Baricentro como ferramenta para resolver problemas de geometria

Vincenzo Bongiovanni

Os alunos do Ensino Básico tomam conhecimento da existência do baricentro de um triângulo no penúltimo ano do Ensino Fundamental, em geometria, quando estudam o tema *pontos notáveis de um triângulo*. O baricentro é apresentado como o ponto de intersecção das medianas de um triângulo. Costuma ser também apresentado com o nome de centro de gravidade por ser o ponto que equilibra, por exemplo, uma superfície triangular. Nesse texto apresentaremos uma definição matemática de baricentro de modo a poder resolver alguns problemas de geometria. Como precisaremos utilizar a notação vetorial revisitaremos inicialmente o conceito de vetor.

Revisitando o conceito de vetor.

Dada uma reta r e dois pontos A e B pertencentes à reta, chama-se **segmento geométrico** $\overline{AB}$ ao conjunto de pontos { X/ X está entre A e B}$\cup$ {A,B}

Chama-se **segmento orientado** AB e será indicado por (A,B) a um segmento geométrico com uma origem A e extremidade B. Observe que o segmento orientado (A,B) é diferente do segmento orientado (B,A) mas o segmento geométrico $\overline{AB}$ é igual ao segmento geométrico $\overline{BA}$. O segmento orientado (A, A) é dito segmento orientado nulo.

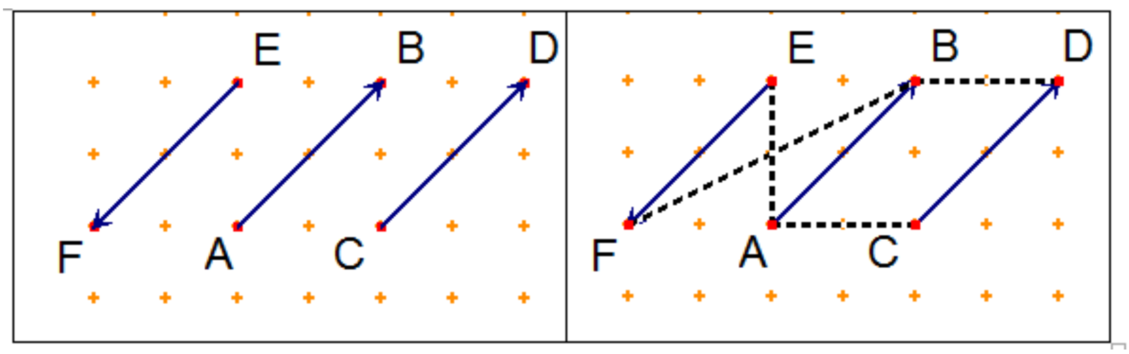
Dizemos que os segmentos orientados (A,B) e (C,D) têm o mesmo comprimento se os segmentos geométricos correspondentes $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm o mesmo comprimento.

Dizemos que os segmentos orientados (A,B) e (C,D) têm a mesma direção se os segmentos geométricos correspondentes $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ forem paralelos ou estiverem contidos numa mesma reta.

Dizemos que os segmentos orientados (A,B) e (C,D) **contidos em retas paralelas** têm o mesmo sentido se $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \emptyset$

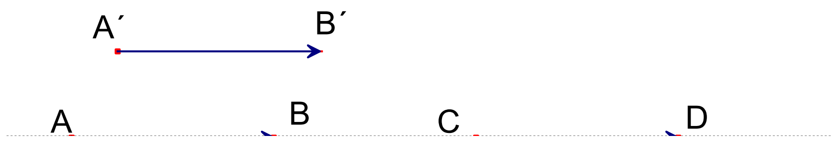
Dizemos que os segmentos orientados (A,B) e (E,F), **contidos em retas paralelas**, têm sentidos contrários se $\overline{AB} \cap \overline{EF} \neq \emptyset$

Na figura abaixo, os segmentos orientados (A,B) e (C.D) têm o mesmo sentido, repare que $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \emptyset$ e os segmentos orientados (A,B) e (E,F) têm sentidos contrários, observe que nesse caso $\overline{AE} \cap \overline{BF} \neq \emptyset$

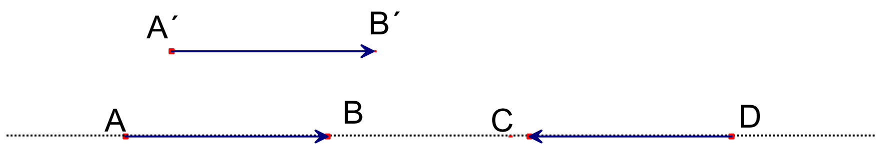


Sejam (A´,B´) e (A,B) segmentos orientados de mesmo sentido contidos em retas paralelas e (A,B) e (C,D) segmentos orientados contidos na mesma reta..

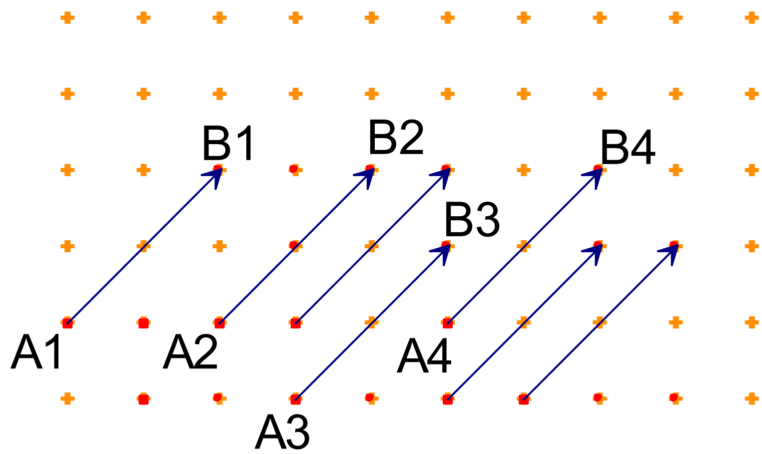
*Dizemos que os segmentos orientados (A,B) e (C,D) têm o **mesmo sentido** se (A´, B´) e (C,D) têm o mesmo sentido.



*Dizemos que os segmentos orientados (A,B) e (C,D) têm **sentidos contrários** se (A´,B´) e (C,D) têm sentidos contrários.



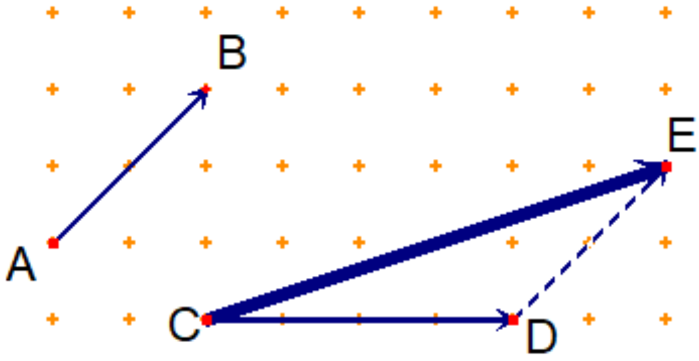
Dado um segmento orientado (A, B), chama-se vetor $\overrightarrow{AB}$ ao conjunto formado por todos os segmentos orientados que têm o mesmo comprimento de (A,B), a mesma direção de (A,B) e o mesmo sentido de (A,B).



Assim o vetor $\overrightarrow{AB}$ ={(A_1,B_1), (A_2,B_2) , (A_3,B_3, (A_4,B_4), ...}
Cada segmento orientado (A_i,B_i) é chamado representante do vetor $\overrightarrow{AB}$.
Os vetores também costumam ser indicados com letras minúsculas com uma flecha.
Assim $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ ou $\vec{w}= \overrightarrow{EF}$
Dois segmentos orientados não nulos são chamados de **equipolentes** se, e somente se, têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.
A relação de equipolência é uma relação de equivalência pois é reflexiva, simétrica e transitiva. Pode-se verificar que:
*(A,B) é equipolente a (A,B).
*Se (A,B) é equipolente a (C,D) então (C.D) é equipolente a (A,B)
*Se (A,B) é equipolente a (C,D) e (C,D) é equipolente a (E,F) então (A,B) é equipolente a (E,F)
Dessa forma o conjunto de todos os segmentos orientados pode ser dividido em classes de equivalência tal que a reunião de todas as classes é o conjunto de todos os segmentos orientados e a intersecção de duas classes quaisquer é o conjunto vazio.

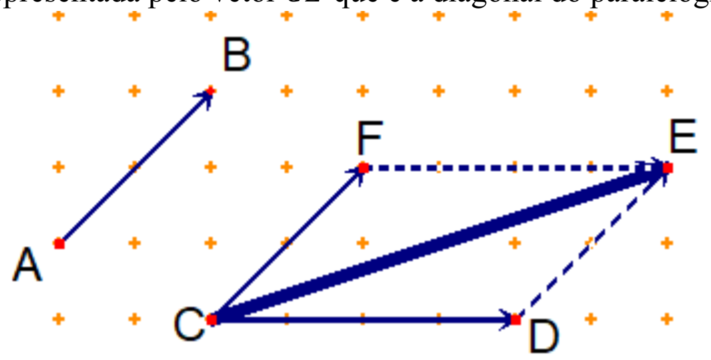
Adição de vetores

Dados os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, chama-se soma de $\overrightarrow{AB}$ com $\overrightarrow{CD}$ ao vetor $\overrightarrow{CE}$ onde (D,E) é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$.



Observe que $\overrightarrow{CD}$ + $\overrightarrow{DE}$= $\overrightarrow{CE}$. Da mesma forma escrevemos $\overrightarrow{EF}$+ $\overrightarrow{FG}$= $\overrightarrow{EG}$. Observe que numa soma de vetores, quando a extremidade do primeiro vetor coincide com a origem do segundo vetor, o vetor soma terá como origem, a origem do primeiro vetor e por extremidade, a extremidade do segundo vetor. Dados três pontos quaisquer A, B e C do plano, podemos sempre escrever $\overrightarrow{AB}$+$\overrightarrow{BC}$ = $\overrightarrow{AC}$.

