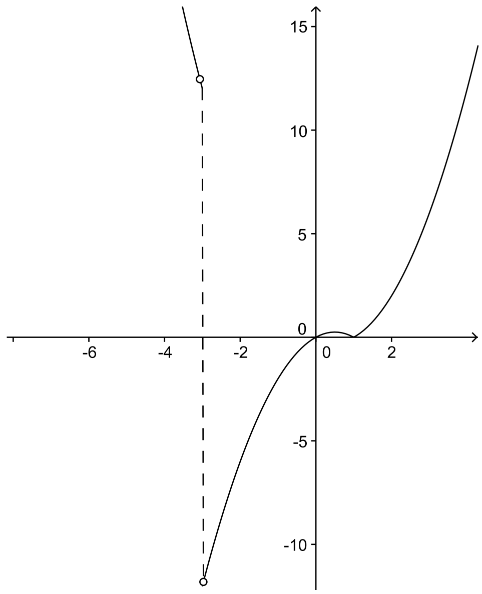
e) Observe que o domínio da expressão é $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ e

$y = \left| \dfrac{(x-1)(x+3)}{x+3} \right| = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{se } x < -3 \textit{ ou } -3 < x < 1. \end{cases}$

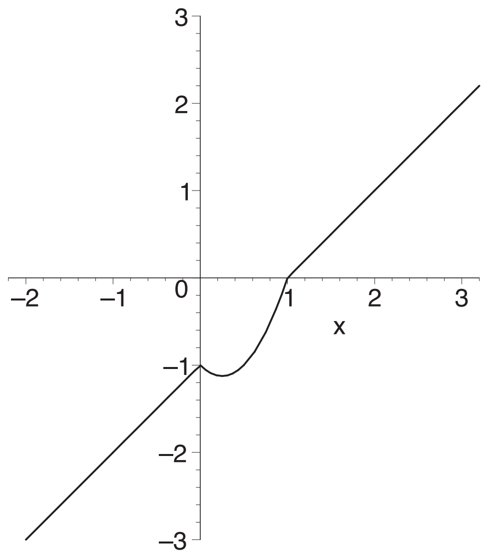


f) O domínio da expressão é $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ e

$y = \begin{cases} \dfrac{x(x^2 + 2x - 3)}{x + 3}, & \text{se } x \geq 1 \textit{ ou } x < -3 \\ \dfrac{-x(x^2 + 2x - 3)}{x + 3}, & \text{se } -3 < x < 1. \end{cases} = \begin{cases} x(x - 1), & \text{se } x \geq 1 \textit{ ou } x < -3; \\ -x(x - 1), & \text{se } -3 < x < 1; \end{cases}$



g) $y = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \geq 1 \text{ } ou \text{ } x \leq 0 \\ 2x^2 - x - 1, & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$



Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 3

Raízes, Equações

Inequações, miscelânea

1)Resolva, se possível, as equações:
a)$(\sqrt{x})^6 + x^3 = 0$ b)$\sqrt{x^6} + x^3 = 0$ c) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = x$

2)a) Mostre que $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$, $\forall\, x, y \geq 0$. Essa desigualdade significa que a média geométrica entre dois números reais não negativos é menor do que ou igual a média aritmética entre eles.

b) Quando é que a igualdade vale?

3)a) Existe algum subconjunto da reta onde vale a igualdade $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$?

b) Existe algum subconjunto da reta onde vale a igualdade $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{1-x}}$?

4) a)Utilize a equivalência: $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ou } x \leq -a$; para resolver a inequação $|2x-3| \geq 1$.
b)Utilize a equivalência: $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$; para resolver a inequação $|2-3x| \leq 1$.

5)[1]Mostre que a soma de um número real positivo com seu inverso não pode ser menor do que 2.

6) a)Se $1 \leq a \leq \sqrt{2}$, estime $\sqrt{1+a^2}$.
b)Se $\sqrt{3} \leq x < 2$, estime $\sqrt{9-x^2}$.
c)Se $\sqrt{3} \leq x < 2$, estime $\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$.
d)Se $\sqrt{3} \leq x < 2$, estime $\dfrac{3}{2-\sqrt{5-x^2}}$.

7)Verifique se cada afirmativa abaixo é *falsa* ou *verdadeira.* Se *falsa*, dê um contraexemplo, se *verdadeira*, demonstre-a.

a) $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$.

b) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.

c) $a^2 < b^2 \Leftrightarrow |a| < |b|$.

d) $a^3 < b^3 \Leftrightarrow a < b$

e) $a < b \Rightarrow ca < cb,\ \forall c \in \mathbb{R}$.

8)Complete o quadrado das expressões e determine o sinal.

a) $E(x) = 3x^2 + 2x + 1$

b) $E(x) = 2x^6 + 2x^3 + 0.51$

c) $E(x) = \sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 1$, $x \geq 0$

d) $E(x) = \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{4}{x} + 2$, $x \neq 0$.

9)Em cada caso, determine a constante c e a mudança de variável y , tais que as igualdades se verificam.

a) $\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{y^2+c}$

b) $\sqrt{x-x^2} = \sqrt{c-y^2}$

c) $\sqrt{\sqrt{2}x^2 - x + 2\sqrt{2}} = \sqrt{y^2+c}$

[1]Ex. tirado de Druck, S., Firmo, S. e Gomes, M. E., Preparação para o Cálculo.

10)Encontre a interseção entre os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e a reta $y = x - 6$. Faça um esboço.
11)Complete:

a) $\sqrt[3]{x^{15}} = ...$

b) $\sqrt[6]{x^{18}} = ...$

c) $(x^6)^{1/2} = ...$

d) $(x^4)^{1/12} = ...$

12)Faça as simplificações necessárias para que você saiba investigar o comportamento da expressão para x próximo do ponto x_0 (fora do domínio da expressão) dado em cada caso.

a) $E(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$, $x_0 = 3$.

b) $E(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x^2}$, $x_0 = 0$.

c) $E(x) = \dfrac{x^5 - 32}{x - 2}$, $x_0 = 2$.

13)Dê o domínio, simplifique e estude o sinal.

a) $E(x) = \dfrac{2x\sqrt{x+1} - \dfrac{x^2}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$

b) $E(x) = \dfrac{4x(x^2 - 1) - 2x^2.2x}{(x^2 - 1)^2}$

c) $E(x) = \dfrac{2(x+1)^{3/2}(6x+4) - 3(3x^2 + 4x)(x+1)^{1/2}}{4(x+1)^3}$

d) $E(x) = \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x}}}$

14) a)Esboce a região limitada por $y = \sqrt{x}$, a reta $y + x = 4$ e o eixo 0y, determinando os pontos de interseção.
b)Esboce a região limitada por $y = \sqrt{x}$, a reta $y + x = 4$ e a reta $y = 4$, determinando os pontos de interseção.

15)Resolva as equações elevando-as ao quadrado.

a) $|x - 2| = \sqrt{x}$

b) $|x - 3| + |x + 3| = 6$

c) $\sqrt{x - 1} = x - 3$

16)Estude o sinal das expressões.

a) $E(x) = \dfrac{(7 - x^2)(x^2 + |x| + 1)}{-x^2 + 2x - 5}$

b) $E(x) = \dfrac{(2 - |x|)(x^5 + x^3 - 6x)}{2x^2 - 3x}$

17)Resolva e marque o conjunto solução na reta numérica.

a) $\dfrac{2}{x-1} \leq \dfrac{x}{2-x}$

b) $\sqrt{2|x|-1} = x$

c) $x = \sqrt{-x^2+|x|}$

d) $\sqrt{x^2-2x} = 1$

e) $(|x|-3)^5 = 6$

f) $(1-|x|)(x^2-1) \leq (|x|-1)^2$

g) $(|x|-1)(x+2) = -2$

h) $\sqrt[3]{2x(x-4)} = \sqrt{2x}$

i) $x\sqrt{x^2(x^2-2)} + (1-3x)\sqrt{x^2-2} = 0$

j) $|x-2| \leq 2x$

18)Determine o domínio.

a) $E(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^4+5x^2+6}}{\sqrt{|x|-5+x}}$

b) $E(x) = \dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2+x}}}{\sqrt{\dfrac{x^2-|x|}{1-x}}}$

RESPOSTAS

1-a)$S=\{0\}$ b)$S=(-\infty,0]$ c)$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}=x \Leftrightarrow \dfrac{-3}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}} = x$, daí $x<0$, mas o domínio é $D=[1,+\infty)$. Logo, $S=\varnothing$

2-a) Basta considerar a inequação $0 \leq (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = x+y-2\sqrt{xy}$, $\forall x,y \geq 0$.
b)Pela inequação em a), a igualdade vale se e só se $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$, isto é, quando $x=y$.
3)-a)Sim, $S=(1,\infty)$. b)Sim, $S=(-\infty,0]$. 4-a)$S=[2,+\infty)\cup(-\infty,1]$. b)$S=[1/3,1]$.

5)Deve-se mostrar que o o sinal de $x+\dfrac{1}{x}-2$ é sempre positivo ou nulo , $\forall x>0$.

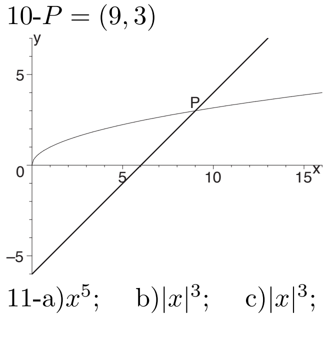
6-c)Como $0 \leq \sqrt{3} \leq x < 2$, elevando ao quadrado, a desigualdade é preservada e obtemos $3 \leq x^2 < 4$. Daí, $-3 \geq -x^2 > -4$ e portanto $2 \geq 5-x^2 > 1$. Como a raiz quadrada também preserva a ordem, temos que $\sqrt{2} \geq \sqrt{5-x^2} > 1$ e portanto $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}} < 1$.

7-a)F- Contraexemplo: a=1 e b=-3: b)F- Contraexemplo: a=-4, e b=1 c)V- Usamos a propriedade 1.8.4, pois $a^2, b^2, |a|, |b| \geq 0$ d)V- Se $a=0oub=0$, o resultado é trivial. Suponha $a,b\neq 0$. Considere o produto notável $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, onde a parcela da direita pode ser considerada uma expressão do 2-º grau com incógnita a e $b\neq 0$ constante , mas arbitrária. Então , $(a^2+ab+b^2)>0$, $\forall a,b\neq 0$, pois $\Delta=-3b^2<0$ e a concavidade é para cima. Assim, do produto notável acima, $a^3-b^3<0 \Leftrightarrow a-b<0$, isto é , $a^3<b^3 \Leftrightarrow a<b$.
e)F- contraexemplo: tome qualquer $c<0$.

8-a)$3(x+1/3)^2+2/3$: b)$2(x^3+1/2)^2+0,01$; c)$(\sqrt[4]{x}-2)^2-3$; d)$4(1/x-1/2)^2+1$.

9-a)$y=x+3/2$ e $c=-9/4$; b)$y=x-1/2$ e $c=1/4$; c)$y=\sqrt[4]{2}x-\dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$ e $c=15/4\sqrt{2}$.

