Cantor e o infinito

(Vincenzo Bongiovanni)

Georg Cantor (1845-1918) foi o matemático que compreendeu, pela primeira vez, que não há apenas um infinito mas muitos infinitos. Ele conseguiu dar ao infinito uma precisão matemática.

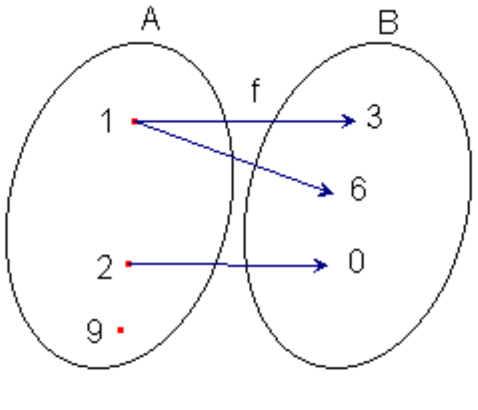
Se apresentarmos a um aluno os conjuntos N e Z, ou seja, o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros e perguntarmos, qual dos dois conjuntos têm maior quantidade de elementos? É muitoprovável que dirão que é o conjunto dos números inteiros. Por quê? Dirão com muita razão que o conjunto dos números inteiros além de conter todos os naturais contém também uma infinidade de inteiro negativos. No entanto, para o matemático Cantor, os dois conjuntos apresentam a mesma "quantidade de elementos". Como isso é possível?
Neste texto trataremos da maior descoberta de Cantor que é da existência de diversos tipos de infinitos. Essa descoberta se deu em 1885. Para chegar a esse resultado precisaremos de alguns conceitos básicos de função.

O que é uma função ?

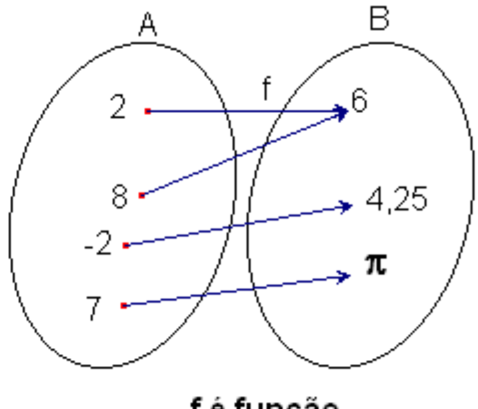
Dados 2 conjuntos A e B. Uma função ***de A em B*** *é um conjunto, denotado por f, de pares ordenados (a,b) com $a \in A$ e $b \in B$ que verifica duas condições :*

i) $\forall a, a \in A, \exists b, b \in B$ tal que $(a,b) \in f$

ii) Se $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f$ então $b=c$



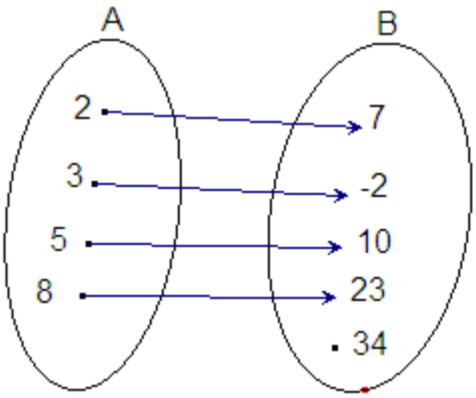
f não é função



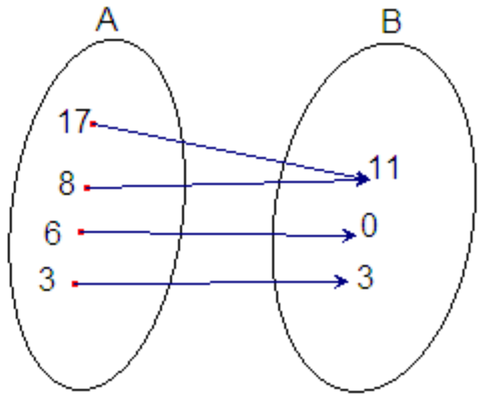
f é função

O que é uma função injetora?