A seguir, apresentamos uma outra maneira de obter a soma de dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$. Considere um representante (C,F) do vetor $\overrightarrow{AB}$. A soma $\overrightarrow{AB}$+$\overrightarrow{CD}$ será igual à soma $\overrightarrow{CD}$ + $\overrightarrow{CF}$ que é representada pelo vetor $\overrightarrow{CE}$ que é a diagonal do paralelogramo CDEF.



A adição de vetores obedece às seguintes propriedades:
Indicando por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ os vetores teremos:

a) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ para todo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

b) $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

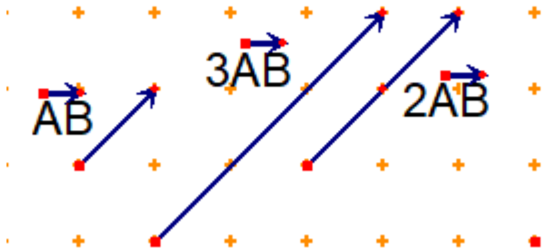
c) Existe o vetor nulo $\vec{0}$ tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ para todo vetor $\vec{u}$

d) Existe o vetor -$\vec{u}$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u})= \vec{0}$

Multiplicação de um vetor por um número real diferente de zero.

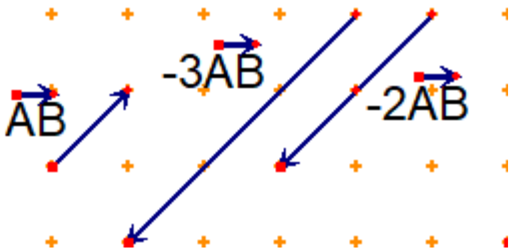
Seja $\overrightarrow{AB}$ um vetor não nulo e k um número real positivo.

Define-se o produto k.$\overrightarrow{AB}$ como sendo um vetor de mesma direção e sentido de $\overrightarrow{AB}$ e de comprimento igual ao do segmento geométrico $\overline{AB}$ multiplicado por k.



Seja $\overrightarrow{AB}$ e um vetor não nulo e k um número real negativo,

Define-se o produto k,$\overrightarrow{AB}$ ao vetor de mesma direção de $\overrightarrow{AB}$, de sentido contrário **ao de $\overrightarrow{AB}$** e de comprimento igual ao do segmento geométrico $\overline{AB}$ multiplicado pelo módulo de k.



Se k = 0 ou $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ então k.$\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

A multiplicação de um número real por um vetor obedece às seguintes propriedades

a) a . (b . $\vec{u}$)=(a . b) .$\vec{u}$ para todo a e b reais e todo vetor $\vec{u}$

b) a . ($\vec{u}$ +$\vec{v}$) = a .$\vec{u}$ + a .$\vec{v}$ para todo real a e todo vetor $\vec{u}$ e $\vec{v}$

c) (a + b) . $\vec{u}$ = a . $\vec{u}$ + b . $\vec{u}$ para todo a e b reais e todo vetor $\vec{u}$

d) 1. $\vec{u}$= $\vec{u}$ para todo vetor $\vec{u}$.

Baricentro

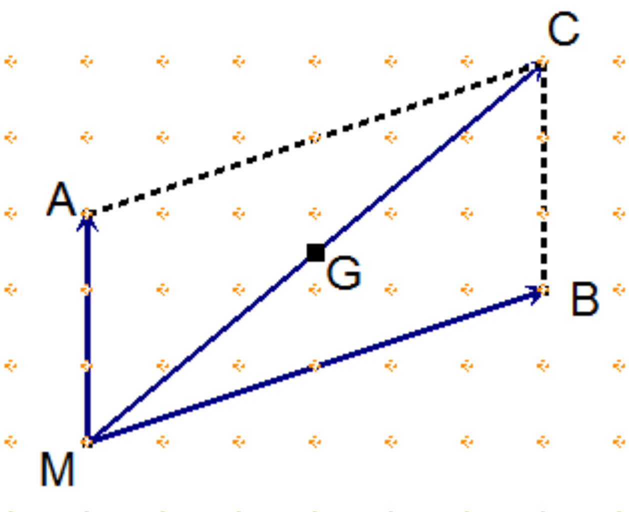
O baricentro é uma generalização da noção de centro de massa no campo da matemática. Ele se origina de uma noção puramente física e evolui em um poderoso instrumento matemático. Um outro nome para baricentro utilizado na física é centro de gravidade. Em matemática, enquanto o baricentro se refere a conjunto de pontos, o centro de massa e o centro de gravidade, na física, referem-se a segmentos, superfícies e sólidos. Entre o centro de massa e o centro de gravidade há o mesmo tipo de diferença que entre massa e peso. O centro de massa é absoluto ao passo que o centro de gravidade depende do campo de gravitação. Em geral, quando o campo gravitacional é uniforme eles se confundem. Vamos apresentar alguns conceitos básicos de baricentro que nos permitirão resolver certos problemas de geometria.

Baricentro de 2 pontos

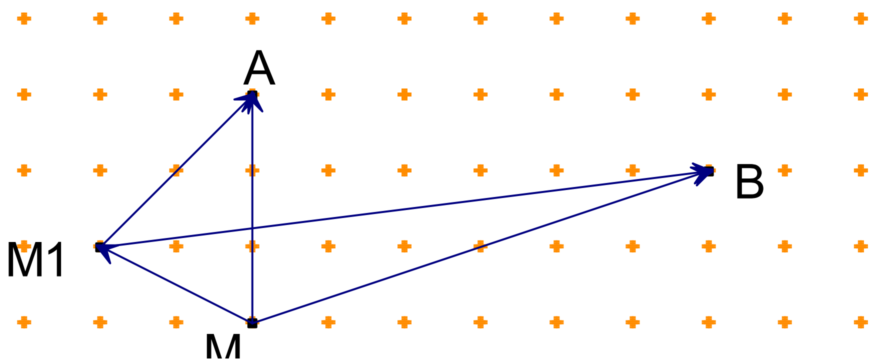
Chama-se baricentro de dois pontos A_1 e A_2 com massas m_1 e m_2 ($m_1+m_2 \neq 0$) ao único ponto G tal que $(m_1 + m_2).\overrightarrow{MG} = m_1.\ \overrightarrow{MA_1} + m_2.\overrightarrow{MA_2}$

Por exemplo, dados dois pontos A e B com massas iguais m (m≠ 0), para obter o baricentro de A e B, escolhemos um ponto M qualquer do plano e criamos os vetores $\overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{MB}$ de modo que (m+m).$\overrightarrow{MG}$=m.$\overrightarrow{MA}$ + m. $\overrightarrow{MB} = m(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$). Observe na

figura abaixo que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ Portanto $\overrightarrow{MG} = \frac{m}{2m}\overrightarrow{MC}$, ou seja, $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{MC}$
Dessa igualdade conclui-se que G é o ponto médio do segmento MC e como as diagonais do paralelogramo se intersectam nos respectivos pontos médios, o baricentro é também ponto médio do segmento AB.



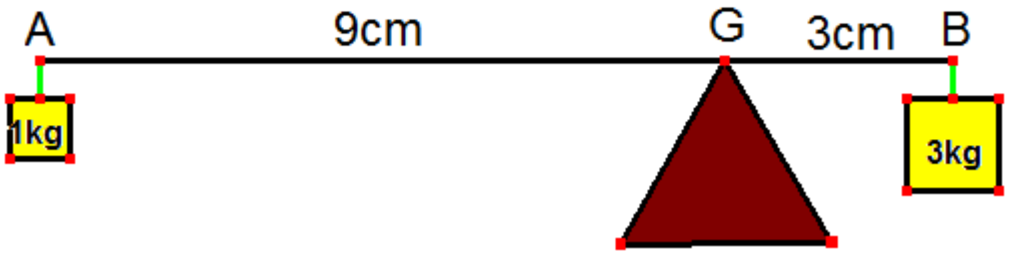
Pode-se mostrar que o baricentro G não depende da escolha do ponto M.
De fato, sejam A e B dois pontos de massas m_1 e m_2 e vamos supor que ao escolher um outro ponto M_1 tivéssemos encontrado um outro baricentro G_1. Nesse caso teríamos $(m_1+m_2).\overrightarrow{MG} = m_1.\overrightarrow{MA} + m_2.\overrightarrow{MB}$ e $(m_1+m_2).\overrightarrow{M_1G_1} = m_1\overrightarrow{M_1A} + m_2\overrightarrow{M_1B}$.
Mas $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1A} = \overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1B} = \overrightarrow{MB}$
Logo $(m_1+m_2).\overrightarrow{MG} = m_1\overrightarrow{MA} + m_2\overrightarrow{MB} = m_1.(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1A}) + m_2(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1B}) =$
$=(m_1+m_2)\overrightarrow{MM_1} + m_1\overrightarrow{M_1A} + m_2.\overrightarrow{M_1B} = (m_1+m_2)\overrightarrow{MM_1} + (m_1+m_2)\overrightarrow{M_1G_1} =$
$(m_1+m_2)(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1G_1}) = (m_1+m_2).\overrightarrow{MG_1}$. Portanto $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MG_1}$. Logo $G = G_1$



Vamos obter o baricentro dos pontos A e B com massas $m_1=1$ e $m_2=1$ escolhendo A como ponto M.
$(1+1).\overrightarrow{MG} = 1.\overrightarrow{MA} + 1.\overrightarrow{MB}$. Substituindo M por A teremos: $2.\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}$. Mas $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
Logo $2.\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}$. Portanto $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$. O que mostra que o baricentro de dois pontos A e B é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
Observe que: **se G é o baricentro dos pontos A e B com massas x e y respectivamente então G é o baricentro dos pontos A e B com massas k.x e k.y**
Usaremos a notação A(x) para indicar que o ponto A está afetado da massa x.