10-$P=(9,3)$



11-a)x^5; b)$|x|^3$; c)$|x|^3$; d)$|x|^{1/3}$.

12-a) $E(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$ e se aproxima de $1/2\sqrt{3}$

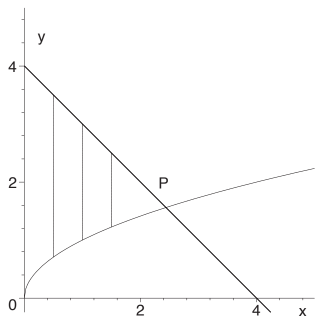
b)$E(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1}$ e se aproxima de 1/3.

c)$E(x) = x^4+2x^3+4x^2+8x+16$ e se aproxima de 80.

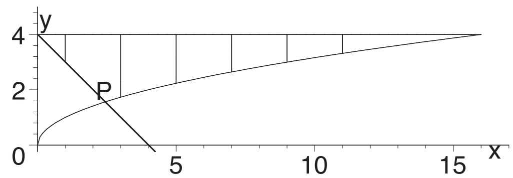
13-a)$D = (-1,+\infty)$, $E(x) < 0$ em (-1,0), $E(x) > 0$ em $(0,+\infty)$ e $E(x) = 0$ sse $x = 0$. b)$D = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$,$E(x) < 0$ em $(0,1)\cup(1,+\infty)$, $E(x) > 0$ em $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ e $E(x) = 0$ sse $x = 0$. c)$D = (-1,\infty)$, $E(x) > 0$, $\forall x > -1$.

d)$D = \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{2},1,0\}$, $E(x) < 0$ em $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(1,\sqrt{2})\cup(-1,0)$, e $E(x) > 0$ em $(\sqrt{2},+\infty)\cup(0,1)\cup(-\sqrt{2},1)$.

14-a)O ponto de interseção entre os gráficos da reta e de $y = \sqrt{x}$ é
$P = (\dfrac{9-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2})$.



b)As retas $y = 4$ e $y + x = 4$ têm interseção no ponto (0,4). A reta $y = 4$ e a curva $y = \sqrt{x}$ têm interseção em (16,4).



15-a)$S = \{1,4\}$ b)Observe que *nesse caso*, a equação dada é equivalente à equação ao quadrado e portanto não precisamos testar o conjunto solução! $S = [-3,3]$. c)$S = \{5\}$

16-a)$E(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-\sqrt{7})\cup(\sqrt{7},\infty)$; $E(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{7},\sqrt{7})$; $E(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$;
b)$E(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2)\cup(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})\cup(3/2,2)$; $E(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},3/2)\cup(2,+\infty)$; $E(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2, \pm\sqrt{2}$;

17)a)$S = \left[\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}, 1\right) \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}, 2\right)$; b)$S = \{1\}$; c)$S = \{0, 1/2\}$; d)$S = \{1 \pm \sqrt{2}\}$;

e)$S = \{\pm(3+\sqrt[5]{6})\}$; f)$S = \mathbb{R}$; g)$S = \{0,-3\}$; h)$S = \{0,8\}$; i)$S = \left\{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}, \pm\sqrt{2}\right\}$;

j)$S = [2/3,+\infty)$

18)a)$D = (5/2,+\infty)$ b)$D = (-2,-1)$

Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 4

Raízes, Equações e inequações com módulos

Gráficos, estudo do sinal usando o TPS

1))Estude o sinal e esboce o gráfico ; depois confira o sinal olhando o gráfico.

a) $E(x) = x|x+2| - 1$

b) $E(x) = \dfrac{|x^2 - 5x|}{x}$

c) $E(x) = \dfrac{|(2x^2 + 3x + 2)(x+3)|}{(x+3)}$

d) $E(x) = |x| - |2x - 1| + 3$

e) $E(x) = |x^2 - 1| - x|x - 2|$

f) $E(x) = \dfrac{|x^3 - x^2|}{x} - 2$

g) $E(x) = |x^2 - 1| + 2x - |2x + 1| + x^2$

2)Determine o domínio.

a) $E(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^4 + 5x^2 + 6}}{\sqrt{|x| - 5 + |x+3|}}$

b) $E(x) = \dfrac{1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2+x}}}{\sqrt{\dfrac{x^2 - |x+2| + |x|}{1-x}}}$

3)Resolva usando o teorema da preservação do sinal.

a) $0 \le \dfrac{|x+1| - |x|}{x} \le \dfrac{2}{x}$

b) $x \le \sqrt{3x - 2}$

c) $\sqrt{2x-2} + \sqrt{2-x} > \sqrt{x}$

d) $\sqrt[3]{2x(x-4)} = \sqrt{2x}$

e) $|x| + 2\sqrt{|x^2 + x - 6|}$

f) $x\sqrt{x^2(x^2-2)} + (1-3x)\sqrt{x^2-2} = 0$

4) Resolva abrindo os módulos (sem estudar o sinal).

a) $|x+2| - x|x| - 7 = 0$

b) $||x-1| - 3| - 2|x| - x = 0$

5)Seja $E(x)$ uma expressão com o seguinte quadro de sinais

$+ + + +$	nd	$- - - -$	0	$+ + + + + + + + +$	0	$- - - -$
	0		1		5	

a)Resolva $E(|x| - 1) \ge 0$.
b)Determine o domínio de $\sqrt{E(x-2)}$.
c)Seja $F(x)$ outra expressão com o quadro de sinais dado por

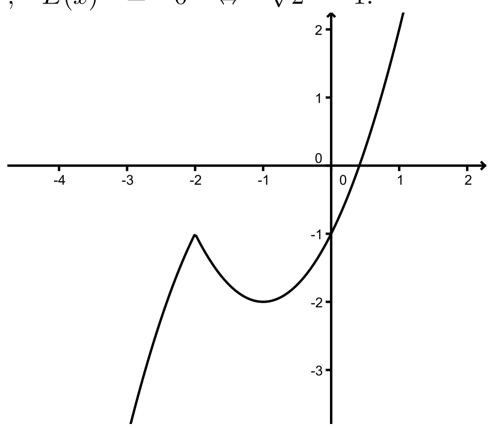
$- - - -$	0	$- - - -$	0	$+ + + + + + +$	nd	$- - - -$
	-2		-1/2		2	

Determine o domínio de $G(x) = \sqrt{E(x)}\sqrt{F(x)}$ e de $H(x) = \dfrac{x}{\sqrt{F(x)E(x)}}$.

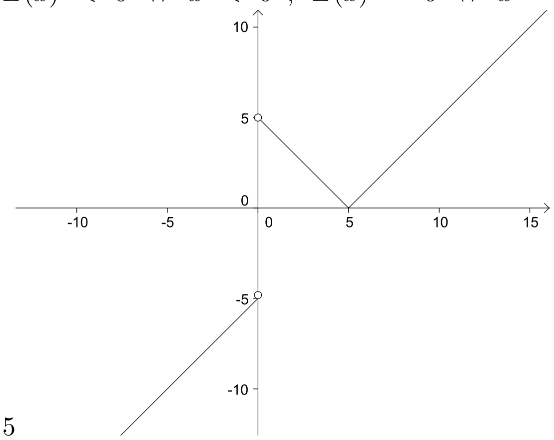
Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

Respostas da lista 4

1. **a)** $E(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{2} - 1$; $E(x) < 0 \Leftrightarrow x < \sqrt{2} - 1$; $E(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1.$

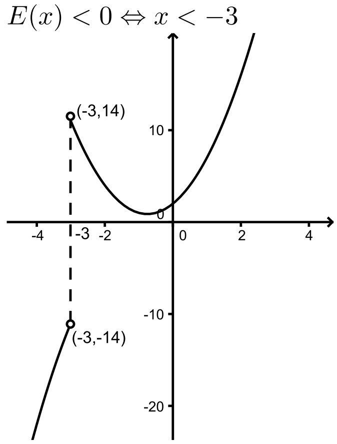


b) $E(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 5$ ou $x > 5$; $E(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$; $E(x) = 0 \Leftrightarrow x =$

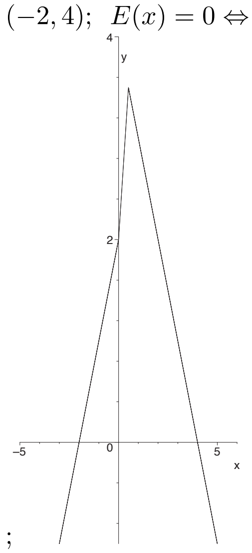


5

c) $E(x) > 0 \Leftrightarrow x > -3$; $E(x) < 0 \Leftrightarrow x < -3$

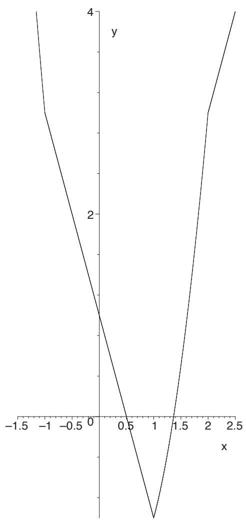


d) $E(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$; $E(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 4)$; $E(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2, 4$

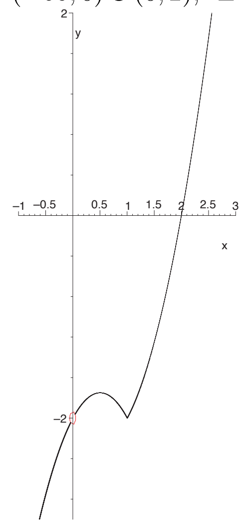


;

e) $E(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1/2) \cup (\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \infty)$;
$E(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1/2, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2})$;
$E(x) = 0 \Leftrightarrow$
$x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, 1/2$;



f) $E(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$; $E(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$; $E(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$;



2. **a)** $D = (-\infty, -4) \cup (1, \infty)$;
   b) $D = (-2, 1-\sqrt{3}) \cup (1, \sqrt{2})$.

3. **a)** Devem ser satisfeitas simultaneamente as 2 inequações : $\dfrac{|x+1| - |x| - 2}{x} \leq 0$, cujo conjunto solução é $S_1 = (0, \infty)$ e $\dfrac{|x+1| - |x|}{x} \geq 0$, cujo conjunto solução é $S_2 = (-\infty, -1/2] \cup (0, \infty)$. Logo, $S = S_1 \cap S_2 = (0, \infty)$;
   b) $S = [1, 2]$
   c) $S = (1, 2)$
   d) $S = \{0, 8\}$
   e) $S = \{2\}$
   f) $S = \left\{ \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}, \pm\sqrt{2} \right\}$

4. **a)** $1) S = \left\{ \dfrac{1-\sqrt{37}}{2} \right\}$;
   b) $S = \{\pm 1\}$

5. **a)** $S = (-1, 1) \cup [2, 6] \cup [-6, -2]$;
   b) $D = (-\infty, 2) \cup [3, 7]$;
   c) Domínio de G: $[-1/2, 0) \cup [1, 2]$; Domínio de H: $(-1/2, 0) \cup (1, 2) \cup (5, \infty)$.

Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 5

Polinômios,pesquisa de raízes

Estudo do sinal

1)Use o método da chave para efetuar a divisão de $p(x)= x^6-2x^4+x^2-x-2$ por $d(x)=x^2+x-1$.

2)O objetivo desse exercício é escrever $\dfrac{x^2-x+1}{x^2(x^2-1)}$ como uma soma de frações parciais mais simples. Assim, determine A,B,C,D, tais que $\dfrac{x^2-x+1}{x^2(x^2-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{x-1}$.

3)Determine os valores de a, tais que o resto da divisão de

a) $p(x)= x^4+4x^3-a^2x^2+3ax-1$ por $(x-1)$ seja 0.

b) $p(x)= x^3-|a|x^2+ax-1$ por $(x+1)$ seja -2.

4)Determine a e b, tais que:

a) o resto da divisão de $p(x)= x^3+ax^2+bx+1$ por $(x-1)$ e $(x+1)$ seja, respectivamente, 2 e 1.

b) $p(x)= x^5-ax^4+bx^3+(a+1)x^2+(2a+b)x-ab-2$ possua raiz nula com multiplicidade 2.

c) $x=1$ seja raiz com multiplicidade 2 do polinômio $p(x)= x^4+ax^3+(2+b)x^2+2ax+2b$.

5)Determine o polinômio de grau 3, mônico(o coeficiente do termo de maior grau é 1), tal que 1 e 2 são raízes do polinômio e $p(3)=30$.

6)Use Briott-Ruffini para checar a fórmula $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+...+xy^{n-2}+y^{n-1})$.

7) Qual é o grau do polinômio $p(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3...(x-100)^{100}$?

8)Se $p(x)=x^4-3x^3+5x^2+mx+n$ é divisível por x^2-3x+2, então $m.n$ é igual a ——— .

9)Se $p(-2)=0$, determine uma raiz de $q(x)=p(x+2)$ e duas raízes de $g(x)=p(x-x^2)$.

10)a)Mostre que $p(x)=2x^3-x+3$ tem uma raiz irracional(não precisa determinar a raiz).

b)Mostre que $\sqrt[n]{a}$ é inteiro ou irracional ,$\forall n,a\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

11)Mostre que $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$.

★Sugestão: Construa um polinômio com coeficientes inteiros que tenha como raiz $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Faça a pesquisa de raízes racionais.

12)a)Mostre que se dois polinômios de grau 2 tiverem 3 pontos em comum, então eles são iguais.

b)Generalize o item a): mostre que se dois polinômios de grau n tiverem $n+1$ pontos em comum, então eles são iguais.

13)Verifique se cada afirmativa abaixo é *falsa* ou *verdadeira*. Se *falsa*, dê um contraexemplo, se *verdadeira*, demonstre-a.

a) A soma entre dois polinômios de grau 4 pode ter grau 3.

b) O quociente entre dois polinômios é sempre um polinômio.

c) Se dois polinômios têm as mesmas raízes , então eles são iguais.

d) O polinômio $p(x)=(x^2+2)^5(x^7-3)$ tem grau 17.

e) Se $p(x)$tem grau 4 e possui 4 raízes reais x_1,x_2,x_3,x_4, então $p(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

14)Encontre as raízes e fatore os polinômios .

a) $p(x) = 6x^3 + 7x^2 - 1$

b) $p(x) = 2x^3 + 9x^2 + 15x + 9$

c) $p(x) = x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}$

15)Dados $p(x) = 6x^3 + 7x^2 - 1$ e $q(x) = 2x^3 + 9x^2 + 15x + 9$ (do ex.14), determine o domínio de :

a) $E(x) = \sqrt{p(x)}$

b) $E(x) = \dfrac{x - \dfrac{1}{2 - 4\sqrt{x}}}{\sqrt[5]{p(x)}}$.

c) $E(x) = \dfrac{1}{\sqrt{p(x)}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{q(x)}}$.

16)Estude o sinal:

a) $E(x) = 4x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 11x - 2$

b) $E(x) = 6x^5 - 27x^4 + 39x^3 - 21x^2 + 12$

17)Resolva:

a) $\dfrac{(x^3 - 2x + 1)(|x| - 1)}{x} \geq \dfrac{(x-1)(|x| - 1)}{x}$

b) $|x^3 + \frac{x}{2} + 6| - |\frac{x}{2} + 6| - x = 0$

18)Esboce os gráficos de

a) $E(x) = \dfrac{|x^3 - 3x + 2|}{x - 1}$.

b) $F(x) = \left|\dfrac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}\right|$

Respostas

1)$p(x) = (x^2 + x - 1)(x^4 - x^3 - x + 2) - 4x$.

2)A=1 ,B=-1 ,C=-3/2 ,D=1/2.

3)a)$a = 4$ ou $a = -1$. b)$a \leq 0$.

4)a)$a = 1/2$ e $b = -1/2$; b)$a = 1$ e $b = -2$; c)$a = -2, b = 1$ neste caso, $p(x) = (x-1)^2(x^2+2)$.

5)$p(x) = (x-1)(x-2)(x+12)$

7)Gr(p(x))=1+2+3+...+100=5050 (Uma PA ,com r=1.)

8)m.n=-54.

9)$x = -4$ é uma raiz de $q(x)$; $x = 2$ e $x = -1$ são raízes de $g(x)$.

10)Como o grau do polinômio é ímpar, então ele possui ao menos uma raiz real. Fazendo a pesquisa de raízes racionais, vemos que nenhum número racional do conjunto de teste $T = \{\pm 1, \pm 3, \pm 3/2, \pm 1/2\}$ é raiz de $p(x)$.

11)Seja $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow (\frac{x^2 - 5}{2})^2 = 6 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Assim, considere o polinômio $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Por construção $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ é raiz de $p(x)$. Como as únicas raízes racionais possíveis para esse polinômio são ± 1, que na verdade nem são raízes, segue que $p(x)$ não possui raiz racional, donde $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

12)a) Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômio que coincidem em x_1, x_2, x_3. Então, o polinômio $g(x) = p(x) - q(x)$ possui grau no máximo 2 e três raízes , pelo Teorema Fundamental da Álgebra segue que $g(x) \equiv 0$. Portanto $p(x) = q(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) Análoga à demonstração de a).

13)a)V- Tome $p(x) = x^4 + x^3 + 1$ e $q(x) = -x^4$.

b)F- Tome o contra-exemplo $p(x) = 1$ e $q(x) = x$, $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ não é polinômio .

c)F- Tome o contra-exemplo $p(x) = 2x(x-1)$ e $q(x) = x(x-1)$

d)V- O primeiro fator tem grau 10 e o segundo grau 7. Quando multiplicamos o grau resultante é 17.

e)F- Qualquer $p(x) = c(x - x_1)...(x - x_4)$ tem grau 4 e tem x_1, x_2, x_3, x_4 como raízes reais.

14)a)$p(x) = (x+1)(2x+1)(3x-1)$.

b)$p(x) = (2x+3)(x+3+\sqrt{3})(x+3-\sqrt{3}))$.

c)$p(x) = (x^2+1)\left(x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

15)a)$D = [-1, -1/2] \cup [1/3, +\infty)$, pois $p(x) \geq 0$

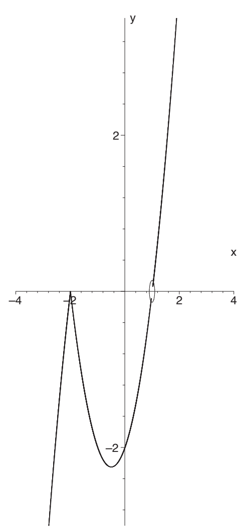
b)$D = \{x \geq 0; x \neq -1, -1/2, 1/3, 1/4\}$, pois $x \geq 0$, $p(x) \neq 0$ e $2 - 4\sqrt{x} \neq 0$

c)$D = (-1, -1/2) \cup (1/3, +\infty)$, pois $p(x) > 0$, e $q(x) \neq 0$.

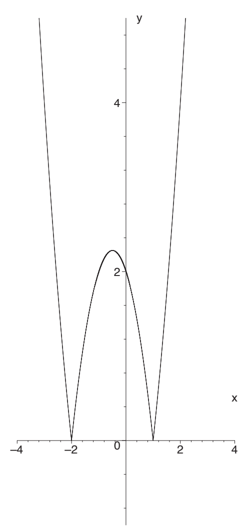
16)a)$E(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (1/4, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}) \cup (2, +\infty)$:
$E(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, 1/4) \cup (\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, 2)$; $E(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/4$ ou $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$
b)$E(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1/2, 2) \cup (2, +\infty)$;$E(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1/2)$; $E(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$ ou $x = 2$.
Nesse caso, $E(x) = 6(x-2)^2(x+1/2)(x^2 - x + 1)$.

17)a)$S = (-\infty, -2] \cup [-1, 0) \cup [1, +\infty)$ b)$S = \{0, \pm 1, -2\}$.

18)



a)



b)

Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 6
Funções; gráficos

1)Uma lata cilíndrica sem tampa é feita para receber 200 cm^3 de líquido. Encontre a área superficial da lata em função de seu raio.

2)Um copo com formato cônico é feito de um pedaço circular de papel de raio 4 cm cortando fora um setor circular de ângulo θ e colando os raios que se formam. Expresse o volume do cone em função de θ.

3)Encontre dois números positivos, cuja soma seja 100 e, tal que o produto entre eles assuma o maior valor posssível.

4)Encontre as dimensões do retângulo com perímetro de 100m, cuja área é a maior possível.

5)a) Determine, em função de x, a área de um retângulo inscrito no semicírculo $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$.

b) Sabendo que o retângulo de maior área que pode ser inscrito no semicículo dado em a) tem como valor de $x \geq 0$ o ponto que é solução da equação

$$2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0,$$

determine esse retângulo e calcule sua área.

6)Esboce os gráficos das funções, desenhando todos os passos necessários para chegar aos esboços.

a) $y = \dfrac{(x+2)^5}{3} - 1$

b) $y = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$

c) $y = 2|x|^3$

d) $y = \sqrt{|x|}$

e) $y = \sqrt{2x - \pi}$

f) $y = \sqrt[3]{|x| - 1} + 2$

g) $y = |||x-2| - 3| - 1|$

h) $y = \dfrac{1}{|2-x|} - \sqrt{2}$

i) $y = 4\sqrt{1 - 2x^2}$

j) $y = |\sqrt{3-x} - 2| + 1$

k) $y = |\sqrt{4 - 2x^2} - 1|$

l) $y = \sqrt{3x - x^2}$

7)Seja $y = ax^2 + bx + c$, uma parábola qualquer, onde $a \neq 0$. Complete o quadrado e mostre que todas as parábolas podem ser obtidas a partir de alongamentos e/ou compressões e/ou translações e/ou reflexões em torno do eixo $0x$, da parábola $y = x^2$.

8)a) Quantas soluções tem a equação $||x^2 - 4| - 2| = 1$? Determine esse número interpretando graficamente.

b) Resolva a equação e determine o conjunto solução.

9)Partindo de $f(x) = x^3$, esboce o gráfico e determine a expressão da função que se obtém transladando o gráfico da f 2 unidades para a esquerda, 1 unidade para baixo, comprimindo horizontalmente de um fator 2 e modulando.