Uma função f de A em B é ***injetora*** *(ou injetiva) quando, para dois elementos distintos quaisquer de A correspondem dois elementos distintos de B.*

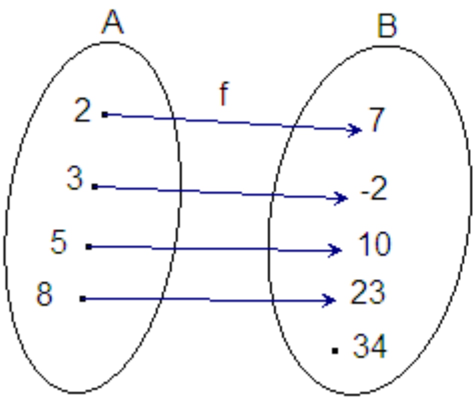


É injetora

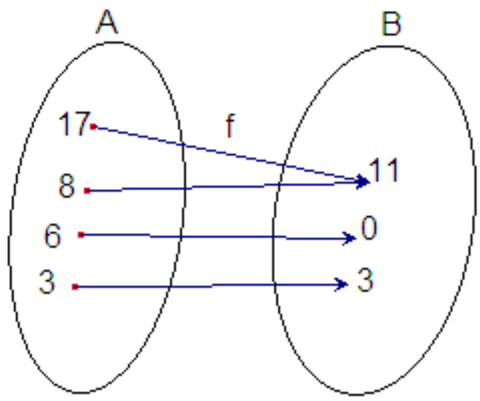


Não é injetora

O que é uma função sobrejetora?
Uma função f de A em B é ***sobrejetora*** *(ou sobrejetiva) quando, para qualquer elemento b de B pode-se encontrar (pelo menos) um elemento a de A tal que (a,b)* $\in f$

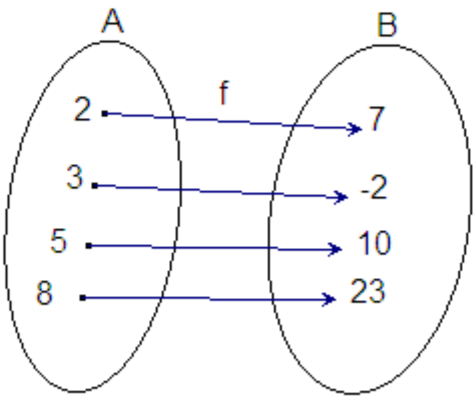


f não é sobrejetora



f é sobrejetora

O que é uma função bijetora?
Uma função f de A em B é ***bijetora*** *se, e somente se, ela for injetora e sobrejetora.*

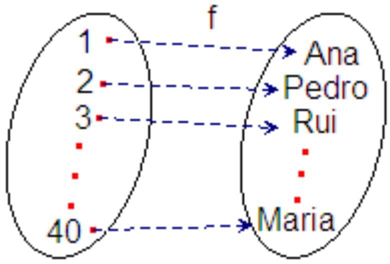


f é bijetora

Observe que a cada elemento de A está associado um único elemento de B e a cada elemento de B está associado um único elemento de A.

O número de elementos de um conjunto finito

Numa classe há quarenta carteiras. O professor entra e observa que não há carteiras vazias. Conclui que o número de alunos é 40 pois há uma correspondência entre o número de carteiras e o número de alunos.
Dois conjuntos, um formado de carteiras e o outro formado de alunos, têm a mesma quantidade de elementos se existir uma função bijetora que associa a cada carteira um único aluno e a cada aluno uma única carteira.



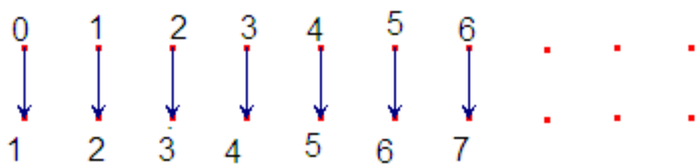
Diremos que um conjunto finito A tem n elementos se existe uma função bijetora de {1, 2, 3,..., n} em A.Essa ideia foi generalizada por Cantor para conjuntos infinitos.

A cardinalidade de um conjunto

Dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade se existir uma função bijetora de A em B. Indica-se Card A = Card B.
Intuitivamente dizer que dois conjuntos têm a mesma cardinalidade significa dizer que eles têm o "mesmo número de elementos" .
Se A={5,3,78,93,45,67} então card A=6.
Se A={5,3,78,93,45} e B= {a,e,i,o,u} então card A= card B

Card N= Card N*

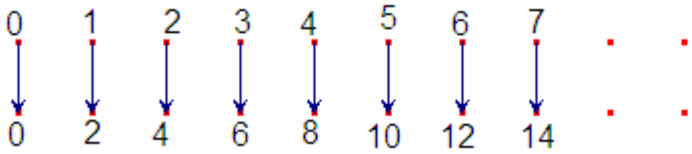
O conjunto dos números naturais N tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números naturais positivos N*. De fato, existe uma função f de N em N* definida por f(x)=x+1 que é bijetora.



Observe que a cada elemento de N há um único correspondente em N* e a cada elemento de N* há um único correspondente em N. Portanto o conjunto dos inteiros naturais N têm a mesma "quantidade de elementos" que o conjunto N*.

