Matemática III

Coletânea de Exercícios

Prof. Marco Antonio Simões

Versão 2.1

Conteúdo

1. Funções de duas variáveis

1.1 Conceito

Seja $f(x, y) = \arctan\sqrt{\frac{y}{x}}$. Determine:

1. $f(1, 1)$. Resposta: $f(1, 1) = \frac{\pi}{4}$
2. $f(1, 3)$. Resposta: $f(1, 3) = \frac{\pi}{3}$
3. $f\left(1, \frac{1}{3}\right)$. Resposta: $\left(1, \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$
4. A temperatura do ponto (x, y) de uma chapa é dada por $T(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 15$ (T em °C e x, y em cm). Calcule a temperatura nos pontos

   $P(0, 0)$; $Q(-1, -2)$ e $R(-2, -1)$. Respostas:

   $T(0, 0) = 15°C;\ T(-1, -2) = 29°C;\ T(-2, -1) = 26°C$
5. Um potencial elétrico é dado por $V = \frac{10}{x^2+y^2+z^2}$. Calcule seu valor em $P\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

   Resposta: $V = \frac{180}{53} = 3{,}396$ V.

Encontrar uma função de duas ou mais variáveis que calcule:

6. O comprimento de uma escada apoiada numa parede vertical.
7. O volume de água necessária para encher uma piscina redonda de x metros de raio e y metros de altura.
8. A quantidade de rodapé necessária para se colocar numa sala retangular de largura a e comprimento b.
9. A quantidade em metros quadrados de papel de parede necessária para revestir as paredes laterais de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento e z metros de altura.
10. O volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z.

11. A distância entre os pontos $P(x, y, z)$ e $Q(u, v, w)$.
12. A temperatura nos pontos de uma esfera se ela, em qualquer ponto, é numericamente igual à distância do ponto ao centro da esfera.
13. Uma loja vende certo produto P de duas marcas distintas A e B. A demanda do produto de marca A depende de seu preço e do preço da marca competitiva B. As demandas de unidades por mês são dadas pelas funções: $D_A = 1300 - 50x + 20y$ e $D_B = 1700 + 12x - 20y$, onde x é o preço do produto A e y é o preço do produto B. Escreva uma equação que expresse a receita total da loja obtida com a venda do produto P.

Determine o domínio de cada uma das funções abaixo:

14. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Resposta: $D = \{(x, y) \in R |\ x^2 + y^2 \leq 9\}$
15. $f(x, y) = \sqrt[3]{9 - x^2 - y^2}$. Resposta: $D = \{(x, y) \in R\} = R^2$
16. $f(x, y) = sen(x - y) + \sqrt{x - y}$. Resposta: $D = \{(x, y) \in R | x - y > 0\}$
17. $f(x, y) = \ln(y - x^2)$. Resposta: $D = \{(x, y) \in R |\ y - x^2 > 0\}$
18. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$. Resposta: $D = \{(x, y) \in R |\ x^2 + y^2 \geq 9\}$
19. $f(x, y) = \frac{1}{9 - x^2 - y^2}$. Resposta: $D = \{(x, y) \in R |\ (x^2 + y^2) \neq 9\}$
20. $f(x, y) = \frac{1}{x - y} + \sqrt[3]{x - y}$. Resposta: $D = \{(x, y) \in R |\ x \neq y\}$
21. $f(x, y) = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. Resposta: $D = \{(x, y) \in R |\ |x| > |y|\}$

1.2 Representação nos eixos cartesianos e curvas de nível

Usando um software[1], obtenha os gráficos das funções:

22. $f(x, y) = 1 - y^2$

[1] Sugestão: utilizar o winplot, disponível em http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html.

23. $f(x,y) = 6 - x - y$

24. $f(x,y) = 25 - x^2$

25. $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$

26. $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

27. Para a função $z = f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, obter seu domínio e representar graficamente as curvas de nível $c = \frac{1}{4}, 1, 4$ e fazer um esboço do gráfico de f.

Represente no plano x, y as curvas de nível $c = 0, c = 1$ e $c = 4$ para as funções indicadas:

28. $z = f(x,y) = x^2 + y^2 - 9$

29. $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$

30. $z = f(x,y) = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$

31. O potencial elétrico no ponto (x,y) é definido por $V(x,y) = \frac{4}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$, V em volts. Determine e represente no plano xy as curvas equipotenciais para 4 e 4000 volts. Imagine como seria o gráfico de $V(x,y)$.

32. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Determine as curvas de nível $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$ e faça um esboço do gráfico de f.

33. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, determine as curvas de nível 2 e 3 de $f(x,y)$.

34. Seja $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 1$ com domínio $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$. Determine as curvas de nível 1, 2 e 3 de $f(x,y)$ em D.

2. Derivadas Parciais

2.1 Conceito

Calcule o valor das derivadas parciais f_x e f_y nos pontos indicados:

35. $f(x,y) = 7xy^2 - 7x^2y^3$, $P(1,1)$. Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -7$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -7$

36. $f(x,y) = x^2 + 2x^3y^7$, $P(1,0)$. Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$

Calcule as funções derivadas parciais de:

37. $f(x,y) = x^2 + xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}y^2$. Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{3x^{\frac{2}{3}}}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{2y^{\frac{1}{2}}} + 2yx^{\frac{1}{3}}$

38. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3y^2}}$. Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2y^{\frac{2}{3}}}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2}{3xy^{\frac{5}{3}}}$

39. $f(x,y) = e^{\sqrt{xy}}$. Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}e^{\sqrt{xy}}\sqrt{\frac{y}{x}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}e^{\sqrt{xy}}\sqrt{\frac{x}{y}}$

40. $f(x,y) = y^2\mathrm{tg}(kx)$. Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x} = ky^2\sec^2(kx)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\tan(kx)$

41. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$. Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$

42. $f(x,y) = \mathrm{sen}(x^2 + y^2)$. Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2 + y^2)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos(x^2 + y^2)$

43. $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$. Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

44. $f(x,y) = e^{\frac{x+3}{y+3}}$. Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y+3}e^{\frac{x+3}{y+3}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{\frac{x+3}{y+3}}\frac{(x+3)}{(y+3)^2}$

45. Mostre que, se $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ então $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

46. Sendo $f(x,y) = x \cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, calcule $h(x,y) = y \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$. Resposta: $h(x,y) = ye^{\sqrt{x^2+y^2}}$

Se $f(x,y)$ admite derivadas parciais até 2ª ordem, chama-se laplaciano de f à função $\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)$. Calcule $\nabla^2 f$ para as funções:

47. $f(x,y) = x^4 - y^4$. Resposta: $\nabla^2 f = 12(x^2 - y^2)$

48. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Resposta: $\nabla^2 f = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

49. $f(x,y) = \text{sen}(x^2 - y^2)$. Resposta: $\nabla^2 f = -4(y^2 + x^2)\text{sen}(x^2 - y^2)$

Se o laplaciano de uma função $f(x,y)$ é nulo, ela é chamada de função harmônica, ou seja $\nabla^2 f(x,y) = 0$. Mostre que as funções abaixo são harmônicas:

50. $f(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$. Resposta: $\nabla^2 f = 0$, harmônica

51. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$. Resposta: $\nabla^2 f = 0$, harmônica.

52. Dada a função $f(x,y) = y^2 + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (a) determine o domínio de f, (b) calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(3,4)$, e (c) calcule a equação da reta tangente à curva que é a intersecção do gráfico de f com o plano $x = 3$ no ponto em que $y = 4$. Resposta: (a) $D = R^2 - \{(0,0)\}$ (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) = -\frac{3}{125}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = \frac{996}{125}$; (c) $\text{tg}\beta = f_y(3,4) = \frac{996}{125}$

2.1 Aplicações

53. A temperatura do ponto (x,y) de uma chapa é dada por $T(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 15$ (T em °C e x, y em cm). (a) Determine a equação da isoterma que passa pelo ponto $(1,2)$. (b) Se a partir do ponto $(1,2)$ nos movemos no sentido positivo do eixo x, a temperatura aumentará ou diminuirá? De quantos °C/cm aproximadamente? (c) Em que ponto (a,b) a temperatura vale 45°C, sendo a taxa de variação da temperatura com relação à distância percorrida na direção do eixo y, sentido positivo, igual a 12°C/cm? (a, b positivos). Resposta: (a) $2x^2 + 3y^2 = 14$ (elipse); (b) Aumenta de 4°C por cm aproximadamente; (c) $(a,b) = (3,2)$.

54. Para um gás ideal a temperatura T é uma função do par(P,V), P (pressão), V (volume). Sendo $T = \frac{PV}{40}$, calcule $\frac{\partial T}{\partial P}$ no ponto $(500, 200)$ e interprete o número obtido. Resposta: $\frac{\partial T}{\partial P}(500,200) = 5$ é o aumento mínimo aproximado na temperatura por unidade de pressão, a partir do ponto indicado.

