UNIMONTE, Engenharia – Laboratório de Física Mecânica
Estudo Teórico Sobre Gráficos Monologarítmicos
Turma: ______________________ Data: __________ : Nota:____________
Nome: ________________________________ RA: ____________

Papeis logarítmicos:

São convenientes para uso quando a variável está no expoente da função, ou seja, quando duas grandezas se relacionam de forma exponencial. Por exemplo, a equação de Newton do esfriamento de um corpo em função do tempo, pode ser escrita como:

$$T = T_a + C \cdot e^{kt}$$

Observe que a variável independente t está no expoente. Para traçarmos o gráfico desse tipo de equação é conveniente o uso de um papel logarítmico. O papel logarítmico pode ter um ou os dois eixos com a escala logarítmica. São chamados respectivamente papel monolog e papel dilog, ou loglog.

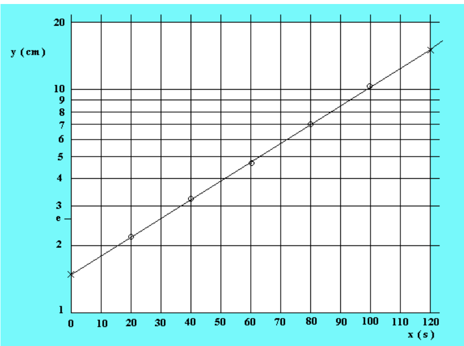


Gráfico monolog

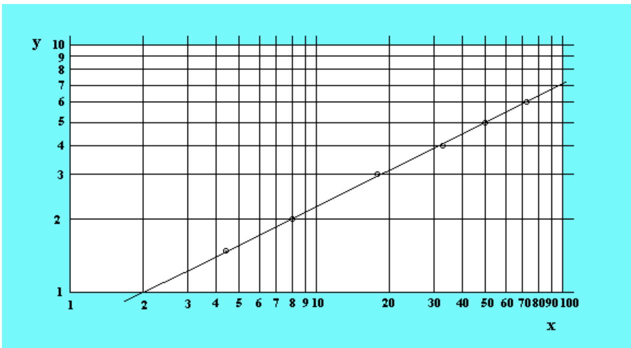


Gráfico dilog, ou loglog

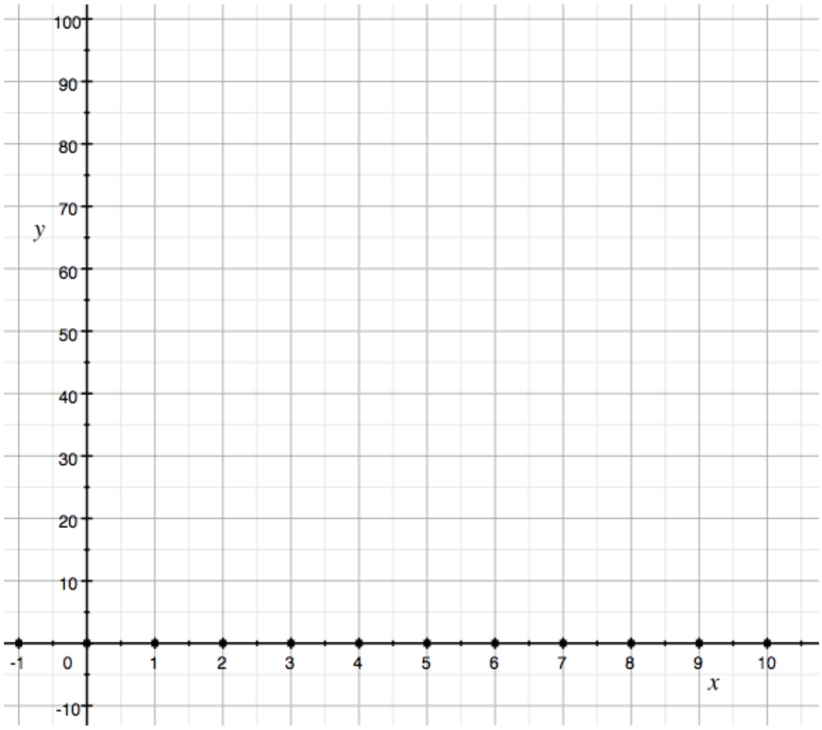
Nos gráficos logarítmicos, a escala inicia sempre em “1” (não em “0”) e crescem exponencialmente, por exemplo, 1, 10, 100, 1000, ou, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, etc.