10)Dado o gráfico de $y = f(x)$ abaixo, esboce os gráficos de:

a) $y = f(-3x)$

b) $y = f(3x+2)$

c) $y = \dfrac{f(4x)}{2}$

d) $y = -f(-x)$

e) $y = f(|x|) - 2$

f) $y = f(|x| - 2)$

g) $y = |f(x)| - 1$

h) $y = |f(x-1)| - 1$

i) $y = |f(1-x)| - 1$

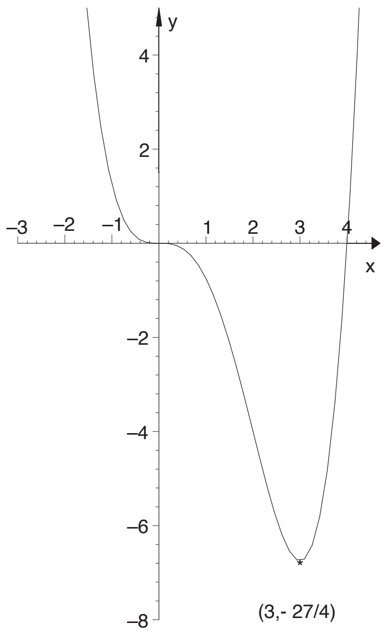


Figura 1: Gráfico do ex.10.

11)Resolva a inequação e interprete graficamente o conjunto solução no plano.

i) $\dfrac{1}{x^2} < x + 2.$ **ii)** $\dfrac{1}{x^3} > x.$ **iii)** $\sqrt{4-(x-1)^2} \geq 1.$

12)Esboce as regiões no plano, calculando os pontos de interseção:

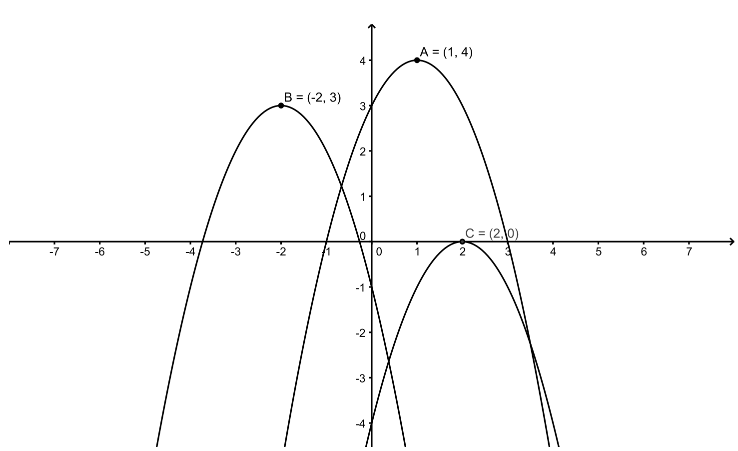
i) Região no 2º quadrante entre $y = x + 2$ e $y = \dfrac{1}{x^2}$.

ii) Região no 1º quadrante, tal que $\sqrt{1+y^2} \leq x \leq 3$.

iii) Região limitada por $y = 3x + 1$ e $y = x^2$.

iv) Região limitada por $y = -x + 1$, $y = 4x^3$ e o eixo oy.

13)A figura abaixo mostra o gráfico de $y = -x^2$ transladado para novas posições. Escreva uma expressão para cada novo gráfico.



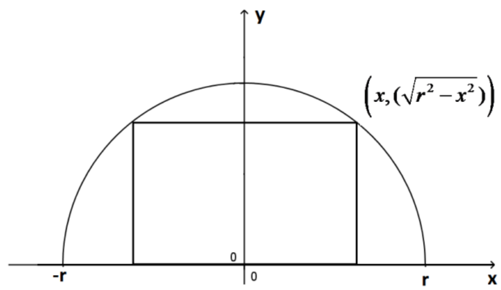
1) $A(r) = \dfrac{400}{r} + \pi r^2, \quad r > 0$.

2) $V(\theta) = \dfrac{8(2\pi - \theta)^2 \sqrt{4\pi\theta - \theta^2}}{3\pi^2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$.

3) $P = x \cdot y = x \cdot (100 - x)$ e o máximo ocorre em $x_V = \dfrac{-100}{-2} = 50$. Logo $x = y = 50$ tornam o produto o máximo.

4) $A = x \cdot y = x \cdot (50 - x)$ e o máximo ocorre quando $x = y = 25$, $A_{\max} = 625 m^2$.

5) a) $A = 2x \cdot y = 2x \cdot (\sqrt{r^2 - x^2})$, $0 < x < r$.



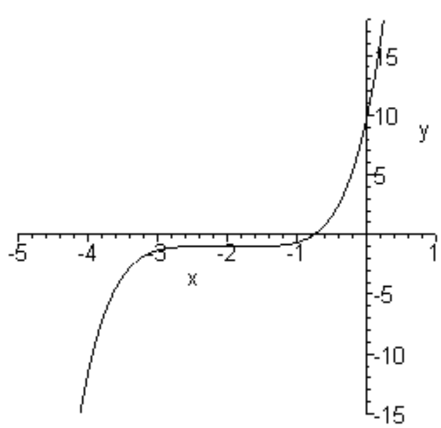
b) Tirando o mmc, a equação dada é equivalente a, p
$\dfrac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{r^2}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ ois $x > 0$.

Dimensões do retêngulo de área máxima: altura: $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$, base $r\sqrt{2}$.

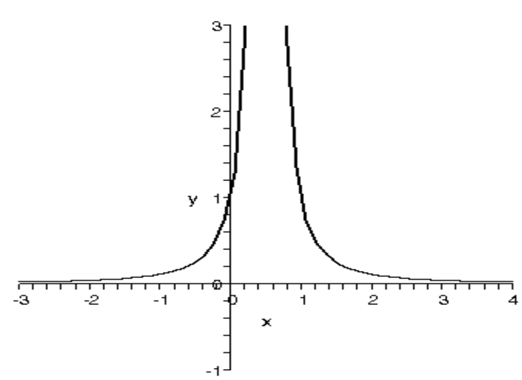
Área máxima é r^2.

6)

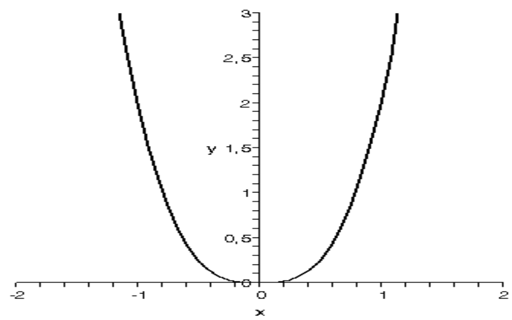
a)



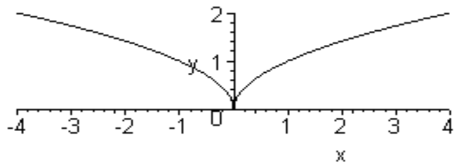
b)



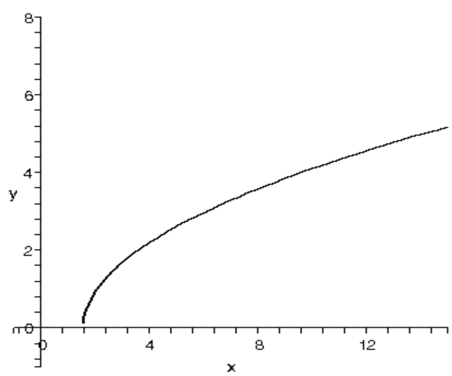
c)



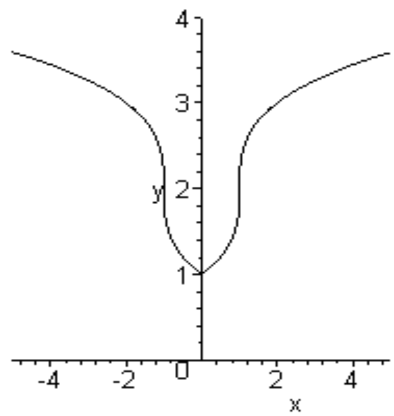
d)



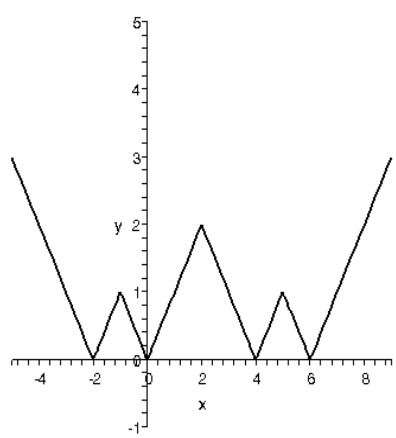
e)



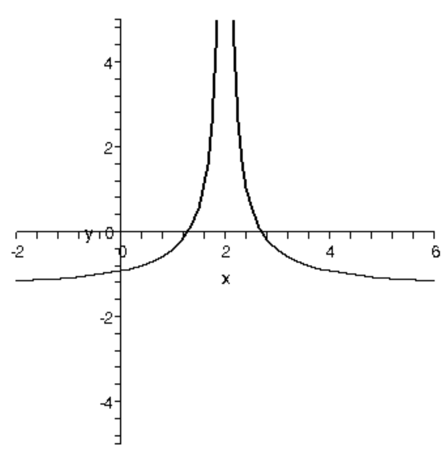
f)



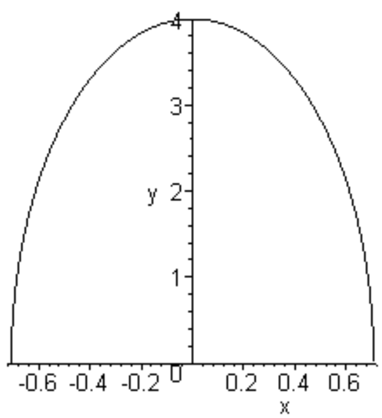
g)



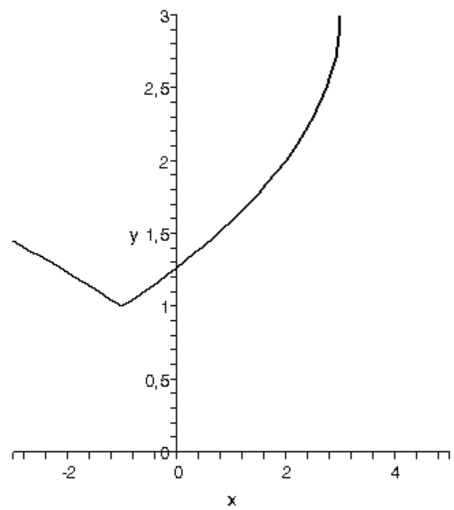
h)



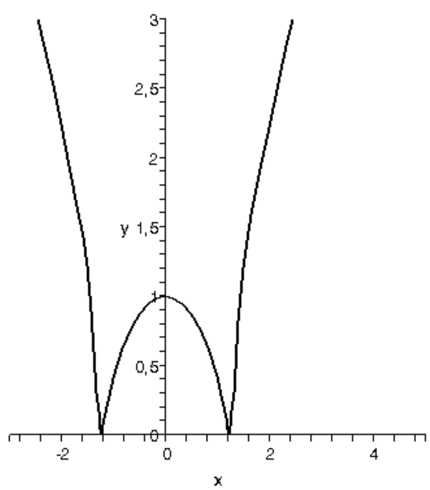
i)



j)



k)



7) Completando o quadrado, temos: $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

<u>1º caso:</u> Suponha $a > 0$.