55. Uma fábrica produz mensalmente x unidades de um produto I e y unidades de um produto II, sendo o lucro mensal da produção conjunta dado por $L(x,y) = 15000 + \sqrt{2x^2 + 8y^2}$ (L em reais). Num certo mês foram produzidas 2000 unidades de I e 1000 unidades de II. (a) Calcule o lucro da produção conjunta neste mês. (b) Calcule $\frac{\partial L}{\partial x}$ e $\frac{\partial L}{\partial y}$ neste mês. (c) O que é mais conveniente a partir dessa situação: aumentar a produção de I mantendo constante a de II, ou aumentar a de II mantendo a de I? Resposta: (a) $L(2000, 1000) = 19000$; (b) $\frac{\partial L}{\partial x}(2000, 1000) = 1$; $\frac{\partial L}{\partial y}(2000, 1000) = 2$; (c) É mais conveniente aumentar a produção de II.

56. Para um mol de um gás as grandezas P (pressão), V (volume) e T (temperatura absoluta) relacionam-se através da equação $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$; a, b, R constantes. (a) Represente P em função de T e V; isto é $P = P(T, V)$. (b) Calcule $P(T_0, V_0)$, onde $T_0 = \frac{8a}{27bR}$ e $V_0 = 3b$. (c) Calcule $\frac{\partial P}{\partial T}(T_0, V_0)$ e $\frac{\partial P}{\partial V}(T_0, V_0)$. Respostas: (a) $P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$; (b) $P(T_0, V_0) = \frac{a}{27b^2}$; (c) $\frac{\partial P}{\partial T}(T_0, V_0) = \frac{R}{2b} \frac{\partial P}{\partial V}(T_{0,}V_0) = 0$

Encontrar a inclinação da reta tangente à curva resultante da intersecção de $z = f(x,y)$ com o plano $x = x_0$ no ponto x_0, y_0, z_0.

57. $z = 5x - 2y$; $P(3, -1, 17)$. Resposta: -2

58. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$; $P(1, -1, 1)$. Resposta: -1

59. Seja $z = 3x^2 - 2y^2 - 5x + 2y + 3$. Encontrar a inclinação da reta tangente à curva resultante da intersecção de $z = f(x,y)$, com $y = 2$, no ponto $(1, 2, -3)$. Resposta: 1.

60. Dada a superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, e o ponto $P = \left(2, \sqrt{5}, 3\right)$, determinar a reta tangente às curvas com: (a) O plano $x = 2$. (b) O plano $y = \sqrt{5}$. Respostas: (a) $z = \sqrt{\frac{5}{3}}y + \frac{4}{3}$; (b) $z = \frac{2}{3}x + \frac{9}{3}$

2.3 Plano Tangente

61. Determinar a equação do plano tangente à superfície $f(x,y) = \frac{2}{\sqrt{4-2x^2-y^2}}$ no ponto $(1,1,2)$. Resposta: $z = 4x + 2y - 4$.
62. Determinar a equação do plano tangente à superfície $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ nos pontos (a) $P1 = (0,0,1)$ e (b) $P2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Respostas: (a) $z = 1$, (b) $z = -\frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{y\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$.
63. Determinar a equação do plano tangente à superfície $f(x,y) = xy$, nos pontos (a) $P1 = (0,0,0)$ e (b) $P2 = (1,1,1)$. Respostas: (a) $z = 0$, (b) $z = x + y - 1$.
64. Determinar a equação do plano tangente à superfície $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$ em (a) $P1 = (0,0,0)$ e (b) $P2 = (1,1,-1)$. Respostas: (a) $z = 0$, (b) $z = 4x - 6y + 1$.
65. Determinar a equação do plano tangente à superfície $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ nos pontos (a) $P1 = \left(1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e (b) $P2 = (0,1,1)$. Respostas: (a) $x + y + 2\sqrt{2}z = 4$; (b) $2 - y - z = 0$.
66. Determinar a equação do plano tangente à superfície $z = xe^{x+y}$, nos pontos (a) $P1 = (1,1,f(1,1))$ e (b) $(1,0,f(1,0))$. Respostas: (a) $z = 2e^2x + e^2y - 2e^2$; (b) $z = 2ex + ey - e$.

2.4 Regra da cadeia

Calcular as seguintes derivadas:

67. $z = \tan(x^2 + y), x = 2t, y = t^2$. Resposta: $\frac{dz}{dt} = 10t\sec^2(5t^2)$
68. $z = x\cos y, x = \operatorname{sen} t, y = t$. Resposta: $\frac{dz}{dt} = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$
69. $z = \operatorname{arc\,tan} xy, x = 2t, y = 3t$. Resposta: $\frac{dz}{dt} = \frac{12t}{1+36t^4}$

70. $z = e^x(\cos x + \cos y), x = t^3, y = t^2$. Resposta: $\frac{dz}{dt} = te^{t^3}(-3t \operatorname{sen} t^3 + 3t \cos t^3 + 3t \cos t^2 - 2\operatorname{sen} t^2)$

71. $z = \frac{x}{y}, x = e^{-t},\ y = ln\, t\, .Resposta$: $\frac{dz}{dt} = \frac{-e^{-t}}{ln\, t} - \frac{e^{-t}}{(ln\, t)^2 t}$

72. $z = xy, x = 2t^2 + 1, y = sen\, t. Resposta$: $\frac{dz}{dt} = 4t\, sen\, t + (2t^2 + 1)\, cos\, t$

73. Dado que $f(x, y) = x^3 y - y^2, x = \frac{1}{t}$ e $y = ln\, t$, calcule $\frac{df}{dt}$, sendo $F(t) = f(x(t), y(t))$. Resposta: $\frac{dF}{dt} = -\frac{3\, ln\, t}{t^4} + \frac{1}{t^4} - \frac{2\, ln\, t}{t}$.

74. Um mol de gás perfeito está contido num recipiente que é aquecido. Num instante inicial temos $T = 300K$, aumentando de $3K/s$ e $P = 10^5 Pa$, diminuindo de $9Pa/s$. Calcular (a) o volume (m^3) no instante inicial e (b) dizer se ele está aumentando ou diminuindo, e quanto, sabendo que $PV = nRT, n =$ número de moles, $V = \frac{8T}{P}$, e $R = 8$ (constante). Respostas: (a) $2{,}4.\, 10^{-2} m^3$; (b) $2{,}14.\, 10^{-4}\, \frac{m^3}{s}$.

75. A altura de um cone circular reto é 15 cm e aumenta 1 cm/s. O raio da base é 10 cm e diminui de 0,5 cm/s. Qual a variação do volume nesse instante? Resposta: $-\frac{50}{3}\pi$.

76. Para certa massa de gás vale a equação $PV = 10T$. Num instante inicial $V = 120\ cm^3$, aumentando de 3 cm^3/s, e $P = 8\ kgf/cm^2$. Entretanto, a T é constante. A que taxa deve estar diminuindo P? Resposta: $-0{,}2\ kgf/cm^2 \cdot s$.

Calcular $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ das funções abaixo:

77. $z = \sqrt{x^2 + y^3}$, sendo $x = u^2 + 1$ e $y = \sqrt[3]{v^2}$. Resposta: $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u(u^2+1)}{\sqrt{u^4+v^2+2u^2+1}}, \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{u^4+v^2+2u^2+1}}$

78. $z = ln(x^2 + y^2)$, com $x = cos\, u\, cos\, v$ e $y = sen\, u\, cos\, v$. Resposta: $\frac{\partial z}{\partial u} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial v} = -2tg\, v$

79. $z = xe^y$, para $x = uv$ e $y = u - v$. Resposta: $\frac{\partial z}{\partial u} = ve^{u-v}(1+u)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = ue^{u-v}(1-v)$

80. $z = x^2 - y^2$, sendo $x = u - 3v$ e $y = u - v$. Resposta: $\frac{\partial z}{\partial u} = -10v$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -10u + 10v$.

81. $z = e^{\frac{x}{y}}$, para $x = u\, cos\, v$ e $y = u\, sen\, v$. Resposta: $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{e^{cotg\, v}}{sen^2\, v}$

82. Sabendo-se que $z = f(x,y) = x^2 + y^2$, $x = f(r,\theta) = r\, cos\, \theta$ e $y = f(r,\theta) = r\, sen\, \theta$, encontrar (a) $\frac{\partial z}{\partial r}$ e (b) $\frac{\partial z}{\partial \theta}$. Respostas: (a) $\frac{\partial z}{\partial r} = 2r$, (b) $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$.

83. Sendo $z = arctan\frac{x}{y}$, $x = u\, sen\, v$ e $y = u\, cos\, v$, determine (a) $\frac{\partial z}{\partial u}$ e (b) $\frac{\partial z}{\partial v}$. Respostas: (a) $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$ e (b) $\frac{\partial z}{\partial v} = 1$.

84. Sendo $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = 2r + s$ e $y = r - 2s$, calcule $3\frac{\partial z}{\partial r} + 4\frac{\partial z}{\partial s}$, para $r = 1$ e $s = 2$. Reposta: 60.

2.5 Máximos e mínimos locais

85. Determinar os pontos extremos da função $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$. Resposta: o ponto $P(0,0)$ é um máximo local.