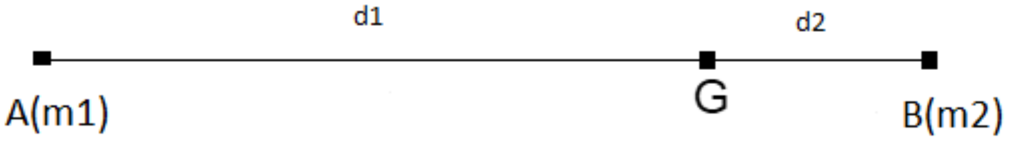
De fato, se G é o baricentro dos pontos A(x) e A(y) então **(x+y).** $\overrightarrow{MG} = x.\overrightarrow{MA}$ **+y.**$\boldsymbol{\overrightarrow{MB}}$
Multiplicando ambos os membros por k ($k \neq 0$) teremos
k.(x+y). $\overrightarrow{MG} = k.x.\overrightarrow{MA} + k.y.\overrightarrow{MB}$ ou seja, G é o baricentro de A(k.x) e B(k.y)

O que acontece se as massas diferentes forem diferentes?
Sejam os pontos A(1) e B(3) distando 12cm um do outro. O baricentro de A e B será dado por (1+3).$\overrightarrow{MG}$=1.$\overrightarrow{MA}$+3.$\overrightarrow{MB}$. Fazendo M=A teremos: $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}.\overrightarrow{AB}$. Isto significa que o baricentro se localiza no segmento $\overline{AB}$ a uma distância $\frac{3}{4}$ de AB do ponto A. Como AB=12cm então AG=9cm. Logo, G se localiza a 9cm do ponto A.



Intuitivamente, dizer que G é o baricentro dos pontos A e B com massas 1 e 3 significa dizer que uma alavanca apoiada em G equilibra as massas de 1 kg e 3 kg colocadas nas suas extremidades.

A lei da alavanca, observada primeiramente por Arquimedes afirma que "grandezas comensuráveis se equilibram em distâncias inversamente proporcionais a seus pesos". Este resultado é justificado por Arquimedes no livro "*Sobre o equilíbrio dos planos*" na proposição 6. Isto significa que duas massas m_1 e m_2 distando respectivamente d_1 e d_2 de um ponto G estarão em equilíbrio se os produtos $m_1.d_1$ e $m_2.d_2$ forem iguais, isto é, se $m_1.d_1 = m_2.d_2$



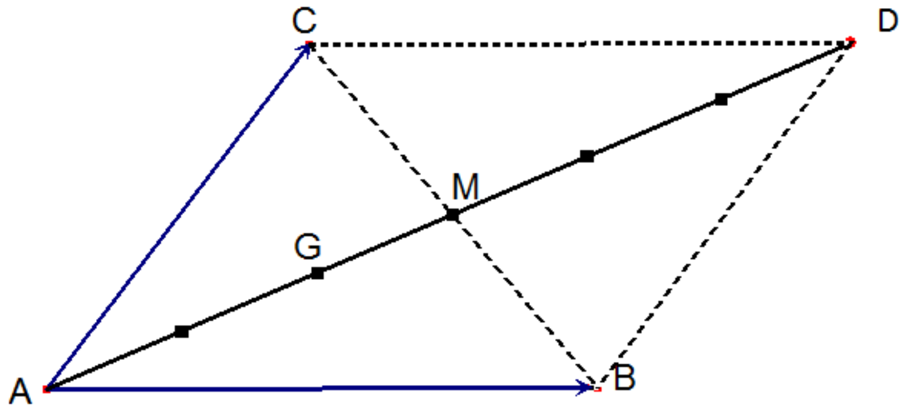
Uma outra definição equivalente do baricentro de 2 pontos.
Vimos que o baricentro dos pontos A e B com massas m_1 e m_2 ($m_1+m_2 \neq 0$) é o único ponto G tal que (m_1+m_2). $\overrightarrow{MG}= m_1.\overrightarrow{MA} + m_2.\overrightarrow{NB}$,
Escolhendo G como ponto M teremos (m_1+m_2). $\overrightarrow{GG}=m_1.\overrightarrow{GA}+m_2.\overrightarrow{GB}$, ou seja $m_1.\overrightarrow{GA}+m_2.\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Essa expressão também pode ser utilizada como definição de baricentro, ou seja, dados os pontos A e B com massas m_1 e m_2, o baricentro dos pontos A e B é o único ponto G tal que $\boldsymbol{m_1.\overrightarrow{GA}+m_2.\overrightarrow{GB} = \vec{0}}$.

Observe que se G é o baricentro dos pontos ponderados A e B então **G é um ponto da reta AB**. Reciprocamente, todo ponto da reta AB pode ser visto como o baricentro dos pontos A e B. Para isso é suficiente determinar massas convenientes para os pontos A e B. O baricentro de dois pontos A e B coincide com o centro de gravidade do segmento de extremidades A e B.

Baricentro de 3 pontos.

Chama-se baricentro de três pontos A_1 , A_2 e A_3 com massas m_1, m_2, e m_3 e $m_1+m_2+m_3 \neq 0$ ao único ponto G tal que
$(m_1+m_2+m_3).\overrightarrow{MG}=m_1.\ \overrightarrow{MA_1}+m_2.\ \overrightarrow{MA_2}+m_3.\ \overrightarrow{MA_3}$. De maneira análoga pode-se mostrar que o baricentro de três pontos não depende do ponto M.
Uma outra expressão que pode ser utilizada como definição de baricentro de A_1,A_2 e A_3 é fazendo M=G. Nesse caso teremos que $\mathbf{m_1.\overrightarrow{GA_1}+m_2.\overrightarrow{GA_2}+m_3.\overrightarrow{GA_3}=\vec{0}}$.

Vamos obter o baricentro de três pontos A, B e C, vértices de um triângulo.
Vamos adotar massas iguais a 1 para cada vértice. Como $1+1+1\neq 0$ então existe o baricentro.
Pela definição: $(1+1+1).\ \overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$. Fazendo M=A teremos:
$3.\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Donde $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}.\ (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$



A soma dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é o vetor $\overrightarrow{AD}$. Localizamos o ponto G a $\frac{1}{3}$ de AD do ponto A. Isso nos mostra que o baricentro G dos pontos A, B e C com massas 1,1 e 1 está localizado na mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC a $\frac{2}{3}$ de AM a partir do vértice A.
Arquimedes, no livro *Sobre o equilíbrio dos corpos*, na proposição 14, prova que o centro de gravidade de uma superfície triangular é também o encontro das medianas. Intuitivamente, o centro de gravidade de uma superfície triangular é o ponto onde ela pode ser equilibrada. Isso mostra que o baricentro de 3 pontos coincide com o centro de gravidade de uma superfície triangular. No entanto, para mais de três pontos essa coincidência nem sempre se verifica.

Baricentro de n pontos

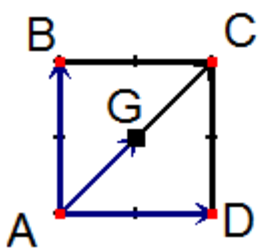
Vamos generalizar o conceito de baricentro para n pontos do espaço.
Chama-se baricentro de n pontos $A_1, A_2, A_3, ...,A_n$ com massas $m_1, m_2, m_3, ...m_n$ $(m_1+m_2+m_3+...+m_n \neq 0)$ ao único ponto G tal que
$(m_1+m_2+m_3+...+m_n).\overrightarrow{MG}=m_1.\overrightarrow{MA_1}+m_2.\overrightarrow{MA_2}+m_3.\overrightarrow{MA_3}+...+m_n.\overrightarrow{MA_n}$
Pode-se provar de maneira análoga que o baricentro G não depende do ponto M.
Além disso, fazendo M=G teremos $\mathbf{m_1\ .\overrightarrow{GA_1}+m_2\ .\overrightarrow{GA_2}+m_3.\ .\overrightarrow{GA_3}+...+m_n.\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}}$ que pode ser utilizada como outra definição para baricentro de n pontos.

Se G é o baricentro de n pontos A_1, A_2, ... ,A_n de massas m_1, m_2, m_3,..., m_n então G é o baricentro dos pontos A_1, A_2, ...,A_n com massas $k.m_1$, $k.m_2$,...,$k.m_n$ onde k é um real diferente de zero.
Por exemplo, se os pontos A e B têm massas 24 e 36 então podemos obter o baricentro dos pontos A e B trabalhando apenas com as massas 2 e 3.

Um outro resultado que permite encontrar o baricentro de n pontos
Sejam por exemplo cinco pontos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 com massas m_1, m_2, m_3, m_4 e m_5 com $m_1+m_2+m_3+m_4+m_5 \neq 0$. Suponhamos conhecidos o baricentro G_1 de alguns pontos como por exemplo A_1, A_2 e A_3 e o baricentro G_2 dos outros pontos A_4 e A_5.Vamos provar que o baricentro G dos pontos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 é o mesmo que o baricentro dos pontos G_1 com massas $m_1+m_2+m_3$ e do ponto G_2 com massas m_4+m_5.

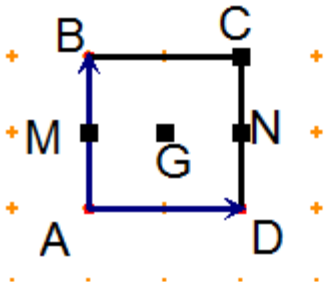
De fato, seja G_3 o baricentro dos pontos G_1 $(m_1+m_2+m_3)$ e G_2 (m_4+m_5). Vamos mostrar que G=G3.
Como G é o baricentro dos 5 pontos então
$(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5).\overrightarrow{MG} = m_1.\ \overrightarrow{MA_1}+m_2.\ \overrightarrow{MA_2}+m_3.\ \overrightarrow{MA_3}+m_4.\ \overrightarrow{MA_4}+m_5.\ \overrightarrow{MA_5}$
Como G_1 é o baricentro de A_1, A_2 e A_3 então
$(m_1+m_2+m_3).\ \overrightarrow{MG_1}=m_1.\ \overrightarrow{MA_1}+ m_2.\ \overrightarrow{MA_2}+m_3.\ \overrightarrow{MA_3}$
Como G_2 é o baricentro de A_4 e A_5 então $(m_4+m_5).\ \overrightarrow{MG_2}=m_4.\ \overrightarrow{MA_4}+m_5.\ \overrightarrow{MA_5}$
Seja G_3 o baricentro dos pontos G_1 com massas $m_1+m_2+m_3$ e do ponto G_2 com massas m_4+m_5.
G_3 será dado por: $(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5).\overrightarrow{MG_3}= (m_1+m_2+m_3).\ \overrightarrow{MG_1}+(m_3+m_4).\ \overrightarrow{MG_2} =$ $(m_1.\ \overrightarrow{MA_1}+ m_2.\ \overrightarrow{MA_2}+m_3.\ \overrightarrow{MA_3}) + (m_4.\ \overrightarrow{MA_4}+m_5.\ \overrightarrow{MA_5}) =(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5).\ \overrightarrow{MG}$
Portanto $\overrightarrow{MG_3}=\overrightarrow{MG}$ Donde G_3 =G.
Esse resultado pode ser generalizado para n pontos.