Atividade 1:

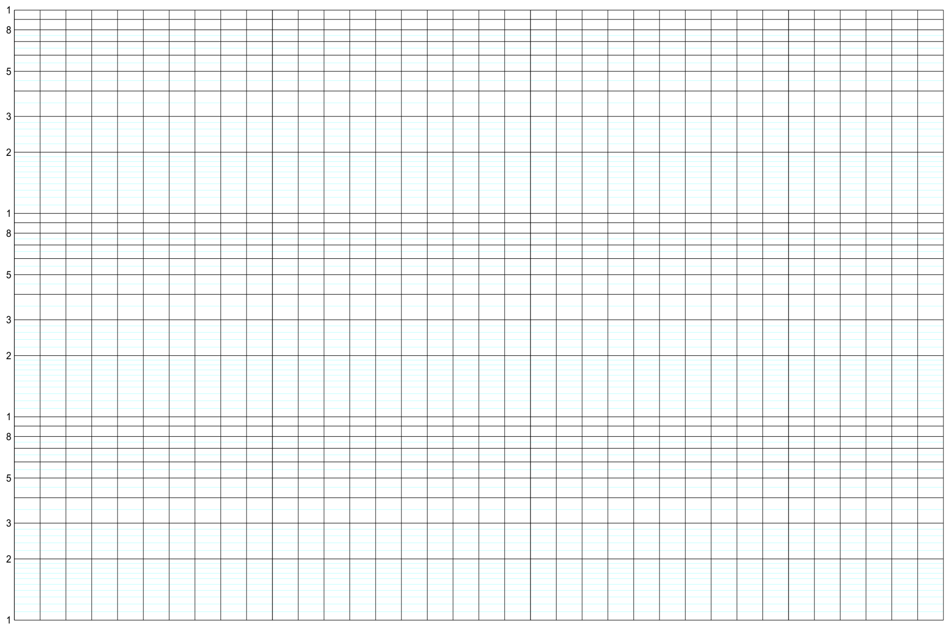
Seja a função $y = 2^x$. Essa é uma função exponencial, pois a variável x está no expoente. Vejamos a diferença de seu gráfico traçado no papel linear e no logarítmico. Faça o gráfico dessa função para $0 \leq x \leq 6$ no papel linear e no papel logarítmico monolog, e analise a diferença.

Usando papel linear:

x	$y = 2^x$
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	



Usando papel logarítmico monolog, com os mesmos dados da tabela acima:



O que você observa comparando os dois gráficos?

....

....

....

Nesse exemplo, utilizamos a função $y = 2^x$. Porém, normalmente as funções exponenciais utilizam como base o número de Euler, e, que vale 2,718 com aproximação de 3 casas decimais. Podemos mudar a base de uma potência para a base e resolvendo a seguinte igualdade, usando essa função como exemplo:

$2^x = e^{kx}$

$\ln 2^x = \ln e^{kx}$

$x \cdot \ln 2 = kx \cdot \ln e$

$x \cdot \ln 2 = kx$

$k = \ln 2$

Assim:

$$2^x = e^{\ln 2 \cdot x}$$

Portanto, a equação $y = 2^x$ é equivalente a $y = e^{0,693 \cdot x}$

Generalizando, uma função exponencial tem o seguinte formato:

$$y = A \cdot e^{kx}$$

onde A e k são constantes da equação. Os valores A e k poderão ser calculados a partir do gráfico. Para deduzi-los, faremos:

$y = A \cdot e^{kx}$

$\ln y = \ln(A \cdot e^{kx})$

$\ln y = \ln A + \ln e^{kx}$

$\ln y = \ln A + kx \cdot \ln e$

$\ln y = \ln A + kx$

$$\ln y = kx + \ln A$$

Essa equação tem o formato da equação de uma reta $y = mx + b$.

Para calcular o **valor de A**, fazemos $x = 0$, que resultará em:

$\ln y_o = \ln A + k \cdot 0$

$\ln y_0 = \ln A$

Portanto:

$$A = y_0$$

Assim o valor de A pode ser obtido diretamente no eixo y, onde a curva o corta.

O **valor de k** corresponde ao coeficiente angular da reta do gráfico logarítmico. Isolando k na função acima $\ln y = kx + \ln A$, teremos:

$$k = \frac{\ln y - \ln A}{x}$$

válida para $x_o = 0$. Genericamente:

$$k = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}$$

que, aplicando a propriedade de subtração de logaritmos, resulta em:

$$k = \frac{\ln \frac{y_2}{y_1}}{\Delta x}$$

Atividade 2:

Em um experimento, você levantou vários pontos, e com eles verificou que poderia traçar o gráfico abaixo com boa aproximação, que é do tipo $y = A \cdot e^{kx}$. Descubra a equação que descreve o comportamento de seu experimento.

Solução:

Cálculo de A:

O valor de é corresponde ao ponto onde a reta corta o eixo y, isto é o valor de y_0. No gráfico acima isso ocorre em: A=___________________

Cálculo de k:

No gráfico, chamemos $x_2 = 10$ e $x_1 = 2$. Anote os valores correspondentes de y_2 e y_1.