86. Determinar os pontos extremos da função $f(x,y) = x^2 - y^2$. Resposta: o ponto $P(0,0)$ é um ponto de sela.

Determinar os pontos críticos das funções dadas:

87. $z = x^4 - 2x^2 + y^2 - 9$. Resposta: $(0,0), (1,0), (-1,0)$

88. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Resposta: $(0,0)$

89. $z = 2x^4 - 2y^4 - x^2 + y^2 + 1$. Resposta: $(0,0); \left(0,\frac{1}{2}\right); \left(0,-\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2},0\right); \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2},0\right); \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

90. $f(x,y) = cos^2\, x + y^2$. Resposta: $(\frac{n\pi}{2}, 0), n \in Z$

91. $f(x,y) = cos\, x$. Resposta: $(k\pi, b), k \in Z$ e $b \in R$

92. $z = 2y^3 - 3x^4 - 6x^2y + 5$. Resposta: $(0,0); (1,-1); (-1,-1)$

93. $z = (x-2)^2 + y^2$. Resposta: $(2,0)$

94. $z = e^{x-y}(y^2 - 2x^2)$. Resposta: $(0,0); (2,-4)$

95. $z = xe^{-x^2-y^2}$. Resposta: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

96. $z = y^3 - 3x^2y + 3y$. Resposta: $(1,0); (-1,0)$

97. $z = cos\ (2x + y)$. Resposta: $(a, -2a + k\pi)$, a $\in R, k \in Z$

98. $z = y^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - x$. Resposta: $(1,0); \left(1, \frac{1}{2}\right); \left(1, -\frac{1}{2}\right)$

99. $z = x^2 + y^2 + 8x - 6y + 12$. Resposta: $(-4,3)$

100. $f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{64}{x} + xy$. Resposta: $\left(16, -\frac{1}{4}\right)$

Classificar os pontos críticos quando possível:

101. $z = 10 - x^2 - y^2$. Resposta: $(0,0)$, ponto de máximo

102. $z = 2x^2 + y^2 - 5$. Resposta: $(0,0)$, ponto de mínimo

103. $z = 4 - 2x^2 - 3y^2$. Resposta: $(0,0)$, ponto de máximo

104. $z = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 7$. Resposta: $(3,1)$, ponto de mínimo

105. $z = y + x\, sen\, y$. Resposta: $(-1, 2k\pi); (1, (2k-1)\pi). k \in Z$, pontos de sela

106. $z = x\, sen\, 2y$. Resposta: $\left(0, \frac{k\pi}{2}\right), k \in Z$, pontos de sela

107. $z = e^{x^2+y^2}$. Resposta: $(0,0)$, ponto de mínimo

108. $z = 4xy$. Resposta: $(0,0)$, ponto de sela

109. $z = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$. Resposta: $(0,0)$, ponto de sela e $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, ponto de mínimo

110. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Resposta: $(2,1)$, ponto de mínimo; $(-2,-1)$, ponto de máximo; $(1,2)$, ponto de sela, e $(-1,-2)$, ponto de sela

111. $z = 4x^2 + 3xy + y^2 + 12x + 2y + 1$. Resposta: $\left(-\frac{18}{7}, \frac{20}{7}\right)$, ponto de mínimo

112. $z = x^4 + \frac{1}{4}y^5 + x + \frac{1}{3}y^3 + 15$. Resposta: $\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, 0\right)$, não é possível classificar

113. $z = x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7$. Resposta: $(1, 4)$, ponto de mínimo

114. $z = 4xy - x^4 - 2y^2$. Resposta: $(0, 0)$, ponto de sela; $(1, 1)$, ponto de máximo e $(-1, -1)$, ponto de máximo

115. $z = \frac{x}{x^2+y^2+4}$. Resposta: $(2, 0)$, ponto de máximo e $(-2, 0)$, ponto de mínimo

116. $z = y \cos x$. Resposta: $\left(\frac{2k+1}{2}\pi, 0\right)$, $k \in Z$, pontos de sela

117. $z = \frac{1}{3}y^3 + 4xy - 9y - x^2$. Resposta: $(2, 1)$, ponto de sela e $(-18, -9)$, ponto de sela

118. Determinar os pontos críticos da função $f(x, y) = 4x^3 - 6x^2y - 2y^3 + 3x^2 - 6xy + 6y$, e classificá-los. Resposta: $P_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ é um máximo local; $P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ é um mínimo local; $P_3(-1, -1)$ é um ponto de sela e $P_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é um ponto de sela.

119. Seja $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y$. Encontre os pontos críticos e classifique-os. Resposta: $(1, 1)$ é um mínimo local; $(-1, -1)$ é um máximo local; $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ são pontos de sela.

120. Classificar os pontos críticos de $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$. Resposta: $(0, 1)$ e $(0, -1)$ são pontos de sela; $(1, 0)$ é o ponto de mínimo local e $(-1, 0)$ é o ponto de máximo local.

121. Uma indústria produz dois produtos A e B. O lucro da indústria pela venda de x produtos A e y produtos B é dado por: $L(x, y) = 60x + 100y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - xy$. Supondo que toda a produção seja vendida, determinar o nível de produção que maximiza o lucro. Resposta: 10 unidades do produto A e 30 unidades do produto B.

122. Quais dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume 4 m^3 e com a menor área de superfície possível? Resposta: base de 2 x 2 metros e altura de 1 metro.

123. Determinar 3 números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima. Resposta: $\sqrt[3]{100}, \sqrt[3]{100}, \sqrt[3]{100}$.

2.6 Máximos e mínimos absolutos

124. Determinar o ponto mais frio e mais quente de uma chapa circular de 1 metro de raio, sabendo que $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y + 5$, no domínio $x^2 + y^2 \leq 1$. Resposta: Temperatura máxima $= 7{,}25°C$; temperatura mínima: $4{,}75°C$.

125. Encontre os pontos de máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 12y$, no domínio $x^2 + y^2 \leq 1$. Indique os respectivos valores. Resposta: Máximo de 11 em $(0, 1)$ e mínimo de -13 em $(0, -1)$.

126. A temperatura T em qualquer ponto do plano é dada por $T(x, y) = 3y^2 + x^2 -$ x. Analisar os máximos e mínimos absolutos no domínio $x^2 + y^2 \leq 1$. Resposta: Máximo em $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ e $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ de $\frac{25}{8}$ e mínimo em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ de $-\frac{1}{4}$.

127. Encontre os valores de máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ no domínio $x^2 + y^2 \leq 1$. Resposta: Máximo de $\sqrt{2}$ e mínimo de 1.

128. Encontre os valores de máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = xy$ no domínio $x^2 + y^2 \leq 1$. Resposta: Máximo de $\frac{1}{2}$ e mínimo de $-\frac{1}{2}$.

129. Um disco $x^2 + y^2 \leq 1$ tem temperatura dada por $T(x, y) = x^2 - x + 2y^2$. Determinar suas temperaturas máximas e mínimas e as respectivas coordenadas. Resposta: Temperatura mínima de $-0{,}25°C$ em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e máxima de $2{,}25°C$ em $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

130. A distribuição de temperatura numa chapa circular de 1 metro de raio é dada por $T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y - 10$. Determine as coordenadas e valores das temperaturas máximas e mínimas. Resposta: Temperatura máxima de $3{,}62°C$ em $(-0{,}371, 0{,}928)$ e mínima de $-14{,}38°C$ em $(0{,}371\ e\ -0{,}928)$.

2.7 Máximos e Mínimos Restritos

Determinar os valores de máximo e/ou mínimo da função dada, sujeita às restrições indicadas:

131. $z = 4 - 2x - 3y;\ x^2 + y^2 = 1$. Resposta: $mín.: 0{,}394;\ máx.: 7{,}606$.

132. $z = 2x + y; x^2 + y^2 = 4$. Resposta: $mín.: -4{,}472;\ máx.: 4{,}472$.

133. $z = x^2 + y^2; x + y = 1$. Resposta: $mín.:$ ½ .

134. $z = 6 - 4x - 3y; x^2 + y^2 = 1$ Resposta: $mín.: 1;\ máx.: 11$.

135. $z = xy; 2x^2 + y^2 = 16$. Resposta: $mín.: -5{,}657,\ máx.: 5{,}657$.

136. $z = x + y; x^2 + y^2 = 1$. Resposta: $mín.: -\sqrt{2}, máx.: \sqrt{2}$.

137. $z = x^2 + y; x^2 - y^2 = 1$. (apenas mínimo). Resposta: $mín.:$ ¾.

138. $z = x^2 + y^2; x^4 + y^4 = 2$. (apenas máximo). Resposta: $máx.: 2$.

139. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; x + y + z = 1$. Resposta: $mín.: 1/3$.

140. As alturas em metros dos pontos de uma montanha em relação a um plano horizontal fixo tomado como plano xy são dadas pela função $f(xy) = 100 - x^2 - y^2$. Uma estrada nessa montanha é a intersecção da montanha com a superfície $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Se um homem percorrer a estrada inteira, qual a altura máxima e mínima que ele atingirá?

Resposta: máxima: 99,83 metros; mínima: 94,17 metros.