Vamos obter o baricentro de quatro pontos A, B, C e D formando um quadrado. Vamos atribuir massas iguais a 1 a cada vértice.
Por definição (1+1+1+1) $\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$. Fazendo M=A teremos:
$4\overrightarrow{AG}= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Logo, $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}.\ (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$



Mas $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. Logo $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}.\ (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}.\ \overrightarrow{AC}$. Donde se conclui que o baricentro dos quatro pontos é o centro do quadrado.

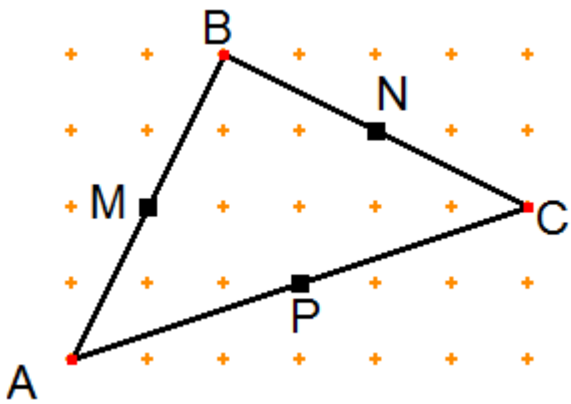
Vamos resolver o mesmo problema utilizando o resultado anterior.
Vamos separar os 4 pontos em dois grupos: (A,B) e (C,D)
Sejam M o baricentro dos pontos (A e B) e N o baricentro dos pontos (C e D).
O baricentro dos pontos A,B,C e D com massas 1,1,1 e 1 será o baricentro dos pontos M e N com massas 2 e 2. Mas o baricentro de dois pontos com massas iguais é o ponto médio do segmento. Logo o baricentro será o ponto G, centro do quadrado.
Usando uma outra notação: Bar{(A,1), (B,1), (C,1), D(1)} = Bar {(M,2),(N,2)} = G



Arquimedes, no livro *Sobre o equilíbrio dos corpos*, na proposição 10, prova que o centro de gravidade da superfície de um paralelogramo está localizado no encontro de suas diagonais. Esse resultado, portanto, é válido para os particulares paralelogramos como o quadrado, o losango e o retângulo. Isso mostra que para os paralelogramos o baricentro de 4 pontos se confunde com o centro de gravidade da superfície de um paralelogramo.

Aplicação da teoria do baricentro na geometria plana

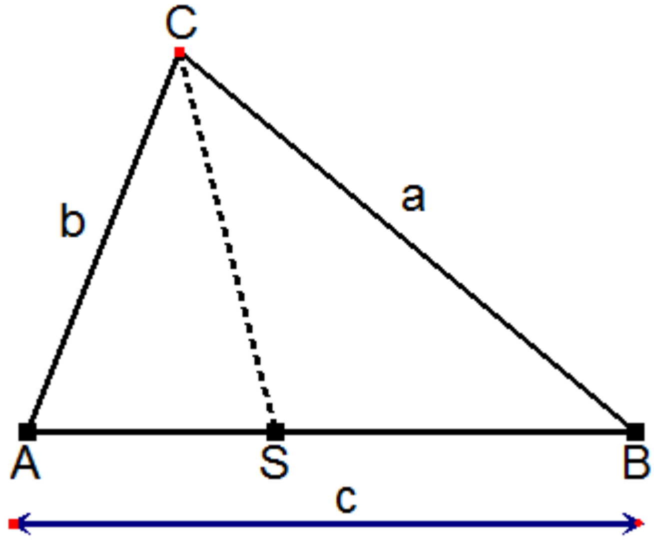
Vamos provar que as medianas de um triângulo se intersectam num único ponto,
Vamos atribuir massa 1 a cada vértice, Como a soma das massas é diferente de zero, existe o baricentro do triângulo ABC. Seja G o baricentro de A(1), B(1) e C(1). Sejam M, N e P respectivamente os pontos médios dos lados AB, BC e AC .Vamos dividir os 3 pontos em dois grupos. Primeiro, um grupo com os pontos B e C o outro com o ponto A.



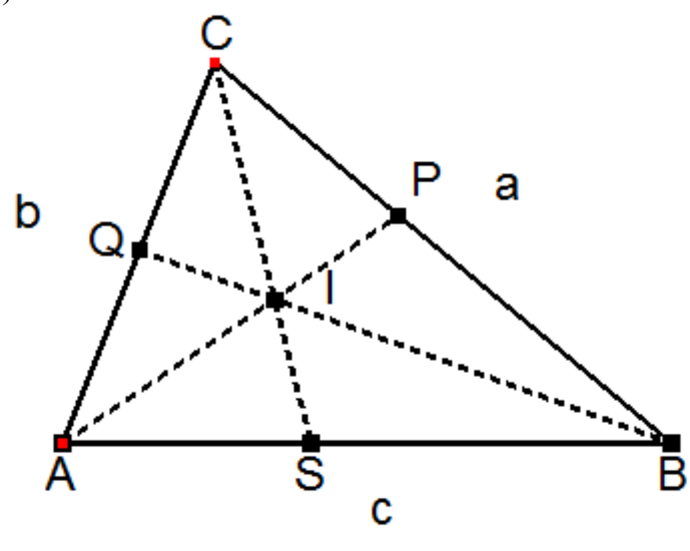
G = Bar {A(1), B(1), C(1)}= Bar {N(2), A(1)}. Portanto G pertence à reta AN.
Agora vamos dividir os pontos A,B e C em outros dois grupos: (A,C) e B.
G=Bar{A(1), B(1), C(1)}=Bar{P(2), B(1)}. Portanto G pertence à reta BP.
Última divisão como os grupos (A,B) e C
G=Bar{A(1), B(1), C(1)} = Bar {M(2), C(1)}. Portanto G pertence à reta CM.
Conclui-se que $G \in AN \cap BP \cap CM$. Logo as medianas se intersectam num único ponto G.

Incentro

Dado um triângulo ABC cujos lados BC, AC e AB medem respectivamente a, b e c, e seja AS a bissetriz do ângulo ACB. Quais massas devem ser atribuídas aos pontos A e B para que S seja o baricentro dos pontos A e B.



Vamos indicar de x e y as massas dos pontos A e B.
Necessitaremos do seguinte resultado da geometria plana denominado teorema da bissetriz interna de um triângulo. O ponto S divide o segmento AB em duas partes tais que $\frac{b}{a} = \frac{AS}{SB}$.
Sendo S o baricentro de A(x) e B(y) resulta da definição que x.$\overrightarrow{SA}$+y.$\overrightarrow{SB}$= $\vec{0}$ ou y.$\overrightarrow{SB}$ = x.$\overrightarrow{AS}$. Essa última relação indica que os módulos dos vetores $\overrightarrow{SB}$ e $\overrightarrow{AS}$ obedecem a relação $\frac{AS}{SB} = \frac{y}{x}$. Mas $\frac{b}{a} = \frac{AS}{SB}$, logo $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$. Uma possibilidade para que a igualdade se verifique é fazer y = b e x = a.
Concluindo os pontos A(a) e B(b) tem como baricentro o ponto S. Analogamente, prova-se que o ponto P é o baricentro dos pontos B(b) e C(c) e Q é baricentro dos pontos A(a) e C(c).



Vamos provar que as bissetrizes internas do triângulo ABC se encontram num mesmo ponto.

Seja I o baricentro do triângulo ABC com os pontos A(a), B(b) e C(c) afetados das massas a, b e c.

I=Bar{A(a), B(b), C(c)}= {S(a+b), C(c)}. Logo I pertence à reta SC.

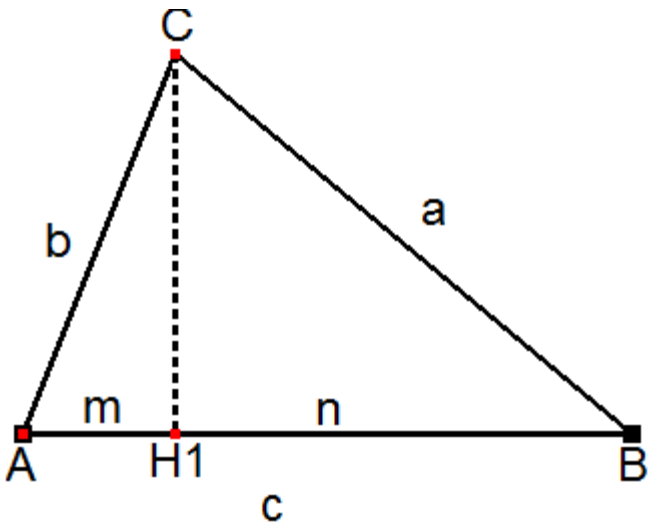
I=Bar {A(a),B(b),C(c)}={P(c+b), A(a)}. Logo I pertence à reta PA.

I=Bar{A(a), B(b), C(c)}={Q(a+c),B(b)}. Logo I pertence à reta QB,

Concluindo I $\in$ SC$\cap$PA$\cap$QB. Logo as bissetrizes se encontram num único ponto I

Ortocentro

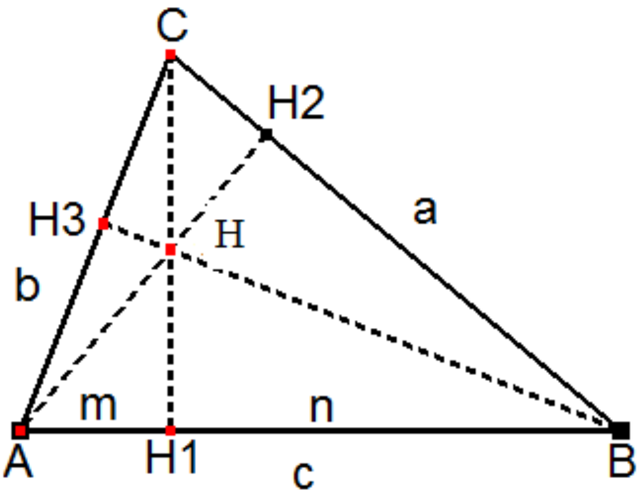
Dado um triângulo acutângulo ABC cujos lados BC, AC e AB medem respectivamente a, b e c, e seja AH_1 a altura do triângulo relativa ao vértice C. Quais massas devem ser atribuídas aos pontos A e B para que H_1 seja o baricentro dos pontos A e B.



