Revisitando o conjunto dos números complexos

(Vincenzo Bongiovanni)

Quando a ciência europeia discutia ainda a possível validade do emprego de números negativos ou irracionais, surgem no mundo matemático os números complexos no contexto da resolução de equações do terceiro grau.

Por volta de 1500, o pensamento corrente entre os matemáticos era de que não existe a raiz quadrada de números negativos. Os matemáticos não tinham coragem de escrever $\sqrt{-1}$ como uma solução para a equação $x^2 +1 = 0$. Cardano em 1545 foi o primeiro que ousou escrever a raiz quadrada de um número negativo. Mas concluiu que esses símbolos eram inúteis. Mais tarde verificou-se que ele estava enganado. Cardano publicou uma fórmula para resolver a equação do terceiro grau $x^3+ax+b=0$.

$$x=\sqrt[3]{\frac{-b}{2}+\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{-b}{2}-\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^3}{4}}}$$

O matemático Bombelli, ao resolver a equação $x^3 = 15x+4$, usando a fórmula de Cardano, obteve $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$

Bombelli, observou que 4 era uma das raízes pois $4^3=15.4+4$.

De posse dessa informação tentou achar regras para o uso de raízes quadradas de números negativos. E se perguntou, como fazer para que de algo que não existe $\sqrt{-121}$ seja possível obter o resultado 4 no desenvolvimento desta expressão $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$? Ele começou a operar com as regras básicas dos números inteiros escrevendo, por exemplo, que $\sqrt{-121} = \sqrt{(-1).11^2} = =11\sqrt{-1}$ e desse modo obteve os seguintes resultados :

$(2+\sqrt{-1}.)^3 = 8+12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2+11\sqrt{-1} = 2+\sqrt{-121}$ e

$(2-\sqrt{-1})^3 = 8- 12.\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = 2 - 11.\sqrt{-1} = 2-\sqrt{-121}$

Portanto $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3}=$

$= 2+\sqrt{-1} + 2- \sqrt{-1} = 4$. Dessa forma, aceitando-se essas regras podia-se chegar à raiz 4.

O próprio Bombelli considerava impossível a existência de $\sqrt{-121}$ mas teve que admitir que trabalhar com as raízes quadradas de números negativos poderia ser útil pois pelo menos permitia resolver equações. Assim, Bombelli , animado por esse resultado, passou a desenvolver regras para operações com estes novos símbolos chamados de “números fictícios” e “números imaginários”.

Raízes quadradas de números negativos continuavam aparecendo nos século XVII, XVIII e XIX na resolução de equações do terceiro grau mas o que intrigava os matemáticos é que essas raízes quando manipuladas segundo as regras usuais da álgebra forneciam resultados corretos que não podiam ser obtidos de outra forma.

Em 1629, Albert Girard escrevia todas as raízes quadradas de números negativos na forma $a + b . \sqrt{-1}$. Por exemplo, $\sqrt{-64} = 8.\sqrt{-1}$ e $3+4.\sqrt{-49} = 3+ 4.\ 7\sqrt{-1}.= 3+28\sqrt{-1}$

Nos séculos XVII e XVIII, operava-se com esses símbolos sem saber o que significavam.

Por exemplo, $(2+\sqrt{-1}\ )+(\ 7+\sqrt{-1}) =\ 9+2.\sqrt{-1}$, $(\sqrt{-1}\ )^2 = -1$, e
$2+\sqrt{-4} +\ 6- \sqrt{-16} = 2+2\sqrt{-1}\ + 6-4\sqrt{-1}\ = 8- 2\sqrt{-1}$-

Em 1777, o matemático Euler substituiu o símbolo $\sqrt{-1}$ pela letra i no seu livro publicado em 1794. Assim $2+3\sqrt{-1}$ passou a ser escrito como 2+3i.

Em 1799 Wessel encontrou uma interpretação geométrica para o complexo $a + b\sqrt{-1}$ representado por ele por um vetor do plano. Num sistema de coordenadas de origem O, esse vetor tem a sua origem em O e a sua extremidade no ponto de abscissa a e ordenada b.

Em 1806, Argand publicou um livro onde dá interpretações geométricas para números da forma a+bi bem como para operações com complexos.

Gauss em 1832 foi o primeiro a chamá-los de números complexos. Publicou uma interpretação geométrica dos números complexos onde os representava por pontos de um plano. Em vez de $a + b.\sqrt{-1}$ ou de a + b. i usou a notação (a,b) e tornou essa interpretação dos números complexos amplamente aceita.