141. Determine 3 números positivos $x, y\ e\ z$ tais que sua soma seja mínima, sabendo

que o produto desses números é igual a 100. Resposta: $x = y = z = \sqrt[3]{100}$

142. Calcular as dimensões e o volume máximo do paralelogramo $V = xyz$, restrito pelo plano $6x + 4y + 3z - 24 = 0$, no primeiro octante.

Resposta: $x = \frac{4}{3}, y = 2 \; e \; z = \frac{8}{3}. Volume = \frac{64}{9} uv.$

143. Encontrar as dimensões de uma caixa com base retangular, sem tampa, de volume máximo, com área externa igual a 5 cm^2. Resposta: $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)$

144. Entre todos os triângulos de perímetro igual a 10 cm, encontrar o que tem maior área, sabendo que a área do triângulo pode ser calculada por $A = s(s-x)(s-y)(s-\mathrm{z})$, onde $s = \frac{x+y+z}{2}$. Resposta: um triângulo equilátero de lateral $\frac{10}{3}$.

145. Encontrar o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ mais próximo do ponto $(3, 3, 3)$.

Resposta: $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

146. Determinar o ponto $P(x, y, z)$ do plano $x + 3y + 2z = 6$, cuja distância até a origem seja mínima. Resposta: $\left(\frac{3}{7}, \frac{9}{7}, \frac{6}{7}\right)$

147. Um fabricante necessita fabricar 2000 componentes em 2 locais, sendo x a quantidade produzida num local e y a quantidade produzida no outro. O custo de produção é dado por $C = 0{,}25x^2 + 10x + 0{,}15y^2 + 12y$. Determine o número de unidades a serem produzidas em cada local de modo a otimizar o custo.

148. Uma firma de embalagens necessita fabricar caixas retangulares de 64 cm^3 de volume. Se o material da parte lateral custa a metade do material usado para a tampa e para o fundo, determinar as dimensões da caixa que minimizam o custo. Resposta: $\left(\sqrt[3]{32}, \sqrt[3]{32}, 2\sqrt[3]{32}\right)$

149. Precisa-se construir um tanque com a forma de um paralelepípedo para estocar 270.000 litros de combustível, gastando a menor quantidade possível de material em

sua construção. Supondo que as paredes serão feitas com o mesmo material e terão a mesma espessura, determinar as dimensões do tanque.

Resposta: o tanque terá 3 lados iguais de $30\sqrt[3]{10}\ metros$.

150. A temperatura em °C de uma massa gasosa é dada por $T = x^2 + 4y^2 + 5z^2$, onde $x, y\ e\ z$ são as coordenadas cartesianas. Determinar qual a temperatura mínima no plano $3x + 2y + 4z = 12$. Resposta: $\frac{120}{11}$ °C $= 10{,}91$°C, no ponto $\left(\frac{30}{11}, \frac{5}{11}, \frac{8}{11}\right)$.

151. Determine a dimensão do pacote retangular de maior volume considerando que a soma de seu comprimento e perímetro de seção transversal não excedam 108 polegadas.

152. Determinar a distância mínima entre (a) o ponto $(0,1)$ e a curva $x^2 = 4y$ e (b) entre o ponto $(1,0)$ e a curva $y = \sqrt{x}$. Resposta: $(a)\ d = 1, (b)\ d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

153. Mostrar que o paralelepípedo retângulo de maior volume que pode ser colocado dentro de uma esfera é um cubo.

154. Calcular a área máxima de um retângulo inscrito em uma semicircunferência de raio 2. Resposta: 4.

2.8 Gradiente e Derivada Direcional

Calcular o gradiente do campo escalar dado:

155. $f(x, y, z) = xy + xz + yz$. Resposta: $(y + z)\vec{\imath} + (x + z)\vec{\jmath} + (x + y)\vec{k}$

156. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$. Resposta: $2x\vec{\imath} + 4y\vec{\jmath} + 8z\vec{k}$

157. $f(x, y) = 3xy^3 - 2y$. Resposta: $3y^3\vec{\imath} + (9xy^2 - 2)\vec{\jmath}$

158. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$. Resposta: $\frac{1}{2}\sqrt{xyz}\left(\frac{1}{x}\vec{\imath} + \frac{1}{y}\vec{\jmath} + \frac{1}{z}\vec{k}\right)$

159. $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$. Resposta: $\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{\imath} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{\jmath} + \vec{k}$

160. $f(x,y) = e^{2x^2+y}$. Resposta: $e^{2x^2+y}4x\vec{\imath} + e^{2x^2+y}\vec{\jmath}$

161. $f(x,y) = arc\ tg\ xy$. Resposta: $\frac{y}{1+x^2y^2}\vec{\imath} + \frac{x}{1+x^2y^2}\vec{\jmath}$

162. $f(x,y) = \frac{2x}{x-y}$. Resposta: $\frac{-2y}{(x-y)^2}\vec{\imath} + \frac{2x}{(x-y)^2}\vec{\jmath}$

163. $f(x,y,z) = 2xy + yz^2 + \ln z$. Resposta: $2y\vec{\imath} + (2x+z^2)\vec{\jmath} + \left(2yz + \frac{1}{z}\right)\vec{k}$

164. $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x+y}{z}}$. Resposta: $\sqrt{\frac{z}{x+y}}\left(\frac{1}{2z}, \frac{1}{2z}, \frac{-(x+y)}{2z^2}\right)$

165. $f(x,y,z) = ze^{x^2-y}$. Resposta: $2xze^{x^2-y}\vec{\imath} - ze^{x^2-y}\vec{\jmath} + e^{x^2-y}\vec{k}$

Determinar o vetor normal à superfície dada no ponto indicado:

166. $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 8;\ P(1, \sqrt{2})$. Resposta: $4\vec{\imath} + 6\sqrt{2}\vec{\jmath}$

167. $f(x,y) = 2x^2 - y;\ P(-1, 2)$. Resposta: $-4\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

168. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 8;\ P(2, 2)$. Resposta: $4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

169. $f(x,y) = 5x - y - 2; P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Resposta: $5\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

170. $f(x,y,z) = 2x + 5y + 3z - 10; P\left(1, 2, \frac{-2}{3}\right)$.Resposta: $(2, 5, 3)$

171. $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2; P(0, 0, 0)$. Resposta: $(0, 0, 1)$

172. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z; P(1, 1, 1)$. Resposta: $(2, 2, -2)$

Calcular a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial s}$ (x_0, y_0) na direção $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$:

173. $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2;\ (x_0, y_0) = (1, 2)$. Resposta: $4\sqrt{5}$

174. $f(x,y) = e^{xy};\ (x_0, y_0) = (-1, 2)$. Resposta: $\sqrt{5}e^{-2}$

175. $f(x,y) = \frac{x+y}{1-x};\ (x_0, y_0) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Resposta: $\frac{2}{\sqrt{5}}$

176. Calcular a derivada parcial de $f(x,y,z) = 3x^2 + 4y^2 + z$, na direção do vetor $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Resposta: $2x + \frac{16}{3}y + \frac{2}{3}$

177. Calcular a derivada parcial de $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, na direção de máximo crescimento de f. Resposta: $[(y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2]^{\frac{1}{2}}$

178. Calcular a derivada parcial de $f(x, y) = x^2 + y^2$, na direção da semi-reta $y - x = 4,\ x \geq 0$. Resposta: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y$

179. Calcular a derivada parcial de $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, na direção de máximo decrescimento de f. Resposta: $-2\sqrt{x^2 + y^2}$

180. Calcular a derivada parcial de $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, na direção do vetor $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$. Resposta: $\frac{-x-y-z}{\sqrt{3(1-x^2-y^2-z^2)}}$

181. Em que direção devemos nos deslocar partindo de $Q(1, 1, 0)$ para obter a taxa de maior decréscimo da função $f(x, y) = (2x + y - 2)^2 + (5x - 2y)^2$? Resposta: $-34\vec{\imath} + 10\vec{\jmath}$

182. Em que direção a derivada direcional de $f(x, y) = 2xy - x^2$ no ponto $(1, 1)$ é nula? Resposta: $a\vec{\imath}, a \in R - \{0\}$

183. Usando gradiente, encontrar uma equação para a reta tangente à curva $x^2 - y^2 = 1$, no ponto $(\sqrt{2}, 1)$. Resposta: $y = \sqrt{2}x - 1$

Encontrar o vetor intensidade elétrica $\vec{E} = -grad\ V$, a partir da função potencial V, no ponto indicado:

184. $V = 2x^2 + 2y^2 - z^2; P(2,2,2)$. Resposta: $(-8, -8, 4)$

185. $V = e^y cos\ x; P\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$. Resposta: $(1, 0, 0)$

186. $V = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; P(1, 2, -2)$. Resposta: $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \frac{-2}{27}\right)$

187. Um potencial elétrico é dado por $V = \frac{10}{x^2+y^2+z^2}$. Determinar o campo elétrico. Resposta: $\frac{20}{(x^2+y^2+z^2)^2}\ (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$

2.9 Divergente e Rotacional

Dado o campo vetorial $\vec{f}$, calcular div $\vec{f}$.