Se $a = 1$ e $b = 0$, basta uma translação vertical de $|c|$ unidades, para cima, se $c > 0$ ou para baixo se $c < 0$.

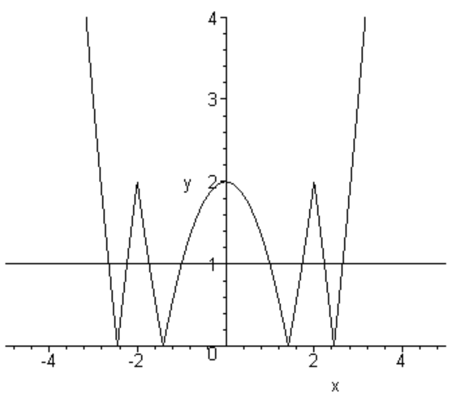
Se $a = 1$ e $b \neq 0$, temos primeiro uma translação vertical de $|b|$ unidades, para esquerda se $b > 0$ ou para a direita se $b < 0$. Depois, se $\Delta = 0$ o gráfico está pronto, mas se $\Delta \neq 0$, fazemos uma translação vertical para cima se $\Delta < 0$, ou para baixo se $\Delta > 0$.

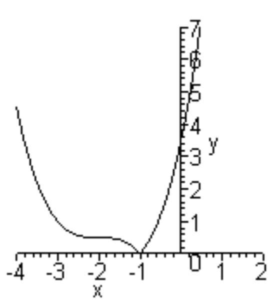
Se $a \neq 1$, devemos primeiro alongar ou ($a > 1$)comprimir ($0 < a < 1$) o gráfico de $y = x^2$ e depois vamos analisando como no caso anterior.

<u>2º caso:</u> Suponha $a < 0$.

Observe que $y = ax^2 + bx + c = -\left((-a)x^2 + (-b)x + (-c)\right)$, o que se enquadra no 1º caso. Portando , o gráfico pode ser traçado seguindo os passos do 1º caso e depois refletindo em torno do eixo Ox .

8) a)Há 8 , veja no gráfico abaixo.b) $S = \left\{\sqrt{7}, -\sqrt{7}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1, -1\right\}$

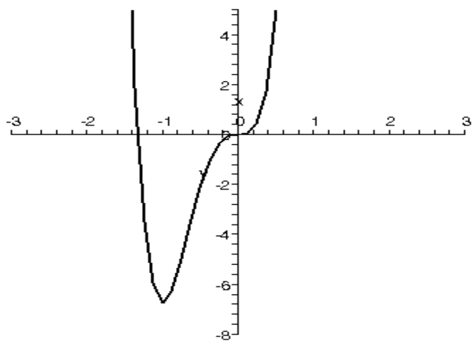




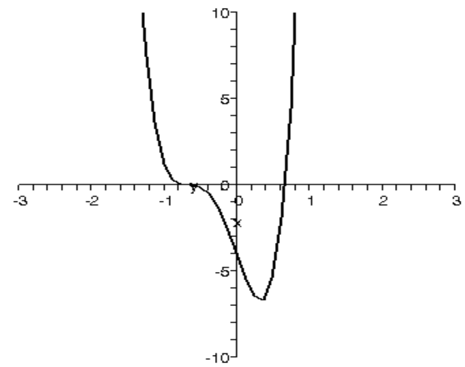
9) $y = \left|\dfrac{1}{2}(x+2)^3 - \dfrac{1}{2}\right|$

10)

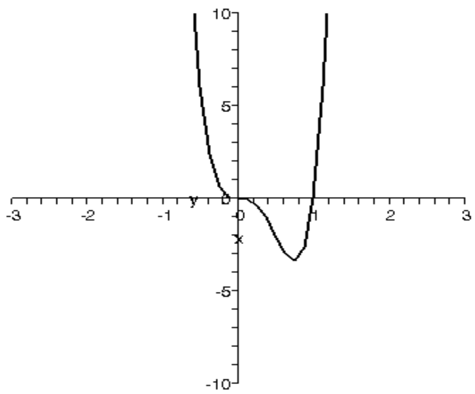
a)



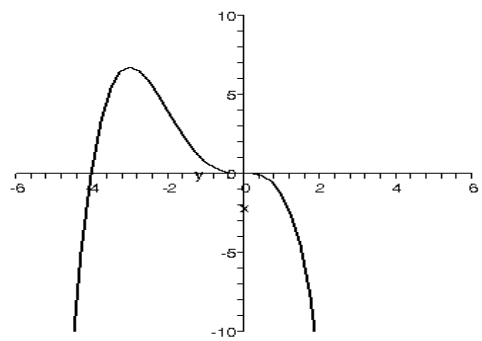
b)



c)

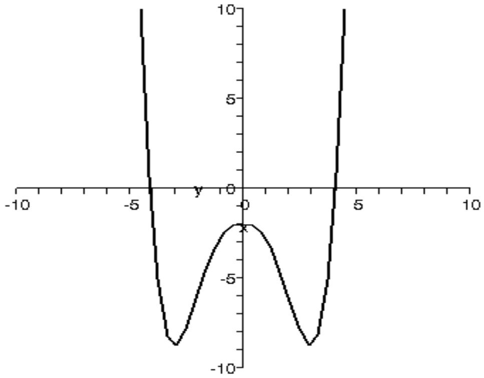


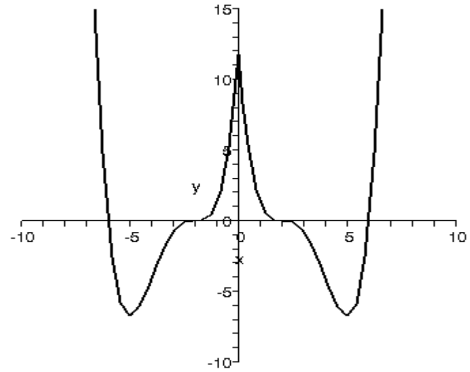
d)



e)

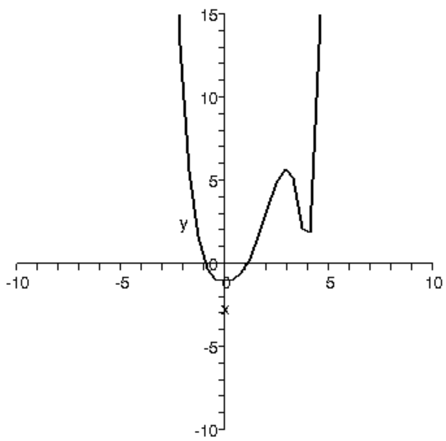
f)

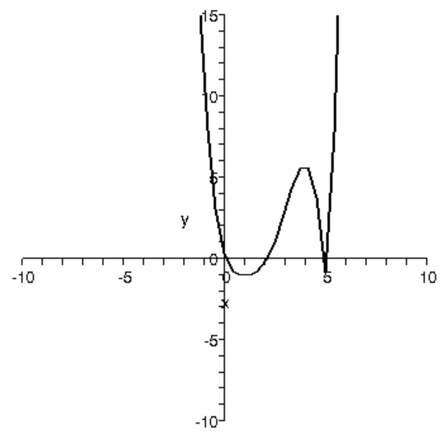

10
5
0
-5
-10
y
x
-10
-5
0
5
10


15
10
5
0
-5
-10
y
x
-10
-5
0
5
10

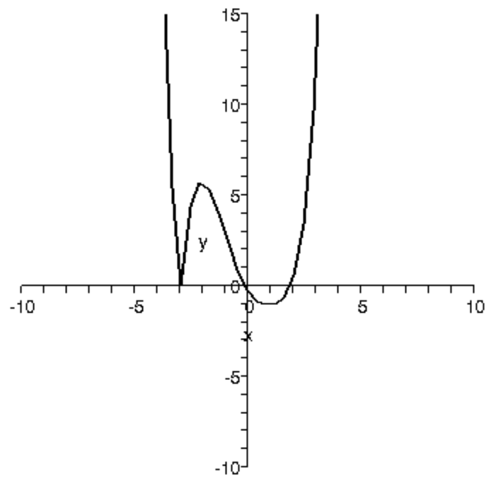
g)

h)


15
10
5
0
-5
-10
y
x
-10
-5
0
5
10


15
10
5
0
-5
-10
y
x
-10
-5
0
5
10

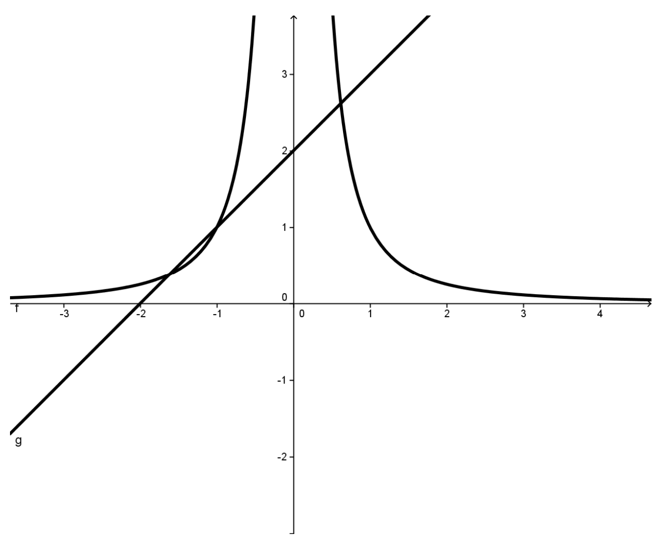
i)



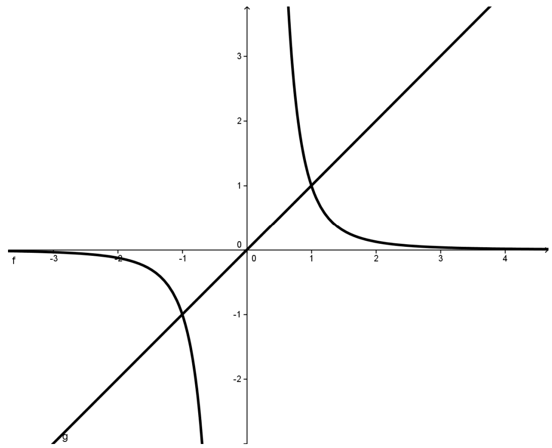
11)

i) $\frac{1}{x^2} < x+2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - (x+2) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^3-2x^2}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 1 < 0,$ pois $x^2 > 0$.

Logo, $(x+1)(x^2+x-1) > 0$. Fazendo o produto de sinais, obtemos $S = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$. S corresponde às abscissas dos pontos sobre os gráficos, onde $y = \frac{1}{x^2}$ está abaixo da reta $y = x+2$.