Card N= Card P

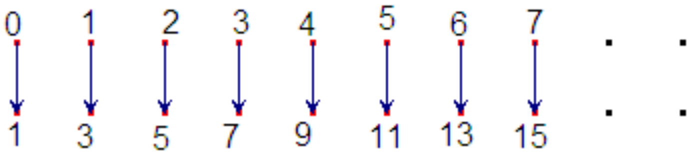
O conjunto dos números naturais N tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números naturais pares P ={0, 2, 4, 6, 8, ...}. De fato, existe uma função f de N em P definida por f(x)= 2x que é bijetora. A cada elemento de N podemos associar um número par e a cada número par podemos associar um número natural.



Portanto os dois conjuntos têm a mesma “quantidade de elementos”

Card N = Card I

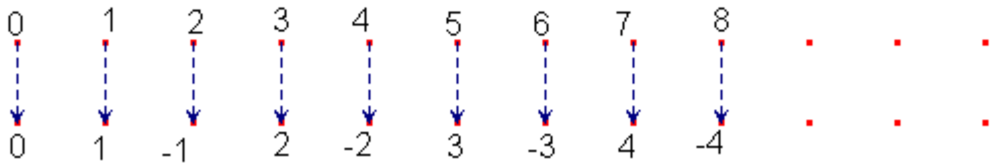
O conjunto dos números naturais N e o conjunto dos números naturais ímpares I={1,3,5,7,...} têm a mesma cardinalidade pois existe uma função f de N em I definida por f(x)=2x+1 que é bijetora



Portanto há tantos números naturais quantos números naturais ímpares.

Card N = Card Z

Os conjuntos N={0,1,2,3,...} e Z={...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...} também têm a mesma cardinalidade pois existe uma função f bijetora de N em Z definida por f(x) = (x+1)/2 se x é ímpar e f(x)= -x/2 se x é par. Para visualizar melhor essa correspondência, vamos rearranjar os elementos de Z da seguinte maneira Z={0,1,-1,2,-2,3,-3,...}.



Observe que a cada número natural corresponde um único número inteiro e a cada número inteiro corresponde um único número natural. É surpreendente ver que o conjunto N tem a mesma “quantidade de elementos” de Z

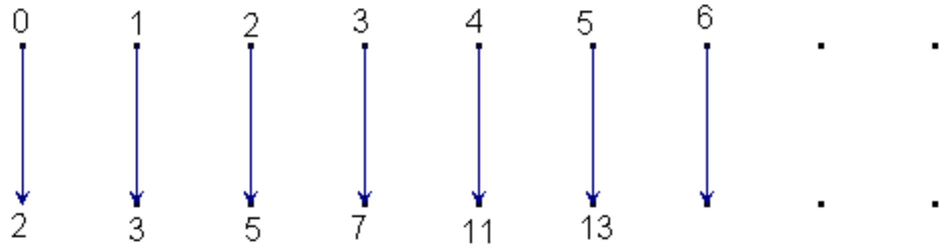
Qual é a cardinalidade do conjunto dos números primos ?

Um número natural é primo se, e somente se, possui dois e somente dois divisores positivos.
Todo número natural é primo ou é produto de números primos.
Euclides provou que o conjunto dos números primos é infinito.Vamos seguir os seus passos.

Vamos supor que o conjunto dos números primos seja finito. Vamos mostrar que essa suposição vai nos levar a uma contradição e então concluiremos que o conjunto dos números primos é infinito.

Seja $\{p_1, p_2, p_3, p_4, ...p_i, p_{i+1}, ..., p_n\}$ o conjunto finito de números primos com $p_i < p_{i+1}$ para todo i. Vamos criar um número A da seguinte maneira $A = p_1.p_2.\ p_3.p_4...p_i....p_n +1$
Portanto A é maior que qualquer dos números primos.
Esse número A existe e será um número primo ou um número composto.
Mas A não pode ser um número primo pois o número de primos é finito e todos eles são menores que A.Concluímos então que A deverá ser composto. Mas A também não pode ser

