UNIMONTE, Engenharia – Laboratório de Física Mecânica	
Estudo Teórico Sobre Análise Dimensional	
Turma: ____________________ Data: __________ : Nota:__________	
Nome: ______________________________	RA: ______________

Introdução

A análise dimensional é um assunto fundamental que estuda as grandezas físicas em geral, com respeito às duas dimensões. Como as grandezas físicas sempre estão associadas a dimensões e unidades, podemos dizer o estudo de análise dimensional está em todos os ramos da Física.

Estudaremos os conceitos iniciais sobre como a partir de um número limitado de grandezas físicas fundamentais podemos criar outras grandezas derivadas, e como utilizar princípios fundamentais de análise dimensional pode nos ajudar a entender e até prever o formato de fórmulas envolvendo grandezas físicas.

Denominamos grandezas físicas fundamentais um grupo limitado de grandezas que vão nos servir como base para escrevermos outras grandezas. Na Mecânica, por exemplo, definimos as grandezas fundamentais como sendo massa, comprimento e tempo, pois essas são grandezas que não necessitam de outras para serem definidas. As outras grandezas da mecânica, como velocidade, aceleração, etc., serão escritas como uma combinação das grandezas fundamentais, conforme veremos. O Sistema Internacional de Unidades define sete grandezas fundamentais, e associa a cada uma delas uma dimensão, representada por uma letra. São elas:

Grandeza de Base	Símbolo da dimensão[1]
Massa	M
Comprimento	L
Tempo	T
Corrente elétrica	I

[1] Inmetro, 2013

Temperatura termodinâmica	Θ
Quantidade de substância (moles)	N
Intensidade luminosa	J

Os números puros que aparecem nas fórmulas, assim como π, e, seno, cossenos, tangente, são adimensionais. Nas fórmulas dimensionais, que veremos adiante, eles aparecem como iguais a "1".

Para indicar que nos referimos à dimensão de uma grandeza, colocamos essa grandeza entre colchetes. Veja esses exemplos:

$m \Rightarrow massa$
$[m] \Rightarrow dimensão\ da\ massa = M$

$\Delta x \Rightarrow deslocamento$
$[\Delta x] \Rightarrow dimensão\ do\ deslocamento = L$

$T \Rightarrow Tempo\ que\ um\ pêndulo\ leva\ para\ dar\ uma\ oscilação\ completa\ (período)$
$[T] \Rightarrow dimensão\ do\ período = T$

Fórmula Dimensional

Todas grandezas físicas além das fundamentais podem ser expressas matematicamente em função das grandezas físicas fundamentais, através de uma fórmula dimensional.

Na Física Mecânica, por exemplo, uma grandeza mecânica (X), que depende da massa, do comprimento e do tempo, tem sua fórmula dimensional escrita da seguinte forma:

$$[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{M^a \cdot L^b \cdot T^c}$$

onde a, b, c representam dimensões das grandezas; os colchetes identificam uma equação dimensional, devemos colocar a grandeza entre colchetes.

Exemplo 1: Determine a fórmula dimensional da velocidade escalar linear.

Solução: A fórmula da velocidade é uma fórmula dimensional. Logo, para definirmos a fórmula dimensional de v, devemos fazer:

$$[v] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} \Rightarrow [v] = \frac{L}{T} \Rightarrow [v] = L^1 \cdot T^{-1}\ \ ou\ [v] = M^0 L^1 T^{-1}$$

Observe que, só podemos somar grandezas de mesma dimensão, ou seja L + L, M + M, e T + T, e assim por diante. A resultado da soma será a mesma dimensão. Por exemplo, seja a fórmula para calcular a distância D composta por três trechos A, B e C:

$$D = A + B + C$$

A fórmula dimensional será:

$$[D] = [A] + [B] + [C]$$

$$L = L + L + L$$

Por que não escrevemos 3L? Porque não estamos lidando com os comprimentos em si, mas com a dimensão dos comprimentos. A soma de três comprimentos resulta também em um comprimento. Assim, na análise dimensional, teremos que:

$$L + L = L$$

$$T + T = T$$

$$M + M = M$$

Exercícios de Aplicação

Utilizando-se dos símbolos dimensionais das grandezas fundamentais do S.I., determine as fórmulas dimensionais da seguintes equações:

$a)\ Aceleração\ linear: a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

....

....

....

....

$b)\ Força: F = m \cdot a$

....

....

....

....