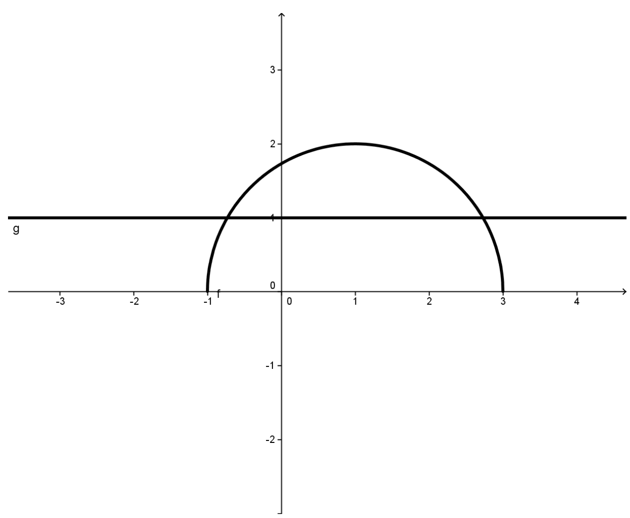


ii) $\dfrac{1}{x^3} > x \Leftrightarrow \dfrac{1-x^4}{x^3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(1-x^2)(1+x^2)}{x^3} > 0$. Temos que $1+x^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Fazendo o produto de sinais entre $1-x^2$ e x^3, obtemos $S = (-\infty,-1) \cup (0,1)$, que corresponde às abscissas dos pontos onde o gráfico de $y = \dfrac{1}{x^3}$ está acima da reta $y = x$.



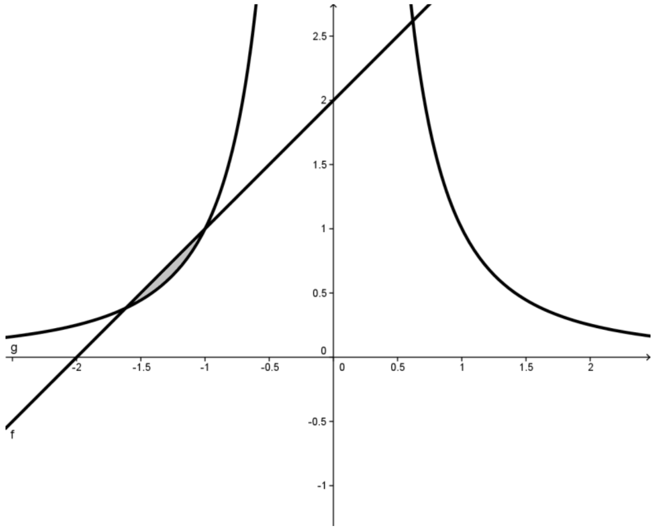
iii) $y = \sqrt{4-(x-1)^2} \Leftrightarrow y^2 + (x-1)^2 = 4$ (circunferência de raio 2 e centro (1,0)), para $y \geq 0$, $\sqrt{4-(x-1)^2} \geq 1 > 0 \Leftrightarrow 4-(x-1)^2 \geq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 3 \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3}$. Logo, $S = \left[1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right]$. S corresponde às abscissas em que a circunferência está acima ou intercepta a reta $y = 1$.

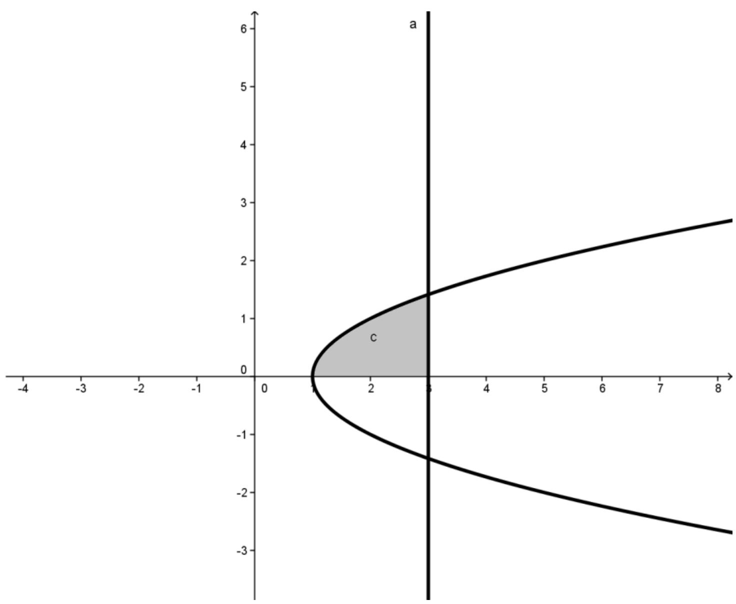


12)

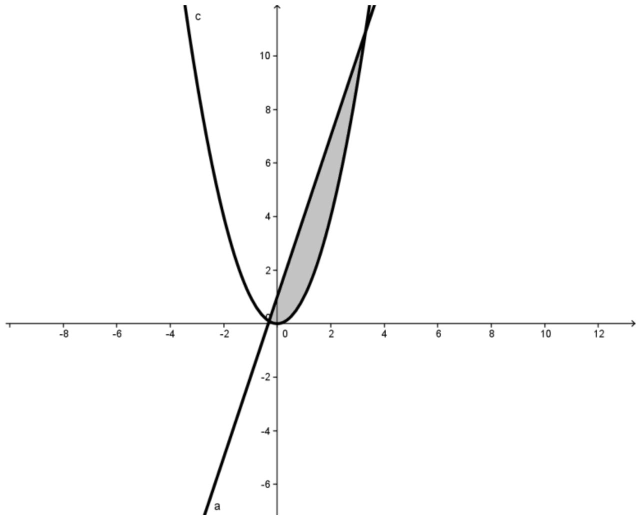
i) $R=\left\{(x,y),\dfrac{1}{x^2}\le y\le x+2,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\le x\le -1\right\}$



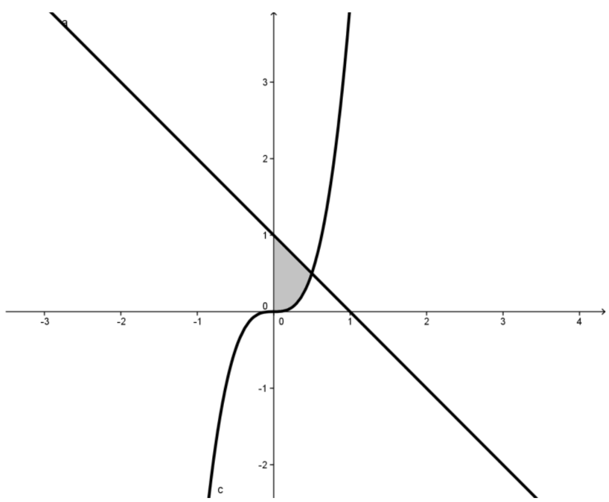
ii) $x=3$



iii) $x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ e $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.



iv) Note que $4x^3 = 1 - x \Leftrightarrow 4x^3 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})(4x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.



13)

a) $y = -(x-1)^2 + 4$.

b) $y = -(x+2)^2 + 3$

c) $y = -(x-2)^2$

Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 7

Funções compostas e inversas.

Gráficos de composições envolvendo o módulo.

1) Para as funções abaixo, determine o domínio e a expressão da $f \circ g$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$.

b) $f(x) = \sqrt{|x|-1}$, $g(x) = x - 1$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = 2x^2 - 10x + 21$.

2) Dadas $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$, determine:

a) O maior subconjunto de $\mathbb{R}$, onde $f \circ g$ está bem definida e sua expressão.

b) Idem ao item a) para $g \circ f$.

3) Complete a tabela :

$g(x)$	$f(x)$	$f \circ g(x)$
$x-7$	$\sqrt{x}$	?
?	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
?	$1+1/x$	x
$1/x$	?	$\sqrt{x}$

4) Determine $f \circ g(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} |x|-1, & \text{se } -3 \le x \le 3; \\ x, & \text{se } x > 3 \text{ } ou \text{ } x < -3. \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \ge 0; \\ 2x+1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Esboce os três gráficos.

5) Se $f(x) = 3x^4 - x^2 + 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$, é correto afirmar que $f \circ g(x) = 3x^2 - x + 1$ e seu domínio é $\mathbb{R}$?

6) Esboce o gráfico de cada função abaixo e verifique se cada uma é inversível. Em caso afirmativo,

a) trace o gráfico de f^{-1};

b) determine a expressão de f^{-1} ;

c) confirme as igualdades $f \circ f^{-1}(x) = x$ e $f^{-1} \circ f(x) = x$, especificando, em cada igualdade, o domínio da variável x.

i) $f(x) = x^2 + 1,\ x \ge 0$.

ii) $f(x) = x^2 + 1,\ x \le 0$.

iii $f(x) = x^2 - x,\ \ x > 0$

iv) $f(x) = x^2 - 2x + 1,\ x \ge 1$.

v) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x},\ x > 0$.

vi) $f(x) = \sqrt{4-2x^2},\ -\sqrt{2} \le x \le 0$.

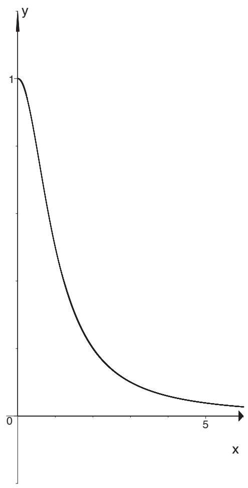
vii) $f(x) = 3 - \sqrt{1-x}, x \le 1$.

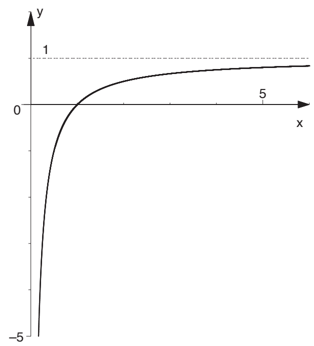
7) Considere $p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$.

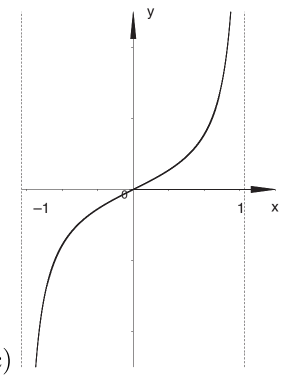
a) Determine as raízes de $p(x)$ e fatore-o.

b) Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{p(x)}$.

c) Esboce o gráfico de $y = \left|\dfrac{p(x)}{x-2}\right|$.

a) 

b) 

c) 

8) As figuras acima são gráficos de funções inversíveis $y = f(x)$. Determine o domínio, a imagem de f^{-1} e esboce seu gráfico (não precisa dar a expressão da inversa!) no mesmo sistema de coordenadas da f.

Questões de provas anteriores

9) Considere $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$, $x \neq 1$.

- **a)** Esboce o gráfico da f.(Sugestão: primeiro divida os polinômios).
- **b)** Determine o conjunto imagem da f, $Im(f)$.
- **c)** Verifique graficamente que a $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow Im(f)$ é inversível. Determine a expressão de f^{-1}, seu domínio e sua imagem.