Dessa forma graças ás interpretações de Wessel, Argand e Gauss, foi sendo construída a ponte entre o campo algébrico e o campo geométrico. Em 1833, o matemático Hamilton apresentou um trabalho onde apresenta os números complexos como pares ordenados de números reais e opera com os pares (a , b) da mesma forma que se operava na forma $a + b\sqrt{-1}$ ou na forma a + bi

	Forma $a + b\sqrt{-1}$	Forma a+bi	Forma (a,b)
Adição	$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=$ $=(a+c) + (b+d).\sqrt{-1}$	(a+bi) + (c+di)= =(a+c) + (b+d).i	(a,b) + (c,d)= =(a+c, b+d)
Multiplicação	$(a+b\sqrt{-1}).(c+d\sqrt{-1})=$ $= ac-bd+ (ad+bc).\sqrt{-1}$	(a+bi).(c+di)= = ac-bd+ (ad+bc).i	(a,b) .(c,d)= = (a.c –bd, ad+bc)

.A partir da construção dos números reais por Dedekind, o conjunto dos números complexos indicado com a letra C foi definido como o conjunto constituído de todos os pares ordenados (a,b) com a pertencente a R e b pertencente a R. Em símbolos: $C=\{(a,b) \ /\ a \in R \text{ e } b \in R\}$.

As manipulações com os símbolos $a + b\sqrt{-1}$ sugerem como adicionar e multiplicar os elementos do conjunto C

A igualdade entre dois números complexos (a,b) e (c,d) é definida como : (a,b)= (c,d) se, e somente se, a=c e b=d

A adição dos números complexos (a,b) e (c,d) é definida como: (a,b) + (c,d)= (a+c, b+d)

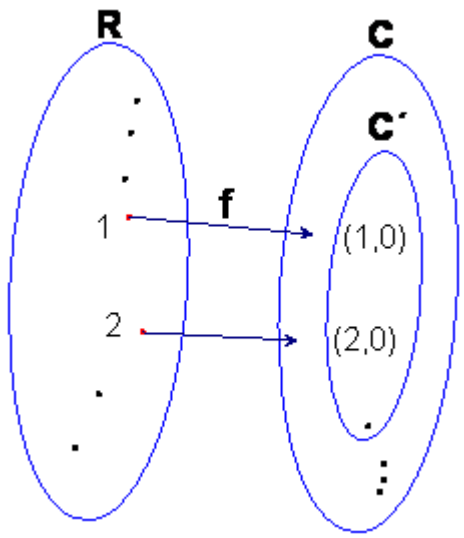
Assim, (2,3)+ (5,6)= (2+5, 3+6)= (7,9)

A multiplicação dos números complexo (a,b) e (c,d) é definida como: (a,b). (c,d)= (a.c-b.d , a.d+b.c)

Assim, (2,3). (6,8)= (2.6-3.8, 2.8+3.6)={ -12, 34)

Por quê escrevemos que R $\subset \boldsymbol{C}$

È possível mostrar que a aplicação f de R em C´ onde C´={(x,0)/ x $\in$R} e definida por f(x)=(x,0) é um isomorfismo de R em C´, isto é, f é bijetora e f(x)+f(y)= f(x+y) e f(x). f(y)= f(x.y) para quaisquer x e y pertencentes ao conjunto R.



Prova

f é injetora pois para todo x e y em R temos que : x≠y implica que (x,0) ≠ (y,0)

f é sobrejetora pois para qualquer (x,0) em C´, existe o correspondente x em R tal que f(x)=(x,0)

Logo f é bijetora.

f(x) + f(y)= (x,0)+(y,0)= (x+y,0)= f(x+y) e f(x).f(y)=(x,0). (y,0)=(x.y—0.0, x.0+y.0)= (x.y,0)=f(x.y)

O fato de existir um isomorfismo entre Re C´ permite escrever que C´=R e como C´$\subset \boldsymbol{C}$ então podemos dizer que R $\subset$ C . Os elementos de R poderão ser identificados com os elementos de C´ e escrever 1= (1,0), 2=(2,0), ..e x=(x,0). Observe que o complexo (1,0) é um par ordenado de números reais e, portanto, não é o número real 1. Mas por abuso de linguagem diremos que o número real 1 é igual ao número complexo (1,0) e escrevemos que 1$\in$C. Essa apresentação final dos números complexos é fruto de uma manipulação de símbolos que durou três séculos..

Na matemática “fazemos de conta” que N $\subset Z \subset Q \subset R \subset C$ embora uma análise mais profunda nos mostra que isto é verdade só num certo sentido. Conforme palavras do matemático Kronecker: “Deus fez os números naturais. O resto é obra dos homens”.

Por quê escrevemos (a,b)= a+bi ?

Identificando o complexo (0,1) pelo símbolo i e os complexos da forma (a,0) por a vamos mostrar que essa igualdade é uma consequência do isomorfismo.

Inicialmente observe utilizando a definição de multiplicação de números complexos que (b,0). (0,1) = (b.0–0.1, b.1+0.0) =(0,b)

Observe também utilizando a definição de adição de números complexos que
(a , b) = (a,0) + (0,b)
Substituindo (0,b) por (b,0). (0,1) teremos (a , b) = (a,0) + (b,0).(0,1). Mas devido ao isomorfismo, (a,0) =a , (b,0)=b e por convenção (0,1)= i. Logo (a,b) = a+b.i . Portanto estamos autorizados a substituir o par (a,b) pela sua forma algébrica a+b.i

Por quê escrevemos que $i^2 = -1$?