Sejam x e y respectivamente as massas dos pontos A e B.

Sabemos que AH_1= b.cosA e BH_1= acosB

Como H_1 é baricentro dos pontos A(x) e B(y) então x.$\overrightarrow{H_1A}$ + y. $\overrightarrow{H_1B}$ = $\vec{0}$ ou y.$\overrightarrow{H_1B}$= x.$\overrightarrow{AH_1}$. Essa última relação indica que os módulos dos vetores obedecem a relação $\frac{AH_1}{H_1B} = \frac{y}{x}$. Mas $\frac{AH_1}{H_1B} = \frac{b.\cos A}{a.\cos B}$. Logo $\frac{y}{x} = \frac{b.\cos A}{a.\cos B} = \frac{\frac{b}{\cos B}}{\frac{a}{\cos A}}$. Uma possibilidade para que a igualdade se verifique é fazer y = $\frac{b}{\cos B}$ e x = $\frac{a}{\cos A}$. De modo análogo pode-se mostrar que H_2 é o baricentro dos pontos B ($\frac{b}{\cos B}$) e C($\frac{c}{\cos C}$) e que H_3 é baricentro dos pontos A($\frac{a}{\cos A}$) e C($\frac{c}{\cos C}$)



Observação: Uma outra maneira de apresentar as massas é substituindo as medidas a, b e c por a=2RsenA, b=2RsenB e c=2Rsen C. Igualdades obtidas a partir da lei dos senos.

Dessa forma teremos $\frac{y}{x} = .\frac{\frac{b}{\cos B}}{\frac{a}{\cos A}} = \frac{\frac{2RsenB}{\cos B}}{\frac{2RsenA}{\cos A}} = \frac{tgA}{tg\,B}$. Uma possibilidade para que a igualdade se verifique é fazer y = tgB e x = tgA . Portanto, podemos dizer também que H_1 é o baricentro dos pontos A(tgA) e B(tgB) e de modo análogo dizer que H_2 é o baricentro dos pontos B(tgB) e C(tgC) e que H_3 é o baricentro dos pontos C(tgC) e A(tgA).

Vamos provar que as alturas do triângulo ABC se intersectam num mesmo ponto.

H=Bar{A(tgA), B(tgB), C(tgC)} = Bar{H1(tgA+tgB),C(tgC}

Portanto H pertence à reta CH_1.

H= Bar{A(tgA), B(tgB), C(tgC}=Bar{H2(tgC+tgB)), A(tgA).

Portanto H pertence à reta AH_2.

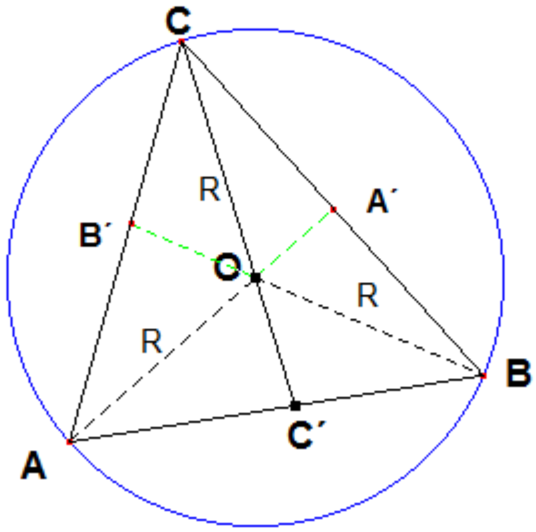
H=Bar{ A(tgA), B(tgB), C(tgC)}= Bar{ H3(tgC+tgA),B(tgB)}

Portanto H pertence à reta BH_3.

Concluindo $H \in CH_1 \cap AH_2 \cap BH_3$. Logo as alturas se encontram num único ponto.

Circuncentro

Dado um triângulo ABC cujos lados BC, AC e AB medem respectivamente a, b e c, Seja O o circuncentro do triângulo ABC. Quais massas devem ser atribuídas aos pontos A e B para que C´ seja o baricentro dos pontos A(x) e B(y).



A reta CO intersecta o lado BC no ponto C´. Vamos determinar os valores de x e y de modo que C´ seja o baricentro dos pontos A(x) e B(y).

Usaremos dois resultados da geometria plana: Todo ângulo inscrito numa circunferência mede a metade da medida do arco compreendido entre seus lados e a área de um triângulo é a metade do produto das medidas de seus lados pelo seno do ângulo compreendido entre eles.
O ângulo CÔB mede 2A pois A é um ângulo inscrito numa circunferência. Sendo o triângulo COB isósceles pois OC = OB = raio conclui-se que o ângulo $\widehat{OCB}$ mede 90º-A . Analogamente o ângulo $\widehat{OCA}$ mede 90º-B.
A razão entre as áreas dos triângulos ACC´ e BCC´ é igual à razão entre os segmentos AC´e BC´. Portanto $\frac{CC'.AC.sen(90-B)}{CC'.CB.sen(90-A)} = \frac{AC'}{BC'}$ Donde $\frac{bcosB}{acosA} = \frac{AC'}{BC'}$

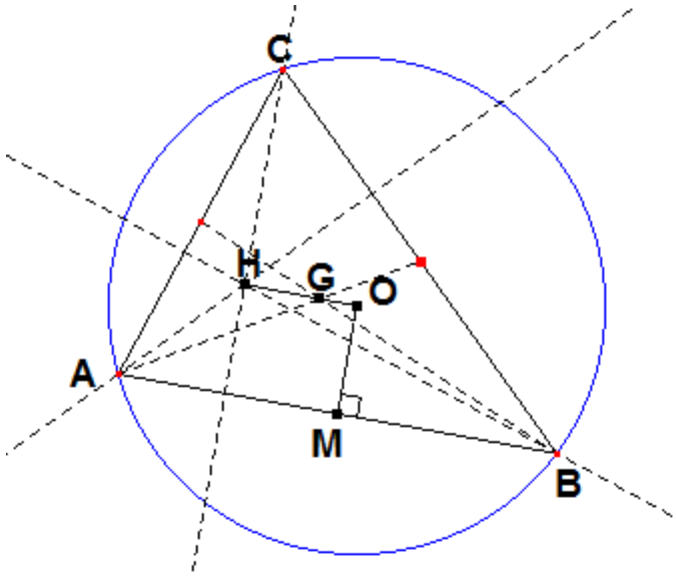
Como C´ é o baricentro dos pontos A(x) e B(y) então x $\overrightarrow{C'A}$+y $\overrightarrow{C'B}$ = $\vec{0}$ ou y.$\overrightarrow{C'B}$ = x $\overrightarrow{AC'}$

.Essa última relação indica que os módulos dos vetores obedecem a relação $\frac{AC'}{BC'} = \frac{y}{x}$
Mas $\frac{AC'}{BC'} = \frac{b\cos B}{a\cos A}. = \frac{y}{x}$ Uma possibilidade para que a igualdade se verifique é fazer y = b.cosB e x = a.cosA.
Uma outra expressão equivalente para $\frac{y}{x}$ seria $\frac{y}{x} = \frac{b\cos B}{a\cos A} = \frac{2RsenB.\cos B}{2RsenA.\cos A} = \frac{sen(2B)}{sen(2A)}$.
Uma possibilidade para y e x seria fazer y=sen(2B) e x=sen(2A) .
Portanto C´é o baricentro dos pontos A(sen2A) e B(sen2B). De modo análogo mostra-se que A´ é o baricentro dos pontos B(sen2B) e C(sen2C) e B´ é o baricentro dos pontos C(sen2C) e A(sen2A)
O = Bar{A(sen2A), B(sen2B), C(sen2C)}=Bar{C´(sen2A+sen2B), C(sen2C)}. Logo O pertence à reta CC´.
O = Bar{A(sen2A), B(sen2B), C(sen2C)}=Bar{B´(sen2C+sen2A), B(sen2B)}. Logo O pertence à reta BB.

O = Bar{A(sen2A), B(sen2B), C(sen2C)}=Bar{A´(sen2A+sen2B), A(sen2a)}. Logo O pertence à reta AA.
O $\in$ AA´$\cap$ BB´$\cap$CC´. Logo os segmentos CC´, BB´e AA´se encontram num único ponto.

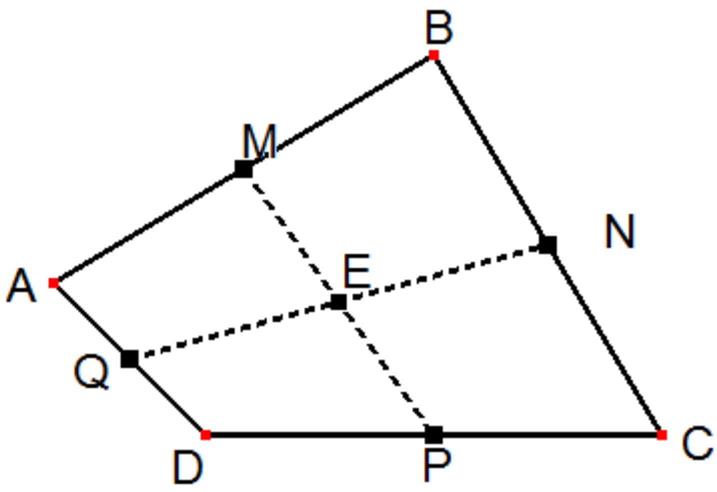
Reta de Euler

Vamos provar que o circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um triângulo, não equilátero, são colineares. A reta determinada por esses pontos recebe o nome de *reta de Euler*.