188. $\vec{f}(x,y) = 2x^4\vec{\imath} + e^{xy}\vec{\jmath}$. Resposta: $div\,\vec{f} = 8x^3 + xe^{xy}$

189. $\vec{f}(x,y) = sen^2 x\,\vec{\imath} + 2\cos x\,\vec{\jmath}$. Resposta: $div\,\vec{f} = 2\,sen\,x\cos x$

190. $\vec{f}(x,y,z) = 2x^2y^2\vec{\imath} + 3xyz\vec{\jmath} + y^2z\vec{k})$. Resposta: $div\,\vec{f} = 4xy^2 + 3xz + y^2$

191. $\vec{f}(x,y,z) = \ln xy\,\vec{\imath} + x\vec{\jmath} + z\vec{k}$. Resposta: $div\,\vec{f} = \frac{1}{x} + 1$

Um fluido escoa em movimento uniforme com velocidade $\vec{v}$ dada pela função abaixo. Verificar se $\vec{v}$ representa um possível fluxo incompressível.

192. $\vec{v} = z^2\vec{\imath} + x\vec{\jmath} + y^2\vec{k}$. Resposta: incompressível

193. $\vec{v} = 2\vec{\imath} + x\vec{\jmath} - \vec{k}$. Resposta: incompressível

194. $\vec{v} = 2xy\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$. Resposta: compressível

Encontrar o divergente e o rotacional do campo vetorial dado.

195. $\vec{f}(x,y,z) = (2x+4z)\vec{\imath} + (y-z)\vec{\jmath} + (3x-yz)\vec{k}$. Resposta: $div\,\vec{f} = 3 - y; rot\,\vec{f} = (1-z)\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

196. $\vec{f}(x,y) = (x^2+y^2)\vec{\imath} + (\,x^2-y^2)\vec{\jmath}$. Resposta: $div\,\vec{f} = 2(x-y); rot\,\vec{f} = 2(x-y)\vec{k}$

197. $\vec{f}(x,y,z) = (x^2\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} + z^2\vec{k})$. Resposta: $div\,\vec{f} = 2(x+y+z); rot\,\vec{f} = 0$

198. $\vec{f}(x,y) = (e^x\cos y\,\vec{\imath}, +e^x sen\,y\vec{\jmath})$. Resposta: $div\,\vec{f} = 2e^x\cos y\,; rot\,\vec{f} = 2e^x\,sen\,y\,\vec{k}$

199. $\vec{f}(x,y,z) = (xyz^3\vec{\imath} + 2xy^3\vec{\jmath} - x^2yz\vec{k})$. Resposta: $div\,\vec{f} = yz^3 + 6xy^2 - x^2y; rot\,\vec{f} = -x^2z\vec{\imath} + (3xyz^2 + 2xyz)\vec{\jmath} + (2y^3 - xz^3)\vec{k}$

200. $\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{\imath} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{\jmath}$, com $x \; e \; y \neq 0$. Resposta: $div\,\vec{f} = 0; rot\,\vec{f} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k}$

201. $\vec{f}(x,y,z) = xy^2z(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k})$. Resposta: $div\,\vec{f} = y^2z + 4xyz + 3xy^2; rot\,\vec{f} = 2xy(3z-y)\vec{\imath} + y^2(x-3z)\vec{\jmath} + 2yz(y-x)\vec{k}$

Determinar $rot\,\vec{f}$ sendo:

202. $\vec{f} = sen\,xy\,\vec{\imath} + cos\,xy\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$. Resposta: $rot\,\vec{f} = -(y\,sen\,xy + x\,cos\,xy)\vec{k}$

203. $\vec{f} = 2x^2y\,\vec{\imath} + 3xz\vec{\jmath} - y\vec{k}$. Resposta: $rot\,\vec{f} = -(3x+1)\vec{\imath} + (3z-2x^2)\vec{k}$

204. $\vec{f} = (x+y)\vec{\imath} - ln\,z\,\vec{k}$. Resposta: $rot\,\vec{f} = -\vec{k}$

Sejam $\vec{f} = xz\vec{\imath} + zy\vec{\jmath} + xy\vec{k}$ e $\vec{g} = x^2\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$. Determinar:

205. $\nabla \cdot \vec{f}$. Resposta: $2z$

206. $\nabla \cdot \vec{g}$. Resposta: $2(x+y+z)$

207. $\nabla \times \vec{f}$. Resposta: $(x-y)\vec{\imath} + (x-y)\vec{\jmath}$

208. $\nabla \times \vec{g}$. Resposta: 0

209. $\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g})$. Resposta: $(2xyz - x^2z + 3xz^2)\vec{\imath} + (3yz^2 - y^2z + 2xyz)\vec{\jmath} + (3x^2y - 2y^3 + 3xy^2)\vec{k}$

210. $(\nabla \times \vec{f}) \times \vec{g}$. Resposta: $z^2(x-y)\vec{\imath} + z^2(x-y)\vec{\jmath} + (x-y)(y^2-x^2)\vec{k}$

211. $(\nabla \times \vec{f}) \times (\nabla \times \vec{g})$. Resposta: 0

Seja $\vec{u} = (x^2 - y^2) \cdot \nabla f$. Calcular div $\vec{u}$ no $P(1,2,3)$ sendo:

212. $f = sen\,xy + x$. Resposta: 15,64.

213. $f = xyz + 2xy$. Resposta: 0

Se $f = 2x^3yz$ e $\vec{v} = x^3\vec{\imath} + xz\vec{\jmath} + sen\, x\vec{k}$, calcular:

214. $\nabla f + rot\, \vec{v}$. Resposta: $(6x^2yz - x)\vec{\imath} + (2x^3z - cos\, x)\vec{\jmath} + (2x^3y + z)\vec{k}$

215. $div(f\vec{v})$. Resposta: $12x^5yz + 2x^4z^2 + 2x^3y\, sen\, x$

216. $rot(f\vec{v})$. Resposta:

$(2x^3z\, sen\, x - 4x^4yz)\vec{\imath} + (2x^6y - 2x^3yz\, cos\, x - 6x^2yz\, sen\, x)\vec{\jmath} + (8x^3yz^2 - 2x^6z)\vec{k}$

217. Sendo $\vec{u} = 2xz\vec{\imath} + (x^2 - z^2)\vec{\jmath} + (x^2 + 2z)\vec{k}$, calcular $rot(rot\, \vec{u}\,)$. Resposta: 0

Supondo que $\vec{v}$ representa a velocidade de um fluido em movimento, verificar se $\vec{v}$ representa um possível fluxo incompressível.

218. $\vec{v}(x, y) = (2y - 3)\vec{\imath} + x^2\vec{\jmath}$. Resposta: incompressível

219. $\vec{v}(x, y, z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. Resposta: compressível

220. $\vec{v}(x, y, z) = 2x\vec{\imath} - 2y\vec{\jmath} + 0\vec{k}$. Resposta: incompressível

221. $\vec{v}(x, y) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$. Resposta: incompressível

222. $\vec{v}(x, y, z) = 2xz\vec{\imath} - 2yz\vec{\jmath} + 2z\vec{k}$. Resposta: compressível

223. Um fluido escoa em movimento uniforme no domínio $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 8\}$. Se a velocidade em cada ponto é dada por $\vec{v} = (y + 1)\vec{\imath}$, verificar que todas as partículas se deslocam em linha reta e que $\vec{v}$ representa um possível fluxo incompressível. Resposta: incompressível

Verificar se as seguintes funções são harmônicas em algum domínio.

224. $f(x, y, z) = xz + ln\, xy$. Resposta: não harmônica

225. $f(x, y) = 2(x^2 - y^2) + y + 10$. Resposta: harmônica

226. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Resposta: não harmônica

227. $f(x, y, z) = x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2$. Resposta: harmônica

228. $f(x, y, z) = x + y + z$. Resposta: harmônica

229. $f(x, y) = e^x \cos y$. Resposta: harmônica

Verificar se o campo dado é irrotacional.

230. $\vec{f}(x, y, z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$. Resposta: irrotacional

231. $\vec{f}(x, y, z) = xyz\vec{i} + (2x - 1)\vec{j} + x^2z\vec{k}$. Resposta: rotacional

232. $\vec{f}(x, y, z) = yze^{xyz}\vec{i} + xze^{xyz}\vec{j} + xye^{xyz}\vec{k}$. Resposta: irrotacional

233. $\vec{f}(x, y, z) = (2x + \cos yz)\vec{i} - (xz\,sen\,yz)\vec{j} - (xy\,sen\,yz)\vec{k}$. Resposta: irrotacional

234. $\vec{f}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$. Resposta: irrotacional

235. Um escoamento é representado pelo campo de velocidade $\vec{v} = (y^2 + z^2)\vec{i} + xz\vec{j} + 2x^2y^2\vec{k}$. Verificar se o escoamento é um possível escoamento incompressível e irrotacional. Resposta: incompressível e rotacional.

3. Integrais Duplas

3.1 Conceito e cálculo de áreas

Calcule as seguintes integrais parciais

236. $\int_0^x (2x - y)\, dy$. Resposta: $\frac{3x^2}{2}$

237. $\int_x^{x^2} \frac{y}{x}\, dy$. Resposta: $\frac{x^3 - x}{2}$.