$c)\ Energia\ cinética: E_c = \dfrac{m \cdot v^2}{2}$

....

....

....

....

$d)\ Trabalho: \tau = F \cdot \Delta x \cdot \cos\alpha$

....

....

....

....

$e)\ Pressão: P = \dfrac{F}{A}$

....

....

....

....

$f)\ Área\ do\ trapézio: A = \dfrac{B + b}{2} \cdot h$

....

....

....

....

$g)\ Área\ do\ círculo: A = \dfrac{\pi \cdot d^2}{4}$

....

....

....

....

$h)$ $Perímetro\ da\ circunferência: P = \pi \cdot d$

....

....

....

....

$i)$ $Constante\ elástica\ da\ moda: k = \frac{F}{\Delta x}$

....

....

....

....

Homogeneidade Dimensional

Uma equação que traduz uma lei física é homogênea. Isso significa que as parcelas que constituem os dois membros da igualdade apresentam os mesmos símbolos dimensionais, tendo respectivamente as mesmas dimensões.

Exemplo 2: Verifique se há homogeneidade na equação definida da energia potencial gravitacional $E_g = m \cdot g \cdot h$

Solução: Comparamos a fórmula dimensional do primeiro membro com a do segundo:

1º membro → $[E_g] = M \cdot L^2 . T^2$

2º membro → $[m \cdot g \cdot h] = M \cdot \frac{L}{T^{-2}} \cdot L = M \cdot L \cdot T^2 \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^2$

A fórmula dimensional de ambos os membros é igual, de modo que a equação analisada é dimensionalmente homogênea.

A homogeneidade dimensional de uma equação é critério de verificação de sua validade, ou seja, é uma das condições necessárias para que uma equação seja correta.

Exercícios de Aplicação

Verifique se há homogeneidade nas equações abaixo:

$a)\ x_2 = x_1 + v \cdot \Delta t$

....

....

....

....

$b)\ F = m \cdot \mathrm{a}$

....

....

....

....

$c)\ E = m.c^2$

....

....

....

....

$d)\ x_2 = x_1 + v_1 \Delta t + \dfrac{a \Delta t^2}{2}$

....

....

....

....

$e)\ v_2^2 = v_1^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x$

....

....

....

....

$f)\ v_2 = v_1 + a \cdot \Delta t$

....

....

....

....

Teorema de Bridgman

Com esse teorema, é possível determinar qual a fórmula que rege um fenômeno a partir das variáveis que o afetam. Ele diz que se, experimentalmente for constatado que uma determinada grandeza física X depende das grandezas A, B, C, etc, independentes entre si, então a grandeza X pode ser expressa da seguinte forma:

$$X \ = \ K \cdot A^a \cdot B^b \cdot C^c \ \ldots .$$

onde K é um fator numérico, cujo valor é determinado mediante experiências.

Exemplo 3: Numa experiência, verifica-se que o período T de oscilação de um sistema massa-mola depende somente da massa m do corpo e da constante elástica K_{el} da mola. Então, pelo Teorema de Bridgman:

$$X \ = \ K \cdot A^a \cdot B^b \cdot C^c \ \ldots . \ \Rightarrow T = K \cdot m^a \cdot k_{el}^b$$

Deseja-se calculara o valor de a e b. Para isso, aplica-se a homogeneidade dimensional na fórmula obtida pelo Teorema de Bridgman. Como T é o período de oscilação, trata-se de tempo. Portanto:

$[T] = T, ou\ [T] = M^0 L^0 T^1$

Do outro lado da igualdade temos:

$$\left[K \cdot m^a \cdot k_{el}^b\right] = \ 1 \cdot M^{\ a} \cdot \left[\frac{\left(M \cdot \frac{L}{T^2}\right)}{L}\right]^b = M^a \cdot \left[M \cdot \frac{L}{T^2} \cdot \frac{1}{L}\right]^b = M^a \cdot M^b \cdot T^{-2b}$$

$$\left[K \cdot m^a \cdot k_{el}^b\right] = M^{a+b} \cdot T^{-2b}$$

Como os dois lados devem ser iguais, faremos:

$M^0 \cdot L^0 \cdot T^1 = M^{a+b} \cdot L^0 \cdot T^{-2b}$

Igualando os expoentes, podemos determinar a e b:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2b = 1 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, temos que:

$$b = -\frac{1}{2} \; e \; a = \frac{1}{2}$$

Substituindo em $T = K \cdot m^a \cdot k_{el}^b$, teremos:

$$T = K \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot K_{el}^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow T = K \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{el}}}$$

Com as experiências, verifica-se que $K = 2\pi$. Assim, a fórmula final fica:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{el}}}$$

<u>Exercícios de Aplicação</u>

1. A força centrípeta F_{cp} depende da massa m da velocidade escalar v do objeto e do raio r da órbita do movimento. Determinar a equação da força centrípeta.