10) Esboce, passo a passo, o gráfico de

- **a)** $y = 3\sqrt{4-|x|} + 1$.
- **b)** $y = \left|\dfrac{3}{1-|x|}\right| - 1$, $x \neq \pm 1$.

11) **a)** Esboce passo a passo o gráfico de $y = -(x-1)^4 + \dfrac{1}{16}$.

- **b)** Seja $f : (-\infty, \frac{3}{4}] \longrightarrow I$

  $x \longmapsto -(x-1)^4 + \dfrac{1}{16}$

  Determine o intervalo I, tal que a f seja bijetiva. Justifique.
- **c)** Para o intervalo I acima, encontre a expressão da f^{-1}, especificando seu domínio e imagem.
- **d)** Esboce o gráfico da f^{-1}.

Respostas :

1) a) $f \circ g(x) = f(\sqrt{x-1}) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}-2}$, $\forall x \in D = [1,5) \cup (5,\infty)$.

b) $f(g(x)) = f(x-1) = \sqrt{|x-1|-1}$ $, \forall x \in D = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

c) $f(g(x)) = f(2x^2 - 10x + 21) = \dfrac{1}{2x^2 - 10x + 21}$ $, \forall x \in \mathbb{R}$

2) a) Devemos ter $x \neq 0$ e $9 - x^2 \geq 0$, logo $D(f \circ g) = (-\infty, -1/3] \cup [1/3, +\infty)$. Além disso,

$$f \circ g(x) = \frac{\sqrt{9x^2-1}}{|x|} \ , \forall x \in D.$$

b) $g(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{9x^2-1}}$, $\forall x \in D = (-3, 3)$

.

3)

$g(x)$	$f(x)$	$f \circ g(x)$
$x - 7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$\dfrac{1}{x-1}$	$1 + 1/x$	x
$1/x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$

4)

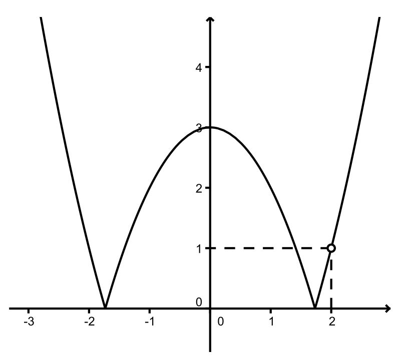
5) Não, seu domínio é $D = [0, \infty)$. Devemos determinar o domínio da composta $f \circ g$ analisando o domínio da g e fazendo a interseção com os valores de x, tais que a imagem da g esteja contida no domínio da f.

6)

7) a) Fazendo a pesquisa de raízes inteiras, vemos que o conjunto para teste é $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ e $p(2) = 0$. Fatorando o polinômio, obtemos $p(x) = (x-2)(x^2-3)$.

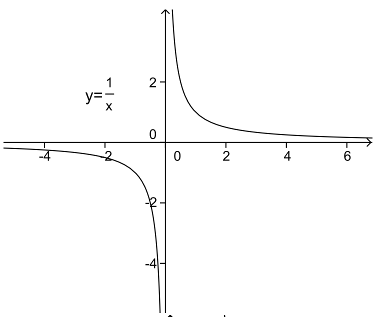
b) O domínio é composto pelos x, tais que $p(x) \geq 0$. Fazendo o produto dos sinais, vemos que $D = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup [2, \infty)$

c) Note que, de a), $y = \left|\dfrac{p(x)}{x-2}\right| = |x^2 - 3|, \ \ \forall x \neq 2$. Assim, o gráfico é dado pela figura abaixo.

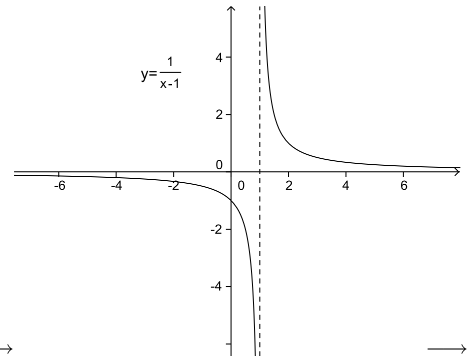


8)

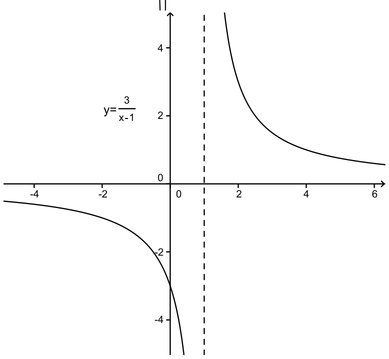
9) a) Efetuando a divisão, obtemos $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x-1}$, assim o gráfico pode ser traçado, partindo de $y = \dfrac{1}{x}$, transladando de 1 unid. para a direita ($y = \dfrac{1}{x-1}$), depois alongando verticalmente de um fator $3(y = \dfrac{3}{x-1})$, refletindo em torno de ox $(y = -\dfrac{3}{x-1})$ e depois transladando para cima de 2 unid.$(y = 2 - \dfrac{3}{x-1})$.Observe os passos nas figuras a seguir.



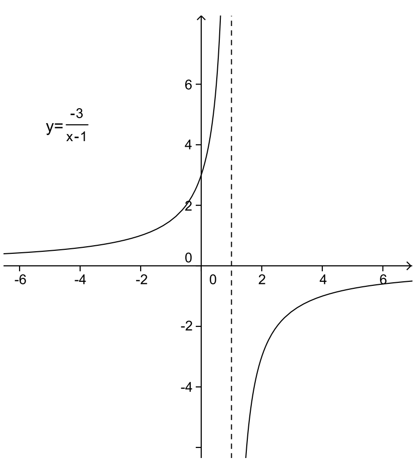
$\longrightarrow$



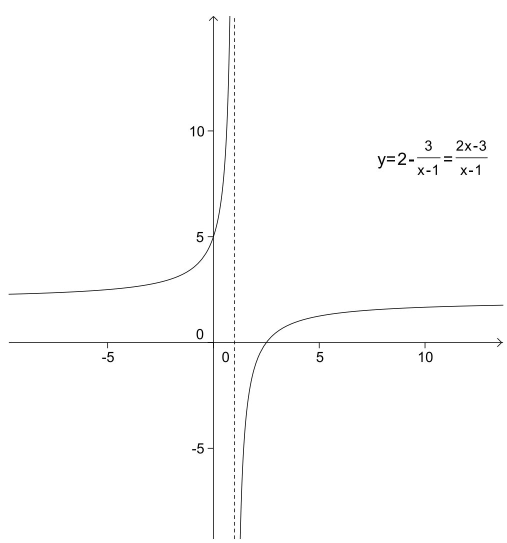
$\longrightarrow$



$\longrightarrow$



$\longrightarrow$



b) c

c) b

LISTA 8

1. Quando o sol está a $60°$ acima do horizonte, qual é o comprimento da sombra projetada no solo por um edifício de $27m$ de altura?

2. Um avião voando a uma velocidade constante de 360 km/h, subindo a um ângulo de $30°$, passa por um ponto P que está no solo, a uma altura de 12km. Determine a distância de P ao avião, 1 minuto após o avião passar sobre o ponto P.

3. Para determinar a largura aproximada de um rio, sem atravessá-lo, um engenheiro procedeu da seguinte maneira:
   - construiu um plano vertical imaginário contendo uma reta horizontal na direção perpendicular ao rio e de forma que mirando o topo de uma árvore na margem oposta, esse topo seja um ponto P do plano vertical.
   - de um ponto A da margem, na direção da mesma perpendicular ao rio, avistou o topo P da árvore sob um ângulo de $38°$ com a horizontal.
   - recuando $15m$ na mesma direção perpendicular ao rio, até um ponto B, visou novamente o topo da árvore, registrando $26°$ com a horizontal.

   Com esses dados ele fez os cálculos necessários. Qual a largura do rio?

4. Uma esfera de raio r é colocada no interior de uma cavidade cônica. sabe-se que o raio da base da cavidade é $5\,cm$ e o ângulo entre as geratrizes da cavidade situadas em um plano vertical à essa cavidade é de $60°$.
   (a) Calcular a distância aproximada do centro da esfera de raio r ao vértice do cone, se $r = 4\,cm$.
   (b) Qual deve ser, aproximadamente, o raio da esfera para que o topo da mesma seja o centro da base do cone?

5. Calcule o valor da expressão $y = \dfrac{\tan x + \cot x}{\sec x + \csc x}$, sabendo que $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{2}{3}$.

6. Calcule o valor da expressão $y = \operatorname{sen}(2x)$ se $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad 0 \le x \le \pi$.

7. Calcule o valor de y, se $y = \cos 75° + \cos 15°$.

8. Determine m para que exista x, em cada caso:
   (a) $\cos x = m^2 - 8$ (b) $\cos x = \dfrac{3-7m}{4}$ (c) $2\operatorname{sen} x + 1 = m$

9. Prove que cada identidade é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$:
   (a) $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x + \cos 2x = 0$ (b) $(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 + (\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x))^2 = 2$

10. Simplique as expressões:
    (a) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi + x)}{\operatorname{sen}(\pi - x) \cdot \cos(x - 2\pi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$ (b) $\dfrac{\tan x + \cot x}{\csc^2 x}$

11. Resolva e marque a solução no círculo trigonométrico.
    (a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
    (b) $\cos x - 4\cos^5 x = 0$
    (c) $|\operatorname{sen} x - 1| = \frac{1}{2}$
    (d) $2\operatorname{sen}^2 x - 3\cos x - 3 = 0$
    (e) $2\cos^3\theta + 6\cos\theta - \cos^2\theta - 3 = 0$
    (f) $2\operatorname{sen} x - \cos x = 1$
    (g) $\frac{-1}{2} \le \operatorname{sen} x \le \frac{1}{2}$
    (h) $2\cos^2 x - \cos x < 0$
    (i) $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
    (j) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 4x = 0$
    (k) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x} \ge \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, para $0 < x < 2\pi,\ x \ne \frac{\pi}{2}, \pi$
    (l) $4\operatorname{sen} x < \dfrac{1}{\cos x}$, para $0 \le x \le 2\pi,\ x \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

(m) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x - 1} > 0,$
para $0 \leq x \leq 2\pi,\ x \neq \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(n) $|\cos 4x| = 1$

(o) $]2\operatorname{sen} x|\operatorname{sen} x| - 1 \leq 0$

12. Esboce os gráficos passo a passo.

(a) $f(x) = |\cos x - \frac{1}{2}|$
(b) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4}),\ 0 \leq x \leq 2\pi$
(c) $f(x) = \operatorname{sen}(2x - \pi)$
(d) $f(x) = -3\operatorname{sen}|x|$
(e) $f(x) = |\tan(x - \frac{\pi}{4}) - 1|$
(f) $f(x) = |\cos(\pi - x)| - 1$
(g) * $f(x) = 5\operatorname{sen} x \cos x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$
(h) * $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2},\ -\pi \leq x \leq \pi$
(i) *$f(x) = \sqrt{1 - \cos^2(\frac{x}{2})}$
(j) $f(x) = 2\arctan(x + 1)$

*Use primeiro alguma identidade trigonométrica.