$x_2 = 10, y_2 =$ ________________

$x_1 = 2,\ y_1 =$ ________________

Utilize esses valores na fórmula abaixo para determinar o valor de k:

$$k = \frac{\ln \frac{y_2}{y_1}}{\Delta x}$$

....

....

....

....

Assim a equação que descreve seu experimento é:

....

....

....

Atividade 3

Um corpo com temperatura inicial de 80º C foi deixado esfriar em um ambiente cuja temperatura era de 0º C. Sua temperatura após 10 minutos era de 20º, e nesse intervalo foi medida e elaborou-se o gráfico abaixo, com o eixo x em minutos e o eixo y em graus centígrados. Determine a equação do esfriamento desse corpo, sabendo que ele obedece à lei de Newton do esfriamento:

$$T = T_a + C \cdot e^{kt}$$

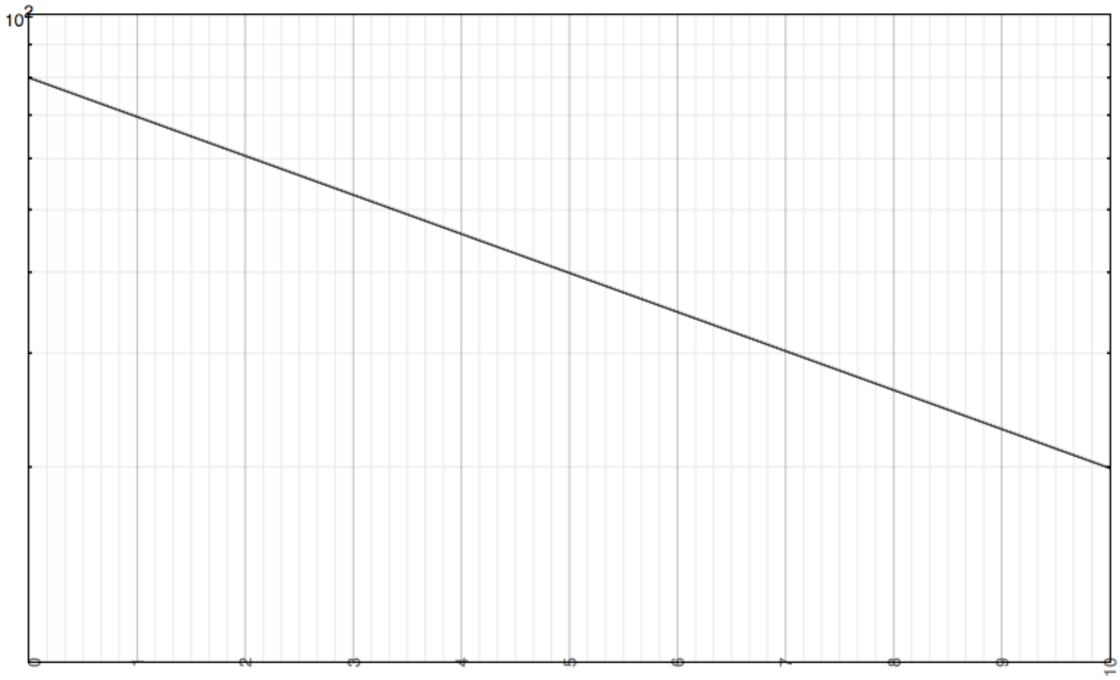
onde:

$T \rightarrow\ Temperatura\ do\ corpo$

$T_a \rightarrow Temperatura\ ambiente$

$C \rightarrow Diferença\ inicial\ de\ temperatura\ entre\ o\ corpo\ e\ o\ ambiente$

$k \rightarrow Constante\ que\ depende\ da\ natureza\ do\ corpo$



Usando o gráfico acima, calcule o valor de C dessa equação, que corresponde ao A da fórmula geral $y = A \cdot e^{kx}$, e o valor de k, usando a fórmula $k = \frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\Delta x}$, e determine a equação do esfriamento desse corpo:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Atividade 4:

A tensão em um capacitor em função do tempo pode ser expressa por: $V_c = V_0 \cdot e^{\frac{t}{\tau_c}}$, onde V_0 é a tensão inicial e τ_c a constante de tempo capacitiva. Plote os dados levantados abaixo num papel monolog, e calcule os valores V_0 e τ_c:

t	V_c	t	V_c
0	2,4	8	17,7
1	3,1	9	22,8
2	4,0	10	29,2
3	5,1	11	37,5
4	6,5	12	48,2
5	8,4	13	61,9
6	10,8	14	79,5
7	13,8	15	102,1

Calcule os valores V_0, que corresponde a A, e τ_c, que corresponde a $\frac{1}{k}$ e determine a equação da tensão desse capacitor:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....