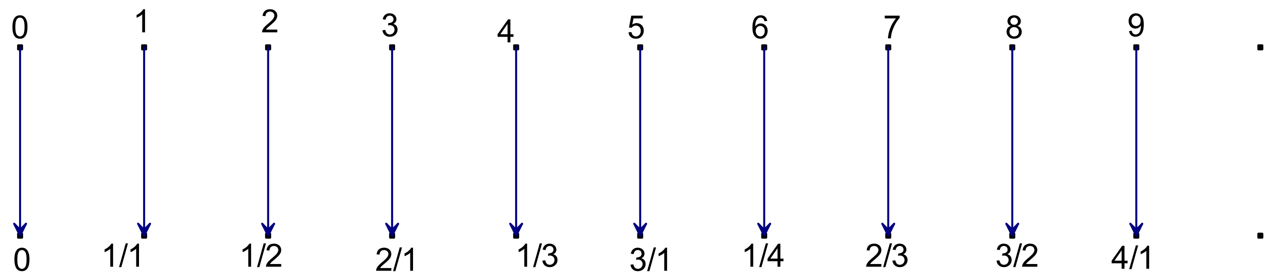
composto. Pois se A for composto, A será um produto de números primos. Seja p_i um desses primos. Logo $A = p_i .b$ onde b é o produto de todos os outros primos. Logo $p_1.p_2. p_3.p_4.......p_i...p_n + 1= p_i . b$. Portanto $p_i . b- p_1.p_2. p_3.p_4.......p_i...p_n =1$. Donde $p_i . (b - p_1.p_2. p_3.p_4.......p_{i-1}.p_{i+1}...p_n) = 1$. Mas se o produto de dois inteiros positivos é igual a 1, cada um deles será igual a 1. Consequentemente $p_i =1$ o que é um absurdo, pois p_i é primo. Logo supor que o conjunto dos primos é finito gera uma contradição. Logo o conjunto dos números primos é infinito.



Seja {2,3,5,7,11,13,...} o conjunto dos primos em ordem crescente. Existe uma função bijetora que associa a todo natural um número primo. Ao número natural 0 associamos o primeiro número primo, ao número natural 1 associamos o segundo primo, ao número natural 2 associamos o terceiro primo,... , ao enésimo número natural associamos o enésimo mais um número primo. Diremos que a cardinalidade do conjunto N é igual á cardinalidade do conjunto dos números primos.

Card N = Card Q_+

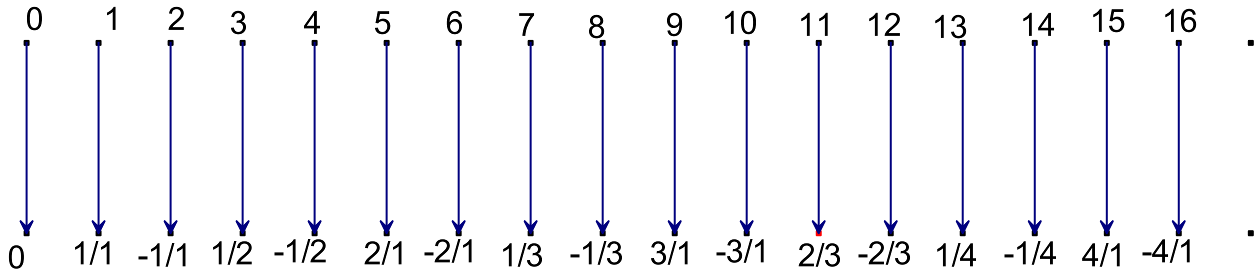
Seja Q_+ o conjunto dos números racionais não negativos. Vamos ordenar as frações irredutíveis de tal forma que a soma de seus numeradores e denominadores seja crescente.
Ao número 1 associamos a fração 1/1, ao número 2 a fração 1/2, ao número 3 a fração 2/1, ao número 4 a fração 1/3, ao número 5 a fração 3/1.Observe que a soma do numerador e do denominador de cada fração é maior ou igual à soma do numerador e denominador da fração anterior..
Dessa forma conseguimos associar a cada número natural um número racional e a cada número racional um número natural.



Dizemos que os conjuntos N e Q_+ têm o mesmo número de elementos.

Card N = Card Q

O primeiro problema fundamental que Cantor pesquisou e conseguiu resolver foi que N e Q têm a mesma cardinalidade, embora o nosso bom senso diga que há "muito mais" números racionais do que naturais.

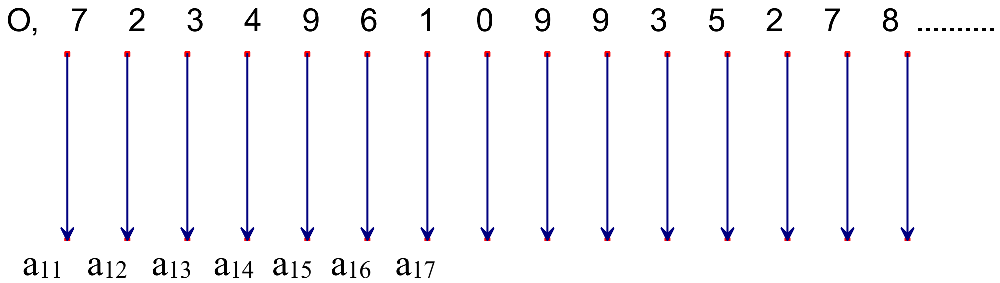


Observe que esta aplicação consegue fazer uma lista com todos os elementos de Q.

A seguir, Cantor mostrou que os conjuntos infinitos não são todos iguais. Ao procurar um conjunto infinito que não tivesse a cardinalidade de N descobriu um resultado surpreendente. Não existe uma aplicação bijetora de N em]0,1[. Para mostrar esse resultado precisamos usar a representação decimal de números reais. Vejamos como.