....

....

....

....

....

....

2. Determine os valores de x, y e z para que a equação: (força)^x (massa)^y = (volume) (energia)^z seja dimensionalmente correta.

....

....

....

....

....

....

3. Na equação dimensional homogênea $x = a \cdot t^2 - b \cdot t^3$, em que x tem a dimensão de comprimento L e t tem T, as dimensões a e b são, respectivamente iguais a?

....

....

....

....

....

....

Exercícios Propostos

1. O quociente da unidade de força dividida pela unidade de velocidade pode ser utilizado para medir:

a) potência
b) trabalho
c) vazão volumétrica de gás
d) vazão volumétrica de líquidos
e) vazão de massas

2. A intensidade F da força que age em uma partícula é dada em função do tempo t conforme a expressão $F = A + Bt$ onde A e B são parâmetros constantes e não nulos. Adotando como fundamentais as grandezas massa M comprimento L e tempo T, obtenha as equações dimensionais dos parâmetros A e B.

3. Na expressão $F = Ax^2$, F representa força e x um comprimento. Se MLT^{-2} é a fórmula dimensional da força, a fórmula dimensional de A é igual a?

a) $ML^{-1}T^{-2}$

b) $ML^{3}T^{-2}$

c) L^2

d) MT^{-2}

e) M

4 . Um físico apresentou uma teoria reformulando alguns conceitos nas leis de Mecânica Newtoniana. Um jornal, pretendendo reproduzir essa teoria, apresentou como expressão da intensidade da força gravitacional F entre duas partículas de massas m_1 e m_2, separadas por uma distância r, a relação:

$$F = \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot (1 + v^2 + r \cdot a)$$

onde v é a intensidade da velocidade relativa e a é a intensidade da aceleração relativa entre os corpos. A respeito desta expressão assinale a opção correta:

a) A expressão pode estar correta apenas quando $v = 0$ e $a = 0$.

b) A expressão é dimensionalmente correta.

c) A expressão é dimensionalmente absurda, pois só podemos somar parcelas que tenham a mesma equação dimensional, além disso, mesmo no caso em que $v = 0$ e $a = 0$, o segundo membro não tem equação dimensional de força.

d) A expressão estaria dimensionalmente correta se o conteúdo dos parênteses fosse:

$$1 + \frac{v^2}{r \cdot a}$$

e) A expressão está correta.

5**.** Um estudante de física resolvendo certo problema chegou à expressão final:

$$F = 2 \cdot (m_1 + m_2) \cdot v \cdot t^2$$

onde F representa uma força, m_1 e m_2 representam massas, v é uma velocidade linear, t é tempo. Outro estudante resolvendo o mesmo problema chegou à expressão:

$$F = 2 \cdot (m_1 + m_2) \cdot \frac{v}{t}$$

Mesmo sem conhecer os detalhes do problema você deve ser capaz de verificar qual das respostas acima obviamente deve estar errada. Explique qual delas é certamente errada.

6. Na expressão seguinte, x representa uma distância, v uma velocidade, a uma aceleração, e k representa uma constante adimensional. Qual deve ser o valor do expoente n para que a expressão seja fisicamente correta?

$$x = k \cdot \frac{v^n}{a}$$

7. Na análise de determinados movimentos, é bastante razoável supor que a força de atrito seja proporcional ao quadrado da velocidade da partícula que se move, isto é $F_{at} = K \cdot v^2$. A unidade da constante de proporcionalidade K no S. I. é:

$a)\ \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

$b)\ \frac{kg \cdot s^2}{m^2}$

$c)\ \frac{kg \cdot m}{s}$

$d)\ \frac{kg}{m}$

$e)\ \frac{kg}{s}$

8. Num movimento oscilatório, a abscissa x da partícula é dada em função do tempo t por $x = A + B\ cos\ (Ct)$, onde A, B e C são parâmetros constantes não nulos. Adotando como fundamentais as dimensões M (massa), L (comprimento) e T (tempo), obtenha as fórmulas dimensionais de A, B e C.