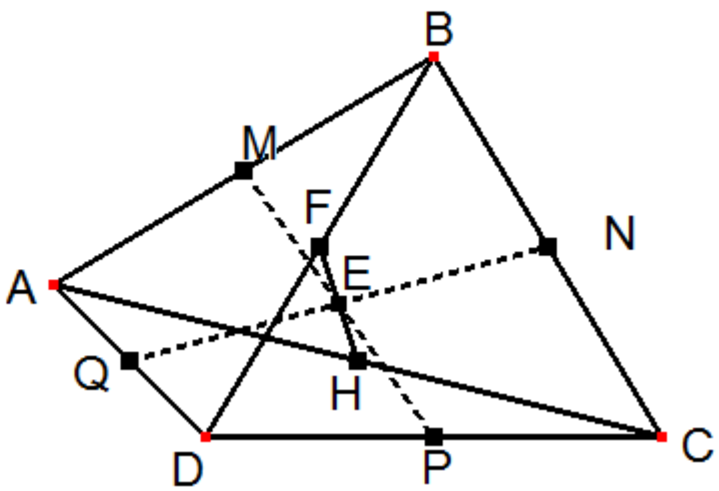
Sejam G e O respectivamente o baricentro e o circuncentro do triângulo ABC
Seja H um ponto tal que $\overrightarrow{OH}$=$\overrightarrow{OA}$+$\overrightarrow{OB}$+$\overrightarrow{OC}$. Vamos provar que H é o ortocentro do triângulo ABC.
Vamos lembrar a segunda definição de baricentro que afirma que O é baricentro dos pontos A(m_a), B(m_b), C(m_c) e D (m_d) se, e somente se, m_a. $\overrightarrow{OA}$+m_b. $\overrightarrow{OB}$+m_c. $\overrightarrow{OC}$+m_d. $\overrightarrow{OD}$=$\vec{O}$
Como $\overrightarrow{OH}$=$\overrightarrow{OA}$+$\overrightarrow{OB}$+$\overrightarrow{OC}$ então -$\overrightarrow{OH}$+$\overrightarrow{OA}$+$\overrightarrow{OB}$+$\overrightarrow{OC}$ $= \vec{O}$ Donde se conclui que O é baricentro dos pontos H(-1), A(1), B(1) e C(1).
Seja M o ponto médio do lado AB.
$\overrightarrow{OH}$= $\overrightarrow{OA}$+ $\overrightarrow{OB}$+ $\overrightarrow{OC}$=($\overrightarrow{OM}$+ $\overrightarrow{MA}$)+($\overrightarrow{OM}$+ $\overrightarrow{MB}$)+ $\overrightarrow{OC}$ = $\overrightarrow{OC}$+2 $\overrightarrow{OM}$ pois $\overrightarrow{MA}$+ $\overrightarrow{MB}$= $\vec{O}$.
$\overrightarrow{OH}$= $\overrightarrow{OC}$ +2 $\overrightarrow{OM}$ ou - $\overrightarrow{OH}$+ $\overrightarrow{OC}$+2 $\overrightarrow{OM}$= $\vec{O}$ ou $\overrightarrow{HO}$+ $\overrightarrow{OC}$+2 $\overrightarrow{OM}$=0 ou $\overrightarrow{HC}$= -2 $\overrightarrow{OM}$ ou $\overrightarrow{CH}$=2 $\overrightarrow{OM}$. Essa igualdade mostra que as retas que contém CH e OM são paralelas.
Como OM é perpendicular a AB pois M é ponto médio da corda AB então CH também será perpendicular à reta AB. Por um raciocínio análogo mostra-se que BH e AH também são perpendiculares aos lados AC e BC donde se conclui que H é o ortocentro do triângulo.
Mas O = Bar{ H(-1),A(1), B(1), C(1)} e o baricentro G do triângulo é tal que
G= Bar{A(1),B(1),C(1)}. Vamos dividir os quatro pontos H, A,B e C em dois grupos. Um grupo com os pontos A, B e C e o outro com o ponto H. Logo O = Bar { H(-1), A(1), B(1), C(1)} = Bar{H(-1),G(3)}
Mas pela segunda definição de baricentro temos que -$\overrightarrow{OH}$+3 $\overrightarrow{OG}$=0 ou $\overrightarrow{OH}$=3$\overrightarrow{OG}$. Essa igualdade mostra que os pontos O, H e G são colineares e a distância de O até H é o triplo da distância de O até G. A reta de Euler , portanto, passa pelo baricentro, ortocentro e circuncentro do triângulo ABC.

Seja ABCD um quadrilátero de lados AB, BC,CD e DA e M,N,P e Q respectivamente os pontos médios de seus lados. Prove que os segmentos MP e NQ se intersectam nos respectivos pontos médios.



Vamos atribuir massas 1 a cada vértice do quadrilátero.
Sejam E = Bar{A(1),B(1),C(1),D(1)}, M=Bar{A(1), B(1)}e P=Bar{D(1),C(1)}.
E= Bar{A(1),B(1),C(1),D(1)}=Bar{M(2),P(2)}. Logo E é o ponto médio de MP e pertence ao segmento MP..
E= Bar{A(1),B(1),C(1),D(1)} =Bar{Q(2),N(2)}. Logo E é o ponto médio de $\overline{QN}$ e pertence ao segmento QN.
Portanto E pertence à intersecção dos segmentos MP e QN e é o ponto médio de MP e o ponto médio de QN.

Seja ABCD um quadrilátero de lados AB, BC,CD e DA e sejam M,N,P e Q respectivamente os pontos médios de seus lados. Vimos que os segmentos MP e NQ se intersectam nos respectivos pontos médios. Vamos mostrar que o ponto E é o ponto médio dos pontos médios das diagonais do quadrilátero ABCD.

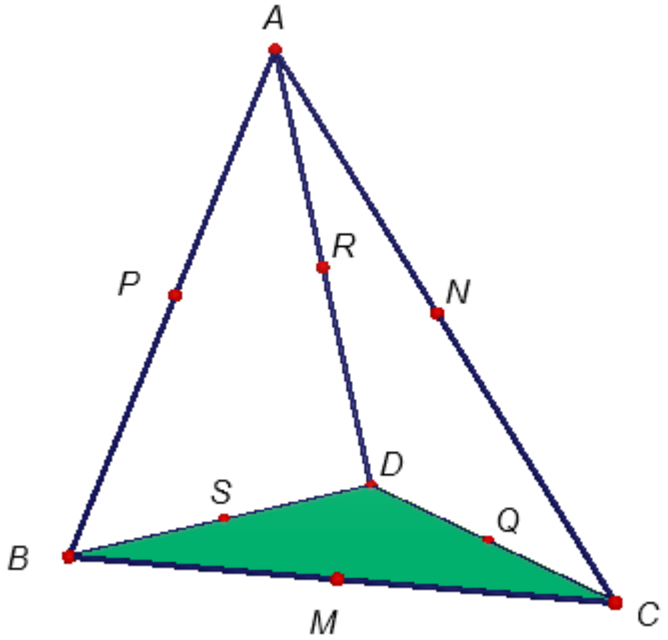


Vamos atribuir massas 1 a cada vértice do quadrilátero e dividir os quatro pontos em dois grupos (A,C) e (B,D)
Seja E =Bar {A(1), B(1),C(1) e D(1)} , H=Bar{A(1) e C(1) e F=Bar{B(1) e D(1)}

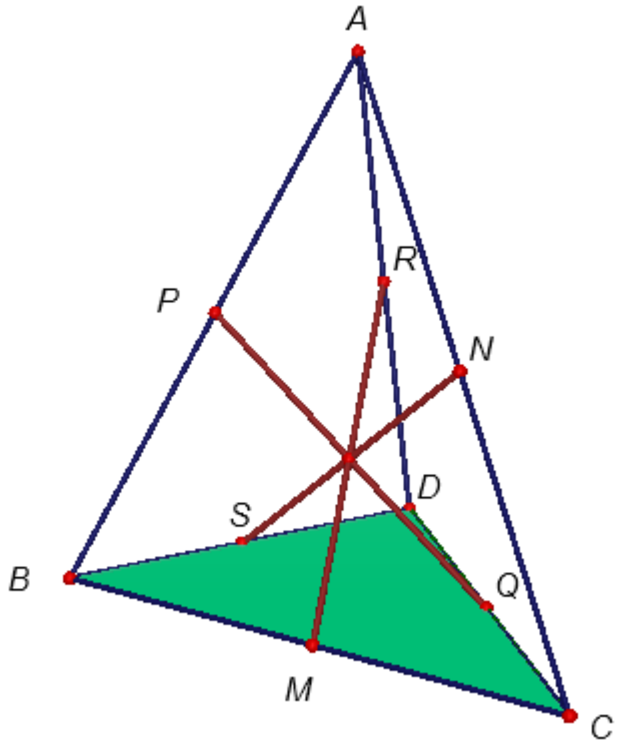
E= Bar {A(1), B(1),C(1) e D(1)}= Bar{H(2),F(2)}. Portanto E é o ponto médio do segmento HF.

Aplicação do baricentro na geometria espacial

Vamos provar que as retas que unem os pontos médios dos lados opostos de um tetraedro passam por um mesmo ponto.
Vamos atribuir massa 1 a cada vértice do tetraedro. Como a soma das massas é diferente de zero, existe o baricentro dos 4 pontos. Seja G o baricentro dos 4 pontos A,B,C e D e P, R, N, M,Q e S respectivamente os pontos médios das arestas AB, AD, AC, BC, DC e BD



.
Vamos dividir os 4 pontos em dois grupos (A,B) e (C.D)
G=Bar{A(1), B(1), C(1), D(1)}=Bar{P(2), Q(2)}.Logo G pertence à reta PQ.
O outro grupo será formado por (A,D) e (B,C)
G=Bar{A(1), B(1),C(1), D(1)}=Bar{R(2), M(2)}.Logo G pertence à reta RM.
O outro grupo será formado por (A,C) e (B,D)
G=Bar{A(1), B(1), C(1), D(1)}=Bar{S(2), N(2)}.Logo G pertence à reta SN
Portanto $G \in PQ \cap RM \cap SN$. Donde se conclui que as retas que unem os pontos médios dos lados opostos de um tetraedro passam por um mesmo ponto G.