Representação decimal de números reais

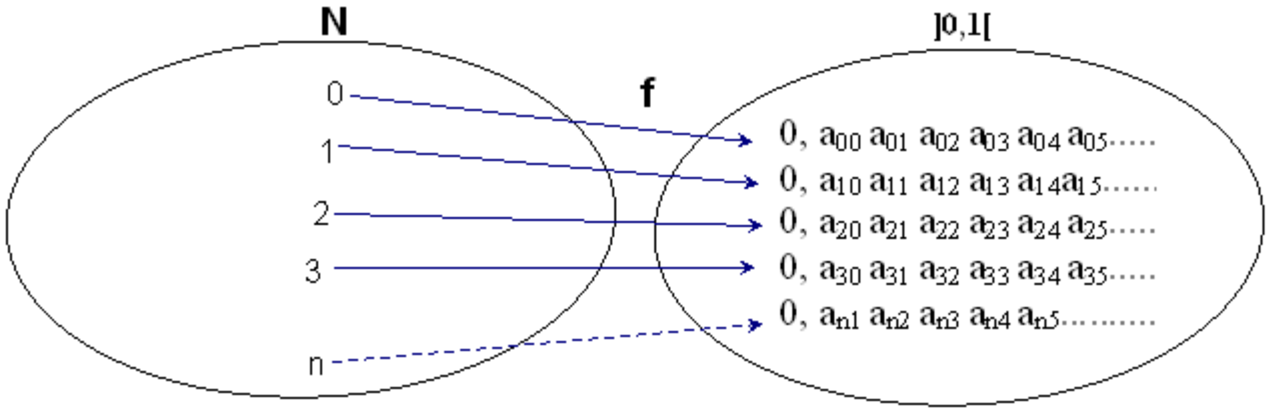
Os números reais podem ser representados por expressões decimais. Vamos nos restringir ao intervalo]0,1[. Uma decimal é uma sucessão, cujos elementos são os algarismos 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9. Uma decimal entre 0 e 1 será representada por 0, $a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}$ ....



O número real 0,7234 será representado por 0, $a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}$ onde $a_{11}=7$, $a_{12}=2$, $a_{13}=3$ e $a_{14}=4$
Seja D o conjunto de todas as representações decimais de números reais compreendidos entre 0 e 1. Os números com dupla representação, por exemplo, 0, 5000000... e 0, 499999.... serão representados apenas pela representação com infinitos zeros. Isto só acontece com as decimais exatas. Por exemplo, 0,2 = 0,200000... = 0,1999999.... será representado por 0,200000

Card N ≠ Card]0,1[

Vamos provar que a cardinalidade de N é diferente da cardinalidade de]0,1[
Vamos supor que card N= card]0,1[.
Devemos provar que existe uma função bijetora de N em]0,1[.
Seja f uma função que associa a cada natural um real entre 0 e 1 na sua representação decimal.
f(0)= 0, $a_{00}\, a_{01}\, a_{02}\, a_{03}\, a_{04}\, a_{05}$..........
f(1)= 0, $a_{10}\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}a_{15}$..........
f(2)= 0, $a_{20}\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24}\, a_{25}$..........
f(3)= 0, $a_{30}\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34}\, a_{35}$..........
f(n)= 0, $a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3}\, a_{n4}\, a_{n5}$.......... e assim sucessivamente



Vamos construir um número real $b = 0, b_0 b_1 b_2 b_3$....... onde b_0 é diferente de a_{00}, b_1 é diferente de a_{11} , b_2 é diferente de a_{22}, b_3 é diferente de a_{33}, b_4 é diferente de a_{44} , etc... Esse número não está associado a nenhum elemento de N. De fato, b é diferente de f(0) pois a primeira casa decimal de b é diferente da primeira casa de f(0) , b é diferente de f(1) pois a segunda casa decimal de b é diferente da segunda casa de f(1), b é diferente de f(2) pois a terceira casa decimal de b é diferente da terceira casa de f(2), ...,b é diferente de f(n) pois a (n+1)ésima casa de b é diferente da (n+1)ésima casa de f(n)
Logo o número b existe, pertence a D mas não há nenhum natural associado a ele.
Portanto f de N em]0,1[é injetora mas não é sobrejetora e portanto não há uma bijeção entre N e D.
Dados dois conjuntos A e B, dizemos que card A< card B quando existir uma função injetora f de A em B mas não existir uma função sobrejetora f de A em B.
Conclusão: card N < card]0,1[, ou seja, o infinito de N, Z e Q é menor que o infinito do intervalo]0,1[.