238. $\int_1^{2y} \frac{y}{x}\, dx$. Resposta: $y\,ln|2y|$

239. $\int_0^{e^y} y\, dx$. Resposta:

240. $\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2y\, dy$. Resposta: $x^2\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)$

241. $\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\ dy$. Resposta:

242. $\int_1^{e^y} \frac{y \ln x}{x}\ dx$. Resposta: $\frac{y^3}{2}$

243. $\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2)\ dx$. Resposta:

244. $\int_0^{\mathrm{x}} ye^{xy}\ dy$. Resposta: $e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x^2} + \frac{1}{x^2}$

245. $\int_y^3 \frac{xy}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$. Resposta:

Calcule as seguintes integrais duplas:

246. $\int_0^1 \int_0^2 (x + y)\ dy\ dx$. Resposta: 3

247. $\int_0^2 \int_0^2 (6 - x^2)\ dy\ dx$. Resposta:

248. $\int_0^4 \int_0^3 xy\ dy\ dx$. Resposta: 36

249. $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 - x^2}\ dy\ dx$. Resposta:

250. $\int_0^1 \int_0^y (x + y)\ dx\ dy$. Resposta: $\frac{1}{2}$

251. $\int_0^2 \int_{3y^2-6y}^{2y-y^2} 3y\ dx\ dy$. Resposta:

252. $\int_1^2 \int_0^4 (3x^2 - 2y^2 + 1)\ dx\ dy$. Resposta: $\frac{148}{3}$

253. $\int_0^1 \int_y^{2y} (1 + 2x^2 + 2y^2)\ dx\ dy$. Resposta:

254. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} -5xy\ \mathrm{d}x\ dy$. Resposta: 5

255. $\int_0^4 \int_0^x \frac{2}{x^2+1}\ dy\ dx$. Resposta:

256. $\int_0^2 \int_0^{6x^2} x^3\ dy\ dx$. Resposta: 64

257. $\int_{-1}^1 \int_{-2}^2 (x^2 - y^2)\ dy\ dx$. Resposta:

Calcular a integral dupla das funções abaixo, nos limites fornecidos:

258. $f(x,y) = xe^{xy}; D\ \text{é}\ o\ retângulo \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$. Resposta: 15,367

259. $f(x,y) = ye^{xy}; D\ \text{é}\ o\ retângulo \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$. Resposta: 5,362

260. $f(x,y) = xcosxy; D\ \text{é}\ o\ retângulo \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Resposta: 1,273

261. $f(x,y) = ylnx; D\ \text{é}\ o\ retângulo\ (a) \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$ e $(b) \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$. Resposta:

(a)1,364, (b) 0,535.

262. $f(x,y) = \frac{1}{x+y}; D\ \text{é}\ o\ quadrado \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$. Resposta: 0,340

263. $f(x,y) = 2x + 4y; sendo\ D\ delimitado\ por \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2x \end{cases}$. Resposta: 2,667

264. $f(x,y) = x\mathrm{y}^2 + x; sendo\ D\ delimitado\ por \begin{cases} -y \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$. Resposta: 0

265. $f(x,y) = x$ sendo D delimitado por:

266. $\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq sen\ x \end{cases}$. Resposta: π

267. $\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$. Resposta: $\frac{1}{3}$

268. $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$. Resposta: 0

269. $\begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ lnx \leq y \leq 1 \end{cases}$. Resposta: 1,097

270. $f(x,y) = y; sendo\ D\ delimitado\ por \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq senx \end{cases}$. Resposta: 0,785

271. $f(x,y) = 2x\mathrm{y}; sendo\ D\ delimitado\ por \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$. Resposta: $\frac{1}{6}$

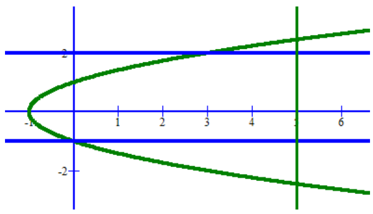
272. Calcular $\iint_R (8 - x - y)dA$, onde R é a região delimitada por $y = x^2$ e $y = 4$.

Resposta: $\frac{896}{15}$

273. Calcular $\iint_R \sqrt{x}\cdot sen(\sqrt{x}\cdot y)dA$, onde R é a região delimitada por $y=0, x=\frac{\pi}{2}$ e $y=\sqrt{x}$. Resposta: $\frac{\pi}{2}-1$

274. Calcular $\iint_R (x^2+y^2)dA$, onde R é a região delimitada por $y=\sqrt{x},\ y=0$ e $x=4$. Resposta: $\frac{4288}{105}$

275. Calcular $\iint_R (2x+y)dA$, onde R é a região delimitada por $x=y^2-1, x=5, y=-1$ e $y=2$, representada ao lado. Resposta: $\frac{1533}{20}$



276. Calcular $\iint_R (x^2+y^2)dA$, onde R é a região delimitada por $y=x, y=\frac{1}{x}$ e $x=2$. Resposta: $\frac{37}{24}$

277. Calcular $\iint_R (x+y)dA$, onde R é a região delimitada por $y=x^2+1, y=-1-x^2, x=-1$ e $x=1$. Resposta: 0

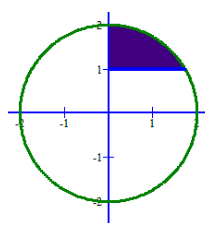
278. Calcular $\iint_R 2ydA$, onde R é a região delimitada por $y=x^2$ e $y=3x-2$. Resposta: $\frac{4}{5}$

279. Calcular $\iint_R xdA$, onde R é a região delimitada pelas retas $y=-x,\ y=4x$ e $y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$. Resposta: 0

280. Calcular $\iint_R (x+y)dA$, onde R é a região delimitada por $y=\frac{1}{x}$, e duas retas que partem da origem e cortam a curva $y=\frac{1}{x}$ para os valores de $x=\frac{1}{2}$ e $x=2$. Resposta: 2

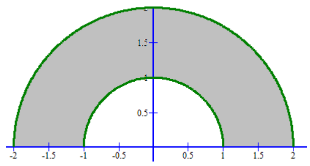
281. Calcular $\iint_R (1+x+y)dA$, onde R é o triângulo de vértices $(1,1), (1,2)$ e $(2,-1)$. Resposta: $\frac{3}{2}$

282. Calcular $\iint_R xdA$, onde R é a região sombreada ao lado.



Resposta: $\frac{5}{6}$

283. Calcular $\iint_R xydA$, onde R é a região delimitada pelas curvas ao lado. Resposta: 0.



Calcule as integrais abaixo nas duas possíveis ordens de integração:

284. $\int_0^1 \int_0^2 dydx$. Resposta: 2

285. $\int_1^2 \int_2^4 dxdy$. Resposta:2

286. $\int_0^1 \int_{2y}^2 dxdy$. Resposta:1

287. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dydx$. Resposta: $\frac{16}{3}$

288. $\int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^1 dydx$. Resposta: 1

289. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 dydx$. Resposta: $\frac{8}{3}$

290. $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dxdy$. Resposta: $\frac{5}{12}$

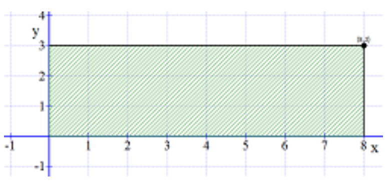
291. $\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} dxdy$. Resposta: $\frac{32}{3}$

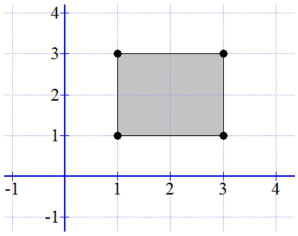
Verifique que nas integrais abaixo é necessário mudar a ordem de integração:

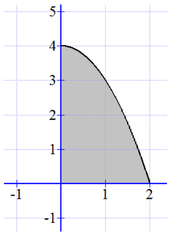
292. $\int_0^3 \int_y^3 e^{x^2} dxdy$. Resposta: $\frac{e^9-1}{12} = 4051$

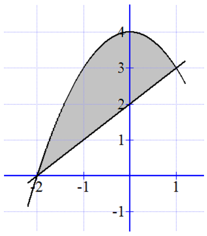
293. $\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2} dydx$. Resposta: $\frac{e^4-1}{2e^4} = 0{,}491$

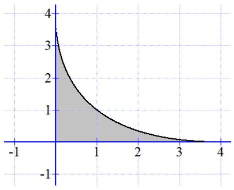
Nos exercícios abaixo, utilize uma integral dupla para calcular a área indicada

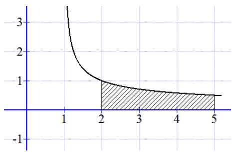
294.  Resposta: 24 ua

295.  Resposta: $4\ ua$

296.  $y = 4 - x^2$ Resposta: $\frac{16}{3} ua$

297.  $y = 4 - x^2\ e\ y = x + 2$. Resposta: $\frac{9}{2} ua$

298.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$. Resposta: $\frac{2}{3} ua$

299.  $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, 2 \leq x \leq 5$. Resposta: $2\ ua$

Usando integrais duplas, calcule a área delimitada pelas curvas abaixo:

300. $y = 9 - x^2, y = 0$. Resposta: $36\ ua$

301. $y = x^{\frac{3}{2}}, y = x$. Resposta: $\frac{1}{10}$

302. $2x - 3y = 0, x + y = 5, y = 0$. Resposta: 5

303. $xy = 9, y = x, y = 0, x = 9$. Resposta: $\frac{9}{2} + 9\ ln\ 3 = 14{,}39$

304. $y = x, y = 2x, x = 2$. Resposta: 2

305. $y = x^2 + 2x + 1, y = 3(x+1)$. Resposta: $\frac{9}{2}$

Utilize um software para calcular as seguintes integrais. (Sugestão: usar o wxMaxima, que é a interface gráfica do sistema algébrico MAXIMA, disponível em http://maxima.sourceforge.net).