13. Calcule:

(a) $\operatorname{arcsen}(\frac{\sqrt{3}}{2})$ (b) $\arctan(-1)$ (c) $\arccos(-1)$

14. Prove que $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2},\ \forall x \in [-1, 1]$.

15)Determine o domínio das funções

a) $f(x) = \dfrac{1 - \dfrac{1}{x}}{4\operatorname{sen} x \cos x - 1}.$

b) $f(x) = \sqrt{2\operatorname{sen}^2 x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 2x} + \dfrac{x}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\operatorname{sen} x}}$

RESPOSTAS DA LISTA 8 - Trigonometria

1. $9\sqrt{3}\ m$

2. $h = 6\sqrt{7}\,km$

3. $25,34\,m$

4. (a) $8\,cm$ (b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}\,cm$

5. $\frac{3}{2}$

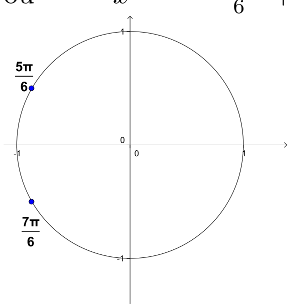
6. $-\frac{2}{3}$

7. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

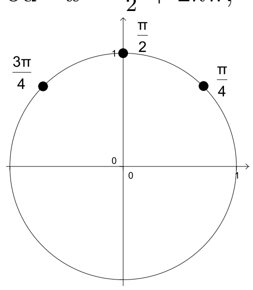
8. (a) $-3 \leq m \leq -\sqrt{7}$
ou $\sqrt{7} \leq m \leq 3$
(b) $1 \leq m \leq \dfrac{11}{3}$
(c) $-1 \leq m \leq 3$

10. (a) $\cot x$ (b) $\tan x$

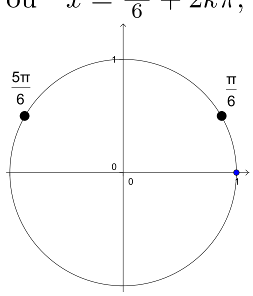
11. (a) $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



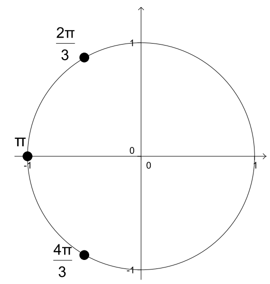
(b) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



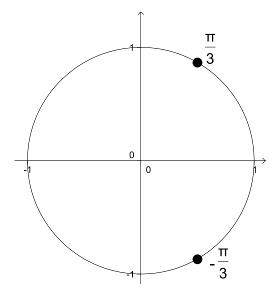
(c) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



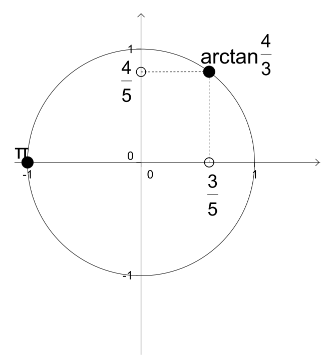
(d) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



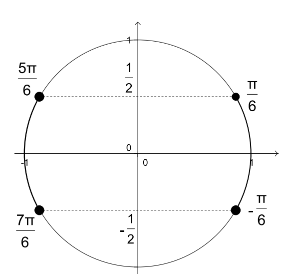
(e) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



(f) $x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $x = \arctan\frac{4}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

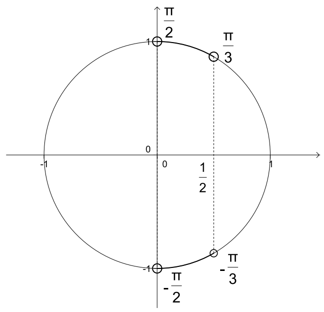


(g) $-\frac{\pi}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ou $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



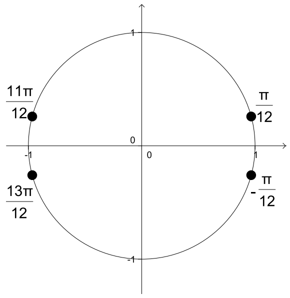
(h) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

ou $\quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



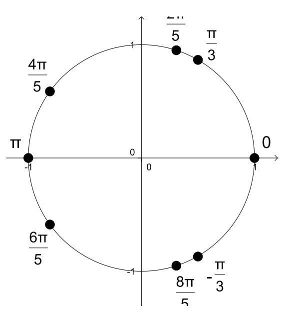
(i) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

ou $\quad x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

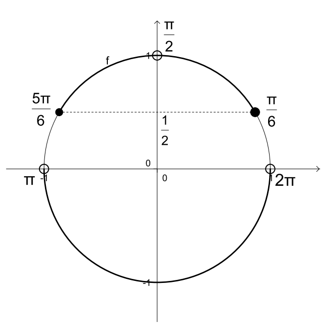


(j) $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

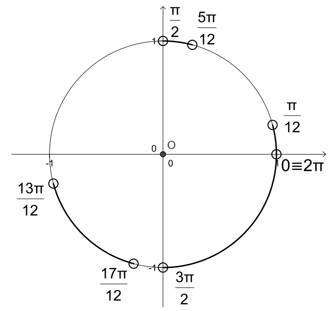
ou $\quad x = \dfrac{2k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$



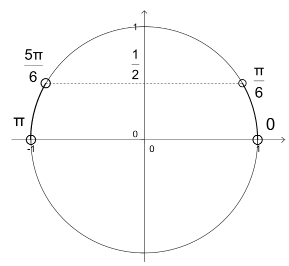
(k) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup (\pi, 2\pi)$



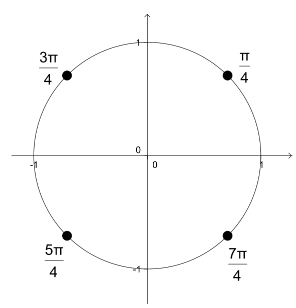
(l) $\left(0, \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$



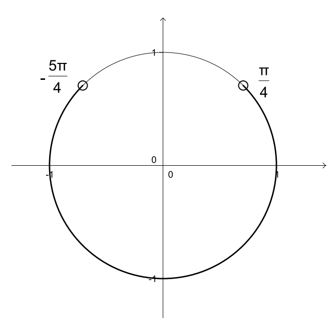
(m) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$



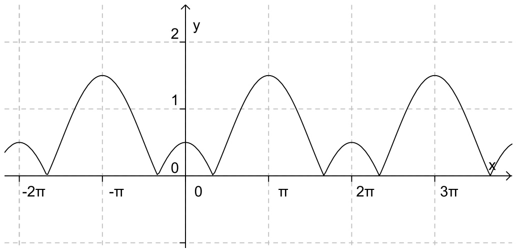
(n) $x = \frac{k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$



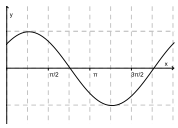
(o) $-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



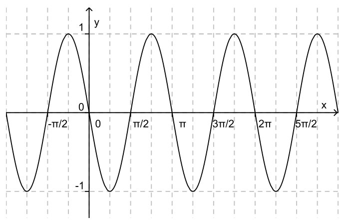
12. (a)



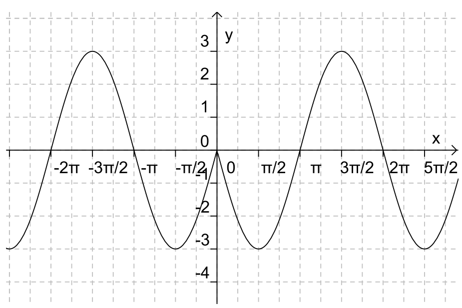
(b)



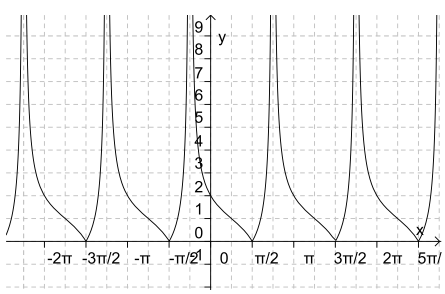
(c)



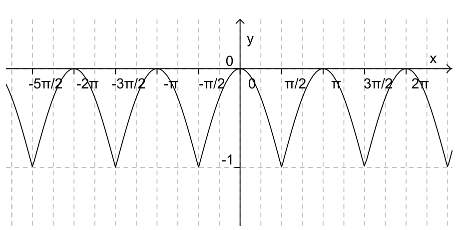
(d)



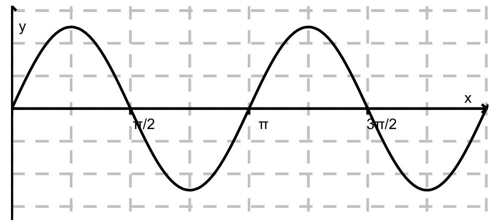
(e)



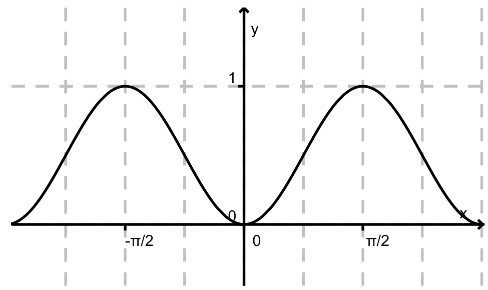
(f)



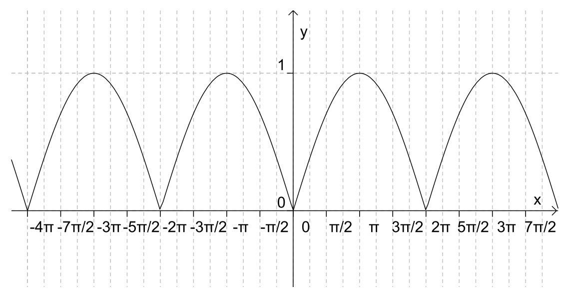
(g)



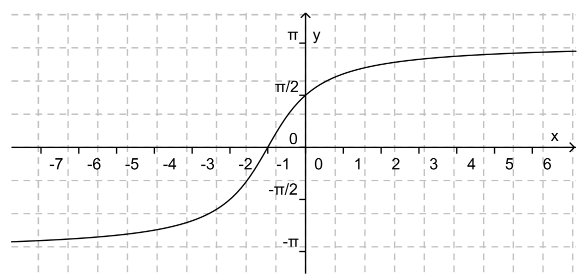
(h)



(i)



(j)



13. (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $-\frac{\pi}{4}$ (c) π

14. Queremos calcular $\cos(\operatorname{arcsen} x)$.

Considere $\theta = \operatorname{arcsen} x$.

Nesse caso, sabemos que

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \cos\theta \geq 0, \quad x = \operatorname{sen}\theta.$

Queremos calcular $\cos\theta$. Mas,

$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta \Longrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}.$

Como $\cos\theta \geq 0$, $\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$

Como $x = \operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta = \sqrt{1 - x^2}$,

Como $\theta = \operatorname{arcsen} x$, $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$.