Conjuntos enumeráveis

Um conjunto A é enumerável se é finito ou se for possível definir uma função bijetora f de N em A. Assim, os conjuntos N, Z e Q são enumeráveis bem como os conjuntos dos naturais pares, dos naturais ímpares e dos naturais primos. Podemos concluir que um conjunto é enumerável se tem a mesma cardinalidade do conjunto N.

Cardinalidade de R

O conjunto]0,1[é não enumerável.
Pode-se provar que " se um conjunto A é enumerável então todo subconjunto de A é enumerável". Uma proposição equivalente a "se p então q" é " se não q então não p". A proposição equivalente a " se um conjunto A é enumerável então todo subconjunto de A é enumerável" é "se existe um subconjunto de A que não é enumerável então A não é enumerável". Com o subconjunto]0,1[de R não é enumerável então R não é enumerável.
Podemos então escrever que card N <card R.
Cantor indicou a cardinalidade de N com a letra hebraica aleph zero ($\aleph_0$). Como os conjuntos P, I, N, Z, Q têm a mesma cardinalidade de N serão também indicados por $\aleph_0$
Indica-se a cardinalidade do conjunto R pelo símbolo C (lê-se potência do contínuo) ou pelo símbolo $\aleph_1$ que se lê Aleph 1. Este foi o seu primeiro trabalho de impacto publicado em 1874. Com essa descoberta, Cantor estabeleceu um fato muito surpreendente, qual seja, o de que existem pelo menos dois tipos diferentes de infinito: o do conjunto dos números naturais e o do conjunto dos números reais.

Cardinalidade dos irracionais

Vamos indicar por I o conjunto dos irracionais. Portanto I= R - Q. Observe que R= Q ∪ I.
Vamos mostrar que o conjunto I não é enumerável. Para isso vamos utilizar o seguinte resultado

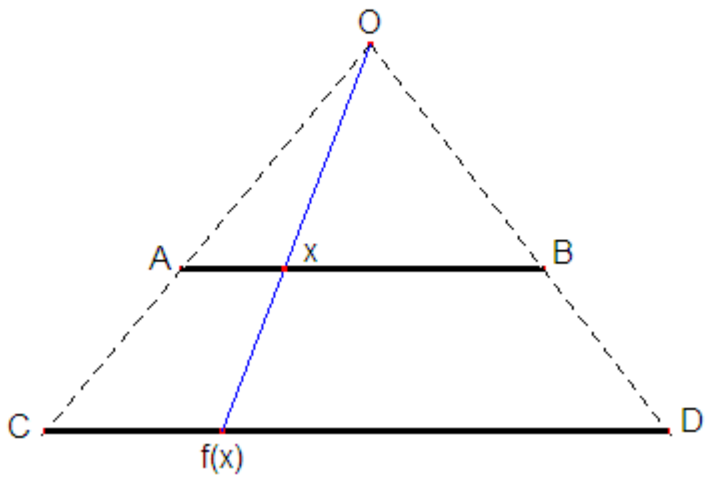
A reunião de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

De fato, sejam $A=\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ e $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, ...\}$ dois conjuntos enumeráveis. Existe uma função bijetora f de N em A tal que $f(0)= a_0$, $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, ... e existe uma função bijetora g de N em B tal que $g(0)= b_0$, $g(1)=b_1$, $g(2)=b_2$, ... Vamos ordenar o conjunto $A \cup B$ de modo que $A \cup B$ seja igual a $\{ a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ...\}$. Existe uma função h de N em $A \cup B$ que associa a cada elemento de N um único elemento de $A \cup B$. Para isso basta fazer: $h(0)=a_0$, $h(1)=b_0$. $h(2)=a_1$, $h(3)=b_1$, $h(4)=a_2$, $h(5)=b_2$, …

Sabemos que Q é numerável e R não é numerável e $R=Q\cup I$.

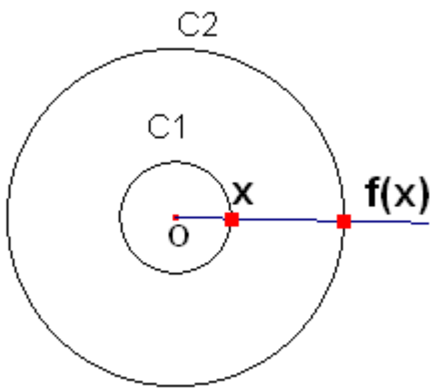
Se o conjunto I fosse enumerável, como Q é enumerável então R seria enumerável o que é um absurdo. Logo I é não enumerável.

Dois segmentos têm a mesma cardinalidade.