306. $\int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2+y^2}}\, dxdy$. Resposta: 0,6588

307. $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 3y^2) dydx$. Resposta: $\frac{1664}{105}$

308. $\int_1^2 \int_0^x e^{xy}\, dydx$. Resposta: 8,1747

309. $\int_1^2 \int_y^{2y} ln\,(x+y)\, dxdy$. Resposta: 2,00

310. $\int_0^1 \int_x^1 \sqrt{1-x^2}\, dydx$. Resposta: 0,452

311. $\int_0^3 \int_0^{x^2} \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x}\, dyd$x. Resposta: 24,308

312. $\int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{4-\frac{x^2}{4}} \frac{xy}{x^2+y^2+1}\, dydx$. Resposta: 1,1190

313. $\int_0^4 \int_0^y \frac{2}{(x+1)(y+1)}\, dxdy$. Resposta: 2,590

Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas e explique por quê:

314. $\int_{-1}^1 \int_{-2}^2 y\, dydx = \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 y\, dxdy$

315. $\int_2^5 \int_1^6 x\, dydx = \int_1^6 \int_2^5 x\, dxdy$

Nos exercícios abaixo, esboce a região de integração e calcule a integral dupla:

316. $\int_0^2 \int_0^1 (3x + 4y)\, dydx$. Resposta: 10 uv

317. $\int_0^3 \int_0^1 (2x + 6y) dydx$. Resposta: 4 uv

318. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} x^2y^2 dxdy$. Resposta: $\frac{1}{54}uv$

319. $\int_0^6 \int_{\frac{y}{2}}^3 (x+y)dxdy$. Resposta: $36\ uv$

320. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydydx$. Resposta: $\frac{1}{3} uv$

321. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \mathrm{x}y^2 dydx$. Resposta: $\frac{32}{3} uv$

322. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$. Resposta: $\frac{\pi a^2}{4}\ ua$

Nos exercícios abaixo, escreva a integral para ambas as ordens de integração e utilize a ordem mais conveniente para calcular a integral sobre a região R:

323. $\iint_R\ xydA$. R: retângulo com vértices em $(0,0), (0,5), (3,5), (3,0)$. Resposta: $\frac{224}{4}$.

324. $\iint_R\ xdA$. R: semicírculo limitado por $y = \sqrt{25-x^2}, y = 0$. Resposta: $\frac{250}{3}$.

325. $\iint_R\ \frac{y}{x^2+y^2} dA$. R: triângulo limitado por $y = x, y = 2x, x = 2$. Resposta:

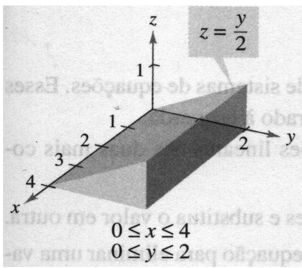
$ln \frac{5}{2} = 0{,}9163$

326. $\iint_R\ \frac{y}{1+x^2} dA$. R: região limitada por $y = 0, y = \sqrt{x}, x = 4$. Resposta: $\frac{1}{4} ln\ 17 =$

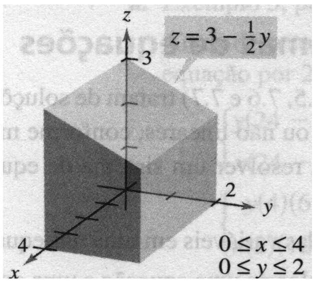
0,708.

3.2 Cálculo de volumes com integrais duplas

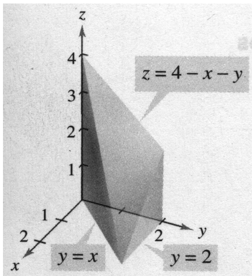
Nos exercícios abaixo, utilize uma integral dupla para determinar o volume do sólido especificado:

327. 

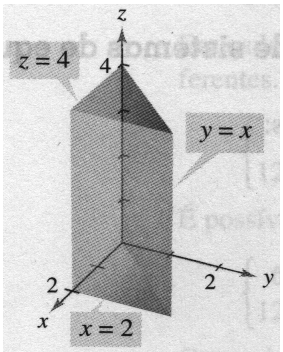
$z = \frac{y}{2}, com\ 0 \le x \le 4\ e\ 0 \le y \le 2$. Resposta: $4\ uv$.

328. 

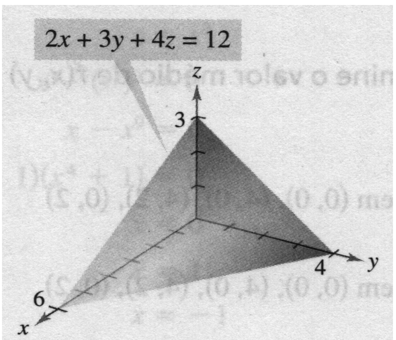
$z = 3 - \frac{1}{2}y,\ 0 \le x \le 4\ e\ 0 \le y \le 2$. Resposta: $20\ uv$.

329. 

$z = 4 - x - y,\ y = x\ e\ y = 2$. Resposta: $4\ uv$.

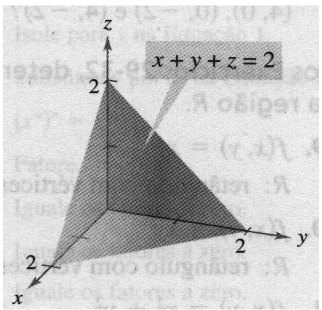
330. 

$z = 4,\ y = x\ e\ x = 2$. Resposta: $8\ uv$.

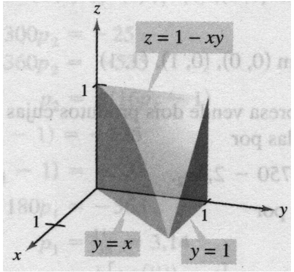
331. 

$2x + 3y + 4z = 12$ e os planos cartesianos.

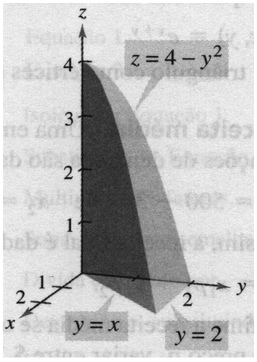
Resposta: $\frac{22}{3}\ uv$.

332. 

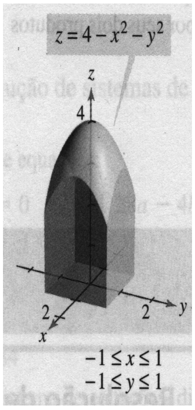
$x + y + z = 2$ e os planos cartesianos. Resposta: $\frac{4}{3}uv$.

333. 

$z = 1 - xy,\ y = x$ e $y = 1$. Resposta: $\frac{3}{8}$ uv.

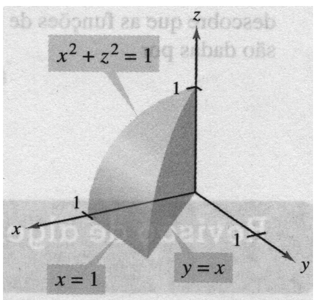
334. 

$z = 4 - y^2, y = x, y = 2$. Resposta: $4\ uv$.

335. 

$z = 4 - x^2 - y^2, com - 1 \leq x \leq 1\ e - 1 \leq y \leq 1$. Resposta:

$\frac{40}{3}$ uv.

336. 

$x^2 + z^2 = 1, x = 1$ e $y = x$. Resposta: $\frac{1}{3}$ uv.

337. $z = xy, z = 0, y = 0, y = 4, x = 0, x = 1$. Resposta: $4\ uv$.

338. $z = x, z = 0, y = x, y = 0, x = 0, x = 4$. Resposta: $\frac{64}{3}$ uv.

339. $z = x^2, z = 0, x = 0, x = 2, y = 0, y = 4$. Resposta: $\frac{32}{3}$ uv.

340. $z = x + y, x^2 + y^2 = 4, primeiro\ octante$. Resposta: $\frac{16}{3}\ uv$.

3.3 Densidade e valor médio com integrais duplas

341. A densidade populacional (em habitantes por km^2) de uma cidade pode ser modelada por $f(x,y) = \frac{120000}{(2+x+y)^2}$, em que x e y são medidos em km. Qual a população no interior da área retangular definida pelos vértices $(0,0), (2,0), (0,2), (2,2)$? Resposta: 10.000 habitantes/km^2.