Vamos provar que as retas que unem cada vértice de um tetraedro ao baricentro da face oposta passam por um mesmo ponto,

Vamos atribuir massa 1 a cada vértice do tetraedro. Como a soma das massas é diferente de zero, existe o baricentro dos 4 pontos. Sejam G_1, G_2, G_3 e G_4 respectivamente os baricentros das faces BCD, ADC, ABC e ABD do tetraedro. Portanto,

G_1=Bar {B(1), C(1), D(1)}, G_2=Bar {A(1), D(1), C(1)}, G_3=Bar {A(1), B(1), C(1)} e G_4=Bar {A(1), B(1),D(1)}

Seja G=Bar {A(1),B(1),C(1),D(1)}. Logo,

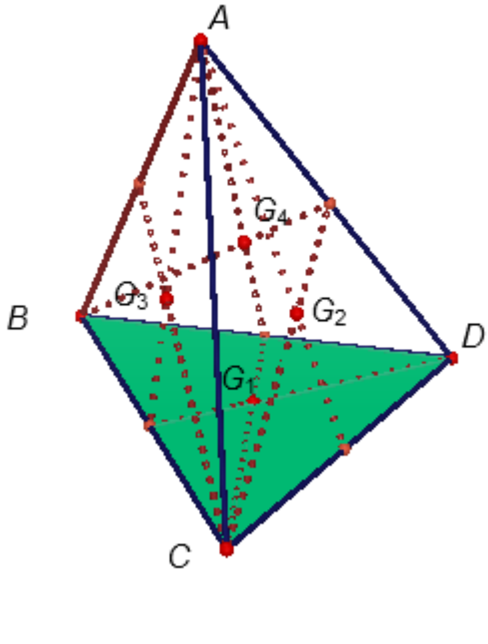
G= Bar {A(1),B(1),C(1),D(1)} = Bar{G_1(3), A(1)} Donde G pertence à reta AG_1

G= G=Bar {A(1),B(1),C(1),D(1)}= Bar{G_2(3),B(1)} Donde G pertence à reta BG_2

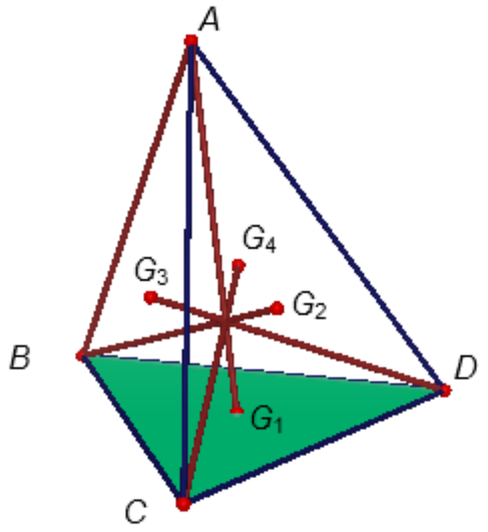
G= G=Bar {A(1),B(1),C(1),D(1)}= Bar{G_3(3),D(1)} Donde G pertence à reta DG_3

G= G=Bar {A(1),B(1),C(1),D(1)}= Bar{G_4(3),C(1)}. Donde G pertence à reta CG_4

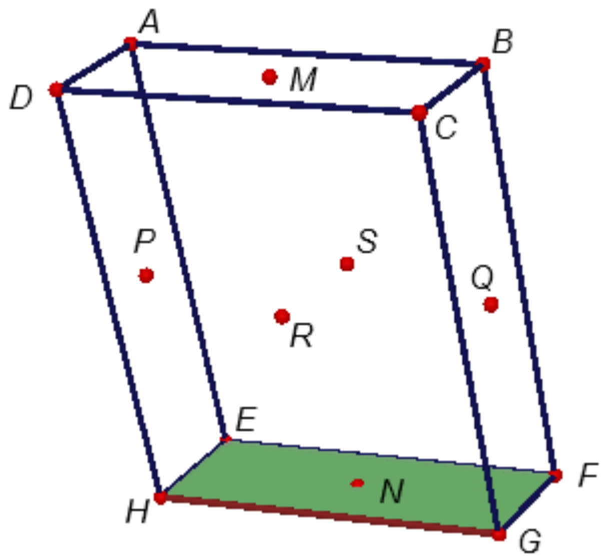
Portanto $G \in AG_1 \cap BG_2 \cap DG_3 \cap CG_4$



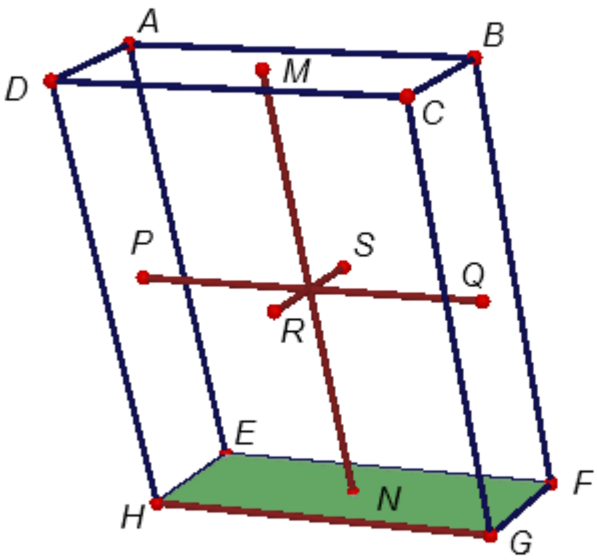
Conclui-se que as retas que unem cada vértice de um tetraedro ao baricentro da face oposta passam pelo ponto G.



Vamos provar que as retas que unem o baricentro de faces opostas de um hexaedro passam por um mesmo ponto.

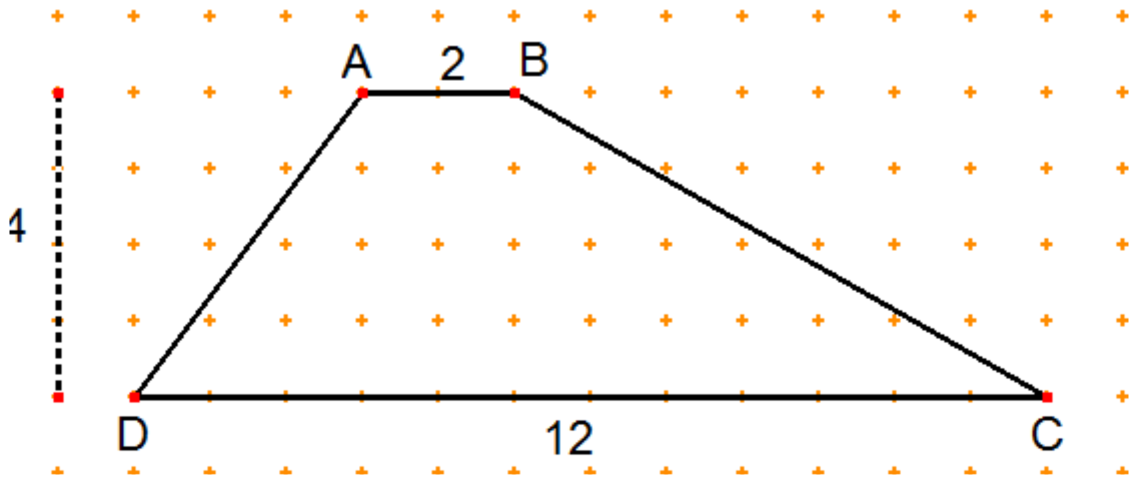


Vamos atribuir massa 1 a cada vértice do hexaedro. Como a soma das massas é diferente de zero, existe o baricentro dos 8 vértices. Sejam M, P,S,Q,R e N respectivamente os baricentros das faces ABCD, DAEH,ABFE,CBFG,DCGH e HEFG.
Seja J=Bar{A(1), B(1),C(1),D(1),E(1),F(1),G(1),H(1)}
J=Bar{M(4),N(4)}. Logo J pertence à reta MN
J=Bar{Q(4),P(4)}. Logo J pertence à reta QP.
J=Bar{R(4),S(4)}. Logo J pertence à reta RS,
Portanto J pertence $MN \cap QP \cap RS$,
Conclui-se que as retas que unem o baricentro de faces opostas de um hexaedro passam pelo ponto J.

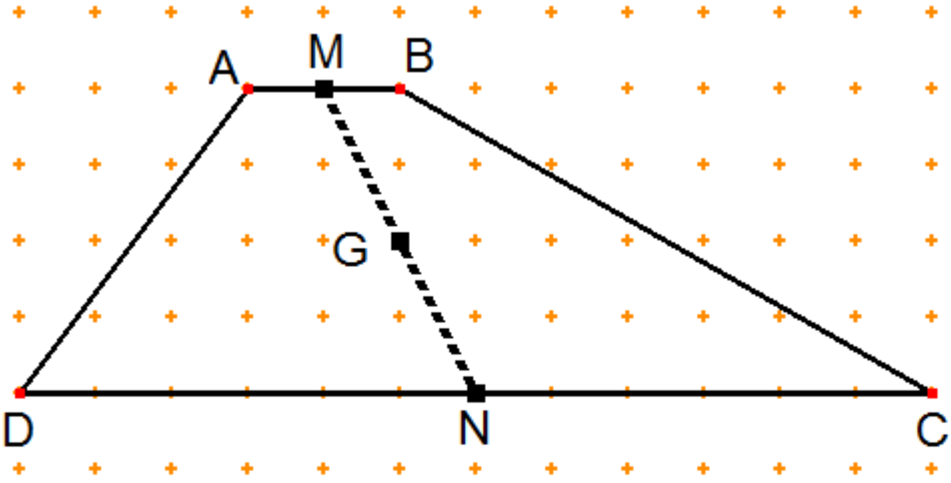


O centro de gravidade da superfície de um quadrilátero qualquer não se localiza no baricentro dos seus 4 vértices.
Do mesmo modo, o centro de gravidade de um conjunto de pontos formado pelos 4 lados do quadrilátero não se localiza no baricentro dos seus 4 vértices.