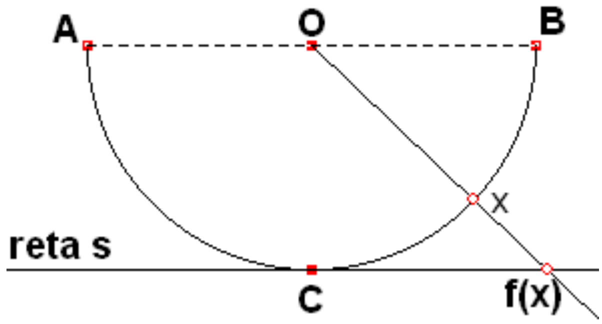
Geometricamente podemos perceber que dois segmentos de medidas diferentes AB e CD têm a mesma cardinalidade. A construção acima mostra que a todo ponto x do segmento AB podemos associar um único ponto f(x) do segmento CD e todo ponto de CD é atingido por esse processo.

Duas circunferências têm a mesma cardinalidade



Sejam duas circunferências C1 e C2 de mesma origem O. Vamos mostrar que elas têm a mesma cardinalidade, ou seja, os mesmos números de pontos. Considere uma semirreta de origem O que intersecta as duas circunferências em dois pontos x e f(x). Observe que ao rotacionar a semirreta em torno de O, a todo ponto x da circunferência C_1 corresponderá um ponto f(x) da circunferência C_2 e a todo ponto da circunferência C_2 corresponde um único ponto da circunferência C_1. Dessa forma estará estabelecida uma bijeção de C_1 em C_2.

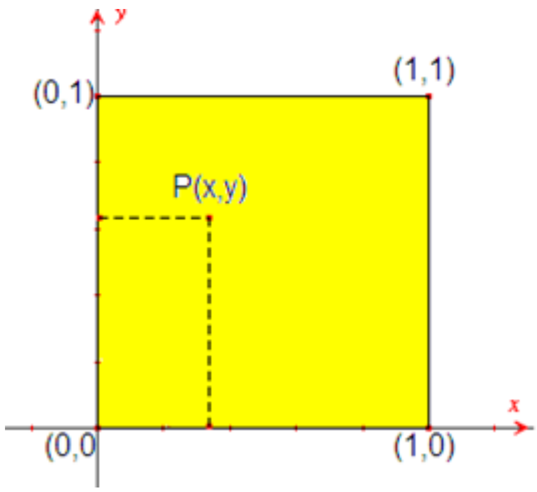
Semicircunferência e reta de mesma cardinalidade



Considere uma semicircunferência de centro O e diâmetro AB tangente a uma reta s no ponto C de modo que o diâmetro AB seja paralelo à reta s. Chamaremos a semicircunferência sem os pontos A e B de semicircunferência aberta e a indicaremos por E. Consideramos a aplicação de E em s que associa a cada ponto x da semicircunferência aberta o ponto f(x) da reta s, sendo f(x) a intersecção da semirreta Ox com a reta s. Aos pontos mais afastados do ponto C, na reta s, correspondem os pontos mais próximos de A e de B. Esta aplicação é bijetora.
Conclui-se que a semicircunferência aberta tem a mesma cardinalidade da reta s, ou seja, há tantos pontos na semicircunferência aberta do que na reta s.

Card R = Card R²

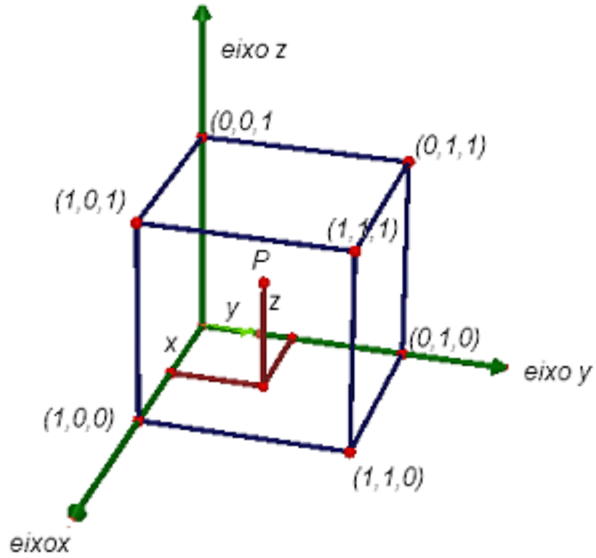
Os pontos do interior de um quadrado são tantos quanto os pontos do seu lado
Cantor mostrou que existe uma função bijetora que associa a cada ponto do interior do quadrado um número real



Sejam **$x=0,a_1a_3a_5a_7a_9$..** e **$y=0,a_2a_4a_6a_8$...**dois números reais escritos nas suas representações decimais. Ao ponto P(x,y) associamos o número real **$0,a_1a_2a_3a_4a_5a_6$.....**
Por exemplo: seja P(x,y) tal que x=0, 3679233411.... e y= 0,0874553871...
A esse ponto associamos o número real 0, 30687794253533481711
Existe portanto uma bijeção entre os pontos P(x,y) e os números reais do intervalo]0,1[
Considerando quadrados de lados cada vez maiores chega-se à conclusão que card R= card R²