342. A densidade populacional (em habitantes por km^2) de uma ilha foi modelada pela função $f(x,y) = \frac{5000xe^y}{1+2x^2}$, com x e y medidos em km. Que população pode ser estimada nos limites definidos pelos pontos $(0,0), (4,0), (0,-2), (4,-2)$? Resposta: 3780 habitantes/km^2.

Nos exercícios abaixo, determine o valor médio de $f(x,y)$ na região R.

343. $f(x,y) = x$. R: retângulo com vértices $(0,0), (4,0), (4,2), (0,2)$. Resposta: $\frac{1}{2}$.

344. $f(x,y) = xy$. R: retângulo com vértices $(0,0), (4,0), (4,2), (0,2)$.Resposta: 2.

345. $f(x,y) = x^2 + y^2$. R: quadrado com vértices $(0,0), (2,0), (0,2), (2,2)$. Resposta: $\frac{8}{3}$.

346. $f(x,y) = e^{x+y}$. R: triângulo com vértices $(0,0), (0,1), (1,1)$. Resposta: 0,738.

347. Uma empresa vende dois produtos cujas funções de demanda são dadas por $x_1 = 500 - 3p_1$ e $x_2 = 750 - 2{,}4p_2$, sendo a receita total dada por $R = x_1p_1 + x_2p_2$. Estime a receita média se o preço p_1 variar entre $R\$$ 50,00 e $R\$$ 75,00 e o preço p_2 variar entre $R\$$ 100,00 e $R\$$ 150,00. Resposta: $R\$$ 75.125,00.

348. Após um ano, a empresa do exercício anterior constata que as funções de demanda por seus dois produtos são dadas por $x_1 = 500 - 2{,}5p_1$ e $x_2 = 750 - 3p_2$.

Verifique qual é a nova receita média, nas mesmas condições de preço. Resposta: $R\$$ 67.604,17.

349. O lucro semanal de uma empresa na comercialização de dois produtos é dada por $P = 192x_1 + 576x_2 - x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_1x_2 - 5000$, em que x_1 e x_2 representam os números de unidades de cada produto vendido semanalmente. Estime o lucro médio semanal se x_1 variar entre 40 e 50 unidades e x_2 variar entre 45 e 50 unidades. Resposta $R\$$ 13.400,00.

350. Após uma alteração no mercado, o lucro semanal da empresa do exercício anterior é dado por $P = 200x_1 + 580x_2 - x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_1x_2 - 7500$. Estime o lucro médio semanal se x_1 variar entre 55 e 65 unidades e x_2 variar entre 50 e 60 unidades. Resposta: $R\$$ 11.025,00.

351. A quantidade de veículos produzidos por uma montadora pode ser estimada por $f(x,y) = 100x^{0,6}y^{0,4}$, em que x é o número de unidades de mão-de-obra, e y o número de unidades de capital. Estime o nível de produção médio se o número de unidades de mão-de-obra x variar entre 200 e 250 e o número de unidades de capital y variar entre 300 e 325. Resposta: 25.645,24 veículos.

352. Repita o exercício anterior se a produção for modelada por $f(x,y) = x^{0,25}y^{0,75}$. Resposta: 2891 veículos.

4. Integrais Triplas

353. Determinar o volume do sólido formado por $z = 4 - x^2, y + z = 4, z = 0$ e $y = 0$. Resposta: $\frac{128}{5}$

354. Calcular $\iiint_T y dV$, onde T é delimitado pelo plano $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1$ e pelos eixos cartesianos. Resposta: $\frac{1}{2}$

355. Determinar o volume do sólido formado por $z = 4 - x^2, z = 0,\ \ x = 0,\ \ y = 0$ e $y = 6$. Resposta: 32

356. Determinar o volume do sólido formado por $z = 1 + x^2 + y^2, z = 0, x = -1, x = 1, y = 1$ e $y = -1$. Resposta: $\frac{20}{3}$

357. Determinar o volume do sólido formado por $x + 2z = 6, y = 0, y = 5, z = 0$ e $x = 0$. Resposta: 45

358. Determinar o volume do sólido formado por $x^2 + y^2 = 9, z = 0$ e $z = 5$. Resposta: 45π

359. Determinar $\iiint_T xyz^2 dV$, onde T é paralelepípedo retângulo limitado por $[0,1], [0,2]$ e $[1,3]$. Resposta: $\frac{26}{3}$

360. Determinar $\iiint_T x dV$, onde T é o tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + \frac{y}{2} + z = 4$. Resposta: $\frac{64}{3}$

361. Determinar $\iiint_T (x^2 + y^2) dV$, onde T é o cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, limitado por $0 \leq z \leq 4$. Resposta: 2π

362. Determinar o volume do sólido limitado por $\mathrm{x} = 4 - \mathrm{y}^2, \mathrm{y} = \mathrm{z}, \mathrm{x} = 0$ e $\mathrm{z} = 0$, no primeiro octante. Resposta: 4

363. Determinar $\iiint_\mathrm{T} \mathrm{xydV}$, considerando a região acima do eixo xy e os limites $\mathrm{z} = 4 - \mathrm{x}^2,\ \mathrm{y} = 0$ e $\mathrm{y} = 4$. Resposta: 0

364. Determinar $\iiint_\mathrm{T} \mathrm{xydV}$, considerando como origem do limite o ponto $(0, 0, 0)$ e os extremos $\mathrm{z} = 4 - \mathrm{x}^2$ e $\mathrm{y} + \mathrm{z} = 8$. Resposta: $\frac{272}{3}$

365. Determinar $\iiint_\mathrm{T} 2\mathrm{ysenyzdV}$, onde T é o paralelepípedo formado por $\mathrm{x} = \pi, \mathrm{y} = \frac{\pi}{2}, \mathrm{z} = \frac{\pi}{3}$ e os planos coordenados. Resposta: $\pi^2 - 6\mathrm{sen}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)$

366. Determinar $\iiint_\mathrm{T} \mathrm{zdV}$, onde T é o sólido limitado por $\mathrm{z} = \mathrm{y},\ \mathrm{y} = 2 - \mathrm{x}^2$ e o plano

xy. Resposta: $\frac{128\sqrt{2}}{105}$

367. Calcular $\iiint_T x dV$, onde T é o sólido representado pelos planos xy, $x + y + z = 8$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 25$. Resposta: $-\frac{625\pi}{4}$

5. Integrais de linha

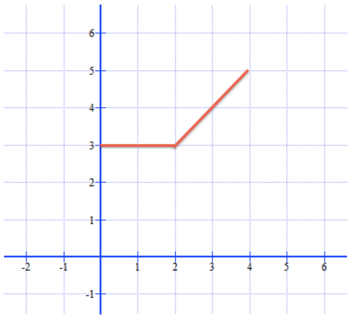
Dada a superfície $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, calcule a integral de linha nos caminhos e intervalos abaixo:

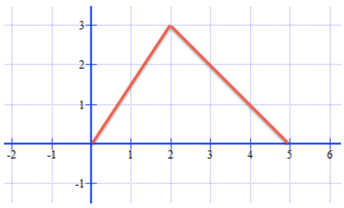
368. $y = x, [1, 3]$. Resposta: $\frac{13\sqrt{2}}{2} = 9{,}192$.

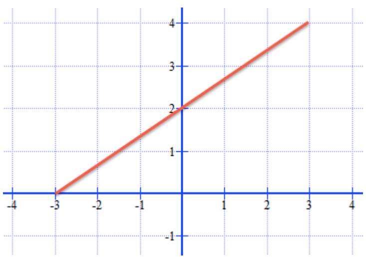
369. $y = 2x, [0, 3]$. Resposta: $\frac{81\sqrt{5}}{4} = 45{,}28$.

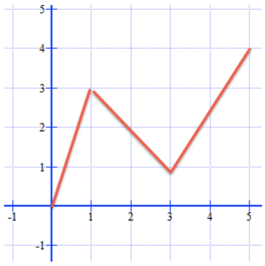
370. $y = \frac{1}{2}x + 1, [1, 2]$. Resposta: $\frac{17\sqrt{5}}{6} = 2{,}376$

Dada a superfície $f(x, y) = xy$, calcule a integral de linha para os caminhos abaixo:

371.  Resposta: 40,884.

372.  Resposta: 21,229

373.  Resposta: 14,42

374. 

Resposta: 51,391

Bibliografia

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo B. 2.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

HUGHES-HALLET, D., et al. Cálculo e aplicações. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

LARSON, R. Cálculo aplicado: curso rápido. 8.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

LARSON, R., et al. Cálculo. 8.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

LEITHOLD, L. O Cálculo com geometria analítica. 2.ed. São Paulo: Harbra, 1986.

SHENK, A. Cálculo e geometria analítica. 2.ed. Rio de Janeiro: Campos, 1988.

SIMÕES, M. A. Fundamentos de cálculo: notas de aula. 2.ed. São Paulo: Terceira Margem, 2009.

STUART, J. Cálculo. 7.ed. São Paulo: Cengage, 2013.

THOMAS, G. B., GIORDADO, W. H. Cálculo. 11.ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.