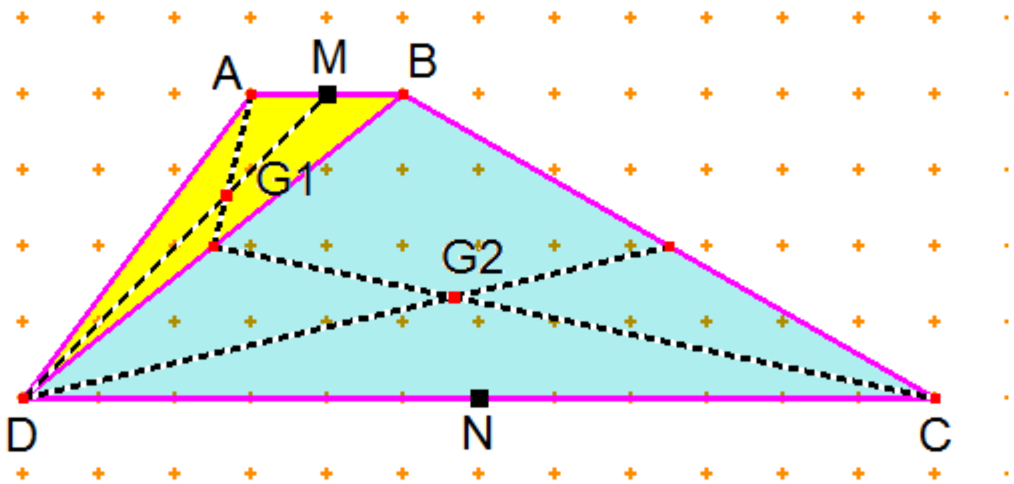
Baricentro de um trapézio qualquer.



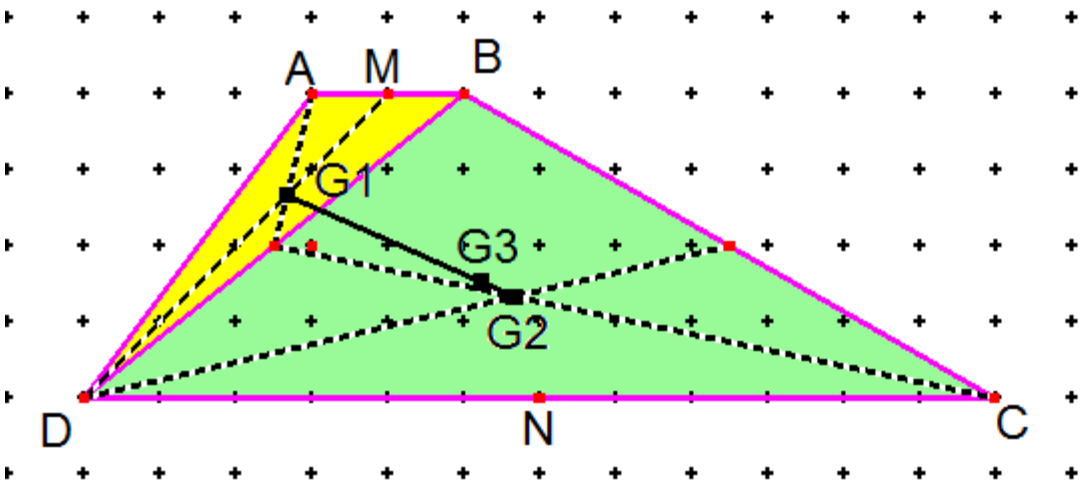
Consideramos cada vértice com massa igual a 1. Vamos agrupar os 4 pontos em dois grupos (A,B) e (C,D). O baricentro dos pontos A e B é o ponto médio M e o baricentro dos pontos C e D é o ponto médio N. O baricentro dos 4 pontos A,B,C e D é o baricentro dos pontos M e N com massas iguais a 2. Logo é o ponto médio G do segmento MN.



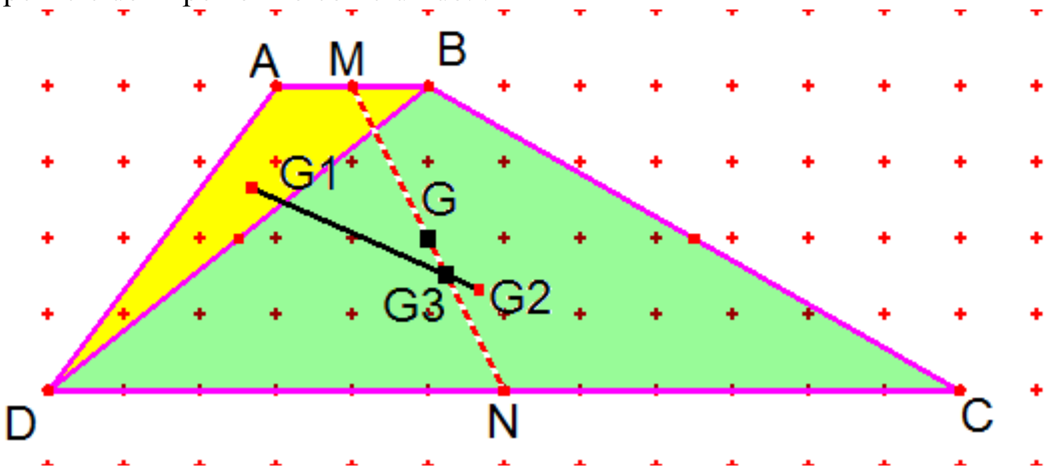
Centro de gravidade da superfície de um trapézio qualquer
Para determinar o centro de gravidade da superfície de um trapézio, o decompomos em dois triângulos ABD e DBC e determinamos os baricentros dos dois triângulos. Sejam G1 e G2 tais baricentros. Finalmente determinamos o baricentro dos dois pontos G1 e G2 com massas iguais às áreas dos triângulos. Por quê áreas? Como a densidade superficial é dada pelo quociente entre a massa e a área, temos que a massa m é igual à densidade vezes a área.Portanto a massa de G1 será a densidade d vezes a área do triângulo ABD e a massa de G2 será a densidade d vezes a área do triângulo DBC.



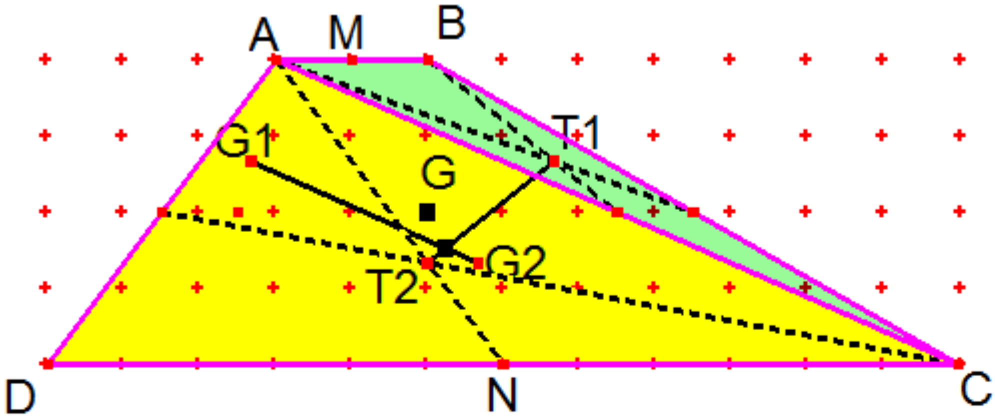
O baricentro dos pontos G1 e G2 com massas 4d e 24d será 28dMG3==4dMG1+24dMG2. Fazendo M=G1 e dividindo os dois membros por 6d teremos 7G1G3=G1G1+6G1G2. Portanto G1G3=6/7 G1G2. Observe que o baricentro G3 pertence à reta G1G2.



Na mesma figura podemos visualizar o baricentro G dos 4 vértices e o baricentro G3 da superfície do trapézio não coincidindo. .

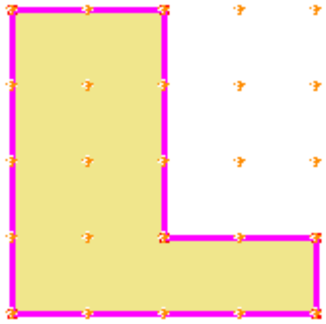


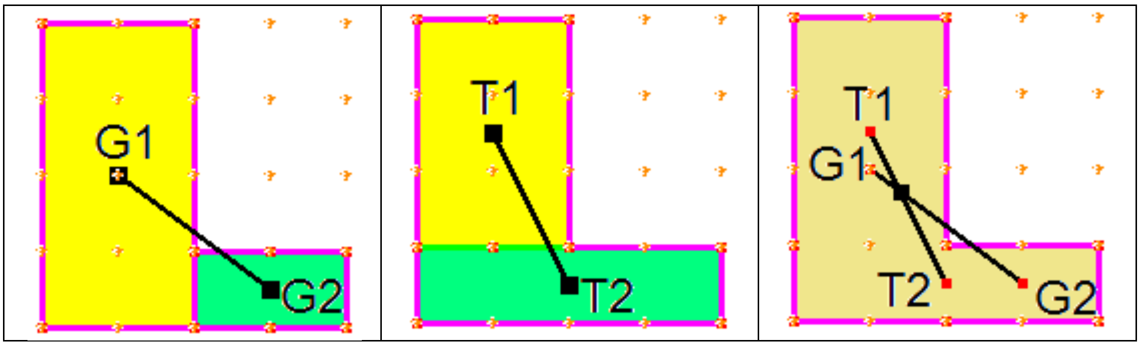
Poderíamos ter escolhido outros dois triângulos e obtidos os baricentros T1 e T2
A intersecção da reta G1G2 com a reta T1T2 fornece o centro de gravidade G3 da superfície do trapézio.



Em geral o centro de gravidade de uma superfície poligonal pode ser determinado decompondo o polígono em triângulos ou retângulos, construindo os centros de gravidade Gi de cada triângulo ou retângulo e calculando as áreas ai de cada triângulo

ou retângulo. O centro de gravidade da superfície do polígono será o baricentro do sistema de pontos Gi afetados das massas ai
Para calcular o centro de gravidade da figura abaixo, podemos dividi-la em retângulos de duas maneiras diferentes e obter os centros de gravidade de cada figura.





Bibliografia

1) Ladegaillerie Y., *Géométrie*   Ellipses, 2003
2) Laville G., *Géométrie pour le CAPES* , Ellipses, 1998
3) Gautier C., *Géométrie,* Ellipses, 1999