Card R= Card R³

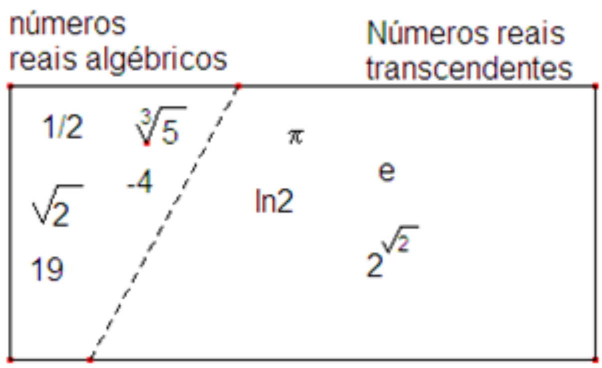
Cantor mostrou que existe uma função bijetora que associa a cada ponto do cubo um número real



Sejam x=0, $a_1a_4a_7a_{10}$..., y=0,$a_2a_5a_8a_{11}$...., z=$a_3a_6a_9a_{12}$.... três números escritos nas suas representações decimais. A cada ponto P(x,y,z) associamos o número real 0,$a_1a_2a_3a_4a_5$...
Existe portanto uma bijeção entre os pontos P(x,y,z) e os números reais do intervalo]0,1[
Considerando cubos com lados cada vez maiores chega-se à conclusão que card R= card R³
Depois de provar que existem tantos pontos na reta quanto no plano e no espaço, cantor, em 1877, escreveu a Dedekind: " Eu vejo isto, mas não acredito".

Cardinalidade dos números algébricos e transcendentes.

Um número real a recebe o nome de número algébrico se existe um polinômio não identicamente nulo, f(x)= $a_0+a_1x+a_2.x^2+a_2x^3+....+a_nx^n$, com coeficientes inteiros, tal que a é raiz desse polinômio. Por exemplo $\sqrt{2}$ é algébrico pois é raiz do polinômio $x^2-2=0$.
Um número real é chamado de transcendente se ele não é algébrico.
Prova-se que o conjunto dos números algébricos é enumerável.



Conjunto dos algébricos ∪ conjunto dos transcendentes = R.
Como R é não enumerável e o conjunto dos algébricos é enumerável conclui-se que o conjunto dos transcendentes é não enumerável pois se fosse enumerável, a reunião seria um conjunto enumerável o que é um absurdo.

Hipótese do contínuo

Uma questão bastante intrigante da teoria dos conjuntos formulada por Cantor em 1883 é se existia algum subconjunto de R com cardinalidade entre Aleph zero e Aleph um, ou seja, se existia um infinito maior que o infinito dos números naturais e menor que o infinito dos números reais. A hipótese do contínuo dizia que não havia um infinito entre esses dois infinitos. Godel quase chegou a resolver essa questão mas não conseguiu demonstrar. Foi somente em 1963 que Cohen fez uma descoberta extraordinária. Ele construiu dois mundos matemáticos em que em a hipótese do contínuo podia ser considerada verdadeira e no outro essa mesma hipótese podia ser considerada falsa, ou seja, mostrou que se trata de um problema indecidível,

O teorema de Cantor

A descoberta mais notável de Cantor foi provar em 1885 que se pode encontrar sempre um conjunto infinito " maior" do que qualquer outro conjunto infinito dado. Esse resultado passou a ser conhecido como teorema de Cantor. O teorema de Cantor afirma que card A < card P(A) onde P(A) é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Exemplo: se A={1,2,3}, o conjunto p(A)= { {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3},∅}.

Prova-se que se A tem n elementos então P(A) terá 2^n elementos.

Aplicando o teorema de Cantor uma infinidade de vezes teremos uma infinidade de infinitos pois card R< card P(R)<Card P(P(R))< card P(P(P(R)))< ...

Com Cantor a teoria dos conjuntos tornou-se um alicerce indispensável para fundamentar a matemática a ponto do grande matemático David Hilbert (1862-1943) dizer:

" Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós".

Hilbert considerava a teoria dos conjuntos criada por Cantor como o produto mais extraordinário do pensamento matemático e uma das mais belas realizações da atividade humana no domínio do puramente inteligível.

BOYER, C. *História da Matemática*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Editora Edgard Blücher, 1996.
EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.
Halmos, Paul Teoria ingênua dos conjuntos
Bouvier , Alain A teoria dos conjuntos
Ávila, Geraldo RPM número 4
Farah, Edison, Teoria dos conjuntos (apostila PUC-SP)