Por convenção identifica-se o par ordenado (0,1) pelo letra i.
i^2 = (0,1). (0,1). Utilizando a definição de multiplicação de números complexos teremos i^2=(0.1 – 1.1, 0.1 +1.0) = (–1,0). Devido ao isomorfismo temos que (–1,0) = –1.
Portanto $i^2 = -1$
Dessa forma $i^3 = i^2.i = (-1).i = -i$ e $i^4= i^2 . i^2 = (-1). (-1) =1$

No ensino médio, a abordagem dos números complexos e de suas operações pode ser feita ou a partir do relato de alguns episódios da história ou como uma necessidade de ampliar o conjunto dos números reais. Em geral, na apresentação do conjunto C, em sala de aula, silencia-se sobre a origem do símbolo a + b.i e sobre o fato de porquê i^2 ser igual a -1. Define-se o número complexo como um objeto da forma a+bi onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Apresenta-se o conjunto dos números complexos incorporando essas duas informações C={a + b. i / a∈R, b∈R e $i^2 = -1$}.

C é um corpo ?

Para resolver uma equação do segundo grau em C necessita-se das propriedades dos números complexos. Utilizando as definições de adição e multiplicação pode-se demonstrar que as 9 propriedades abaixo são válidas. Costuma-se indicar um complexo do tipo a+bi pela letra z.

1) Para todo z_1, z_2 e z_3 em C temos: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
2) Para todo z_1 e z em C temos: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
3) Existe 0∈C tal que z + 0 =z para todo z em C
4) Para todo z∈C existe –z em C tal que z + (-z) = 0
5) Para todo z_1, z_2 e z_3 em C temos: $(z_1 .z_2) . z_3 = z_1 . (z_2 . z_3)$
6) Para todo z_1 e z_2 em C temos: $z_1 . z_2 = z_2 . z_1$
7) Existe 1 ∈C, 1≠ 0 tal que z.1 =z
8) Para todo z∈C, z ≠ 0 existe z^{-1}∈C tal que: $z . z^{-1}= 1$
9) Para todo z_1, z e z_3 em C temos: $z_1 . (z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3$

Dizemos que o conjunto C munido das operações de adição e de multiplicação é um corpo.

Como consequência de C ser um corpo, permanecem válidas todas as propriedades básicas da álgebra tais como: se a=b e c$\neq 0$ então $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, se a=b então a+c = b+c, se a=b então a-c = b-c, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, etc...

A fórmula $\frac{-\boldsymbol{b}\pm\sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}}$ é válida em C ?

vamos resolver a equação $a.z^2 + bz + c = 0$, com a,b e c reais e a$\neq$ 0 e $\Delta < 0$

Se $a.z^2 + bz + c = 0$ então podemos dividir ambos os membros da igualdade por a pois que a ≠ 0. Teremos então $z^2 + \frac{b}{a}.z + \frac{c}{a} = 0$

Podemos subtrair de ambos os membros da igualdade o termo $\frac{c}{a}$

$$z^2 + \frac{b}{a}.z = 0 - \frac{c}{a}$$

Podemos acrescentar a ambos membros da igualdade o termo $\frac{b^2}{4a^2}$

$$z^2 + \frac{b}{a}.z + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Podemos substituir o trinômio $z^2 + \frac{b}{a}.z + \frac{b^2}{4a^2}$ por $(z + \frac{b}{2a})^2$ então podemos

$(z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{-4ac+b^2}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$. Como $\Delta < 0$ então podemos substituir Δ por $i^2.(-\Delta)$

Logo, $z + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{i^2.(-\Delta)}}{2a}$ Donde $z = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{i^2.(-\Delta)}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} =$

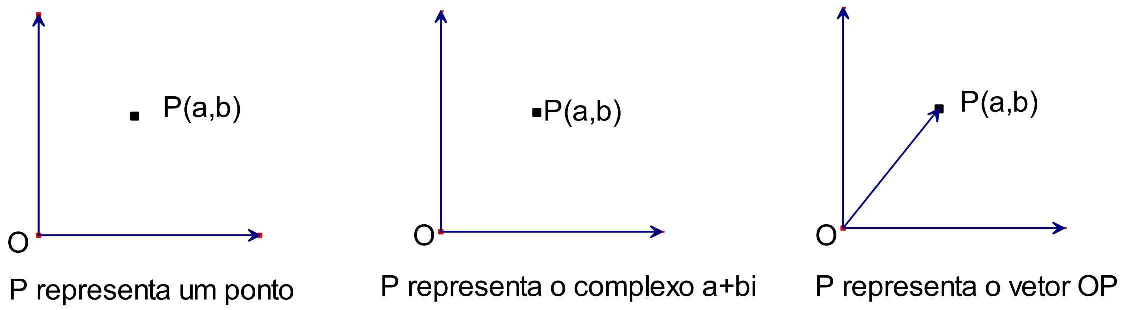
$$= \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Na resolução da equação $x^2 + 2x+5=0$ com $\Delta < 0$ teremos:

$Z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = = \frac{-2 \pm i\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\pm 4i}{2}$. Donde se conclui que
z = -1 +2i ou z= -1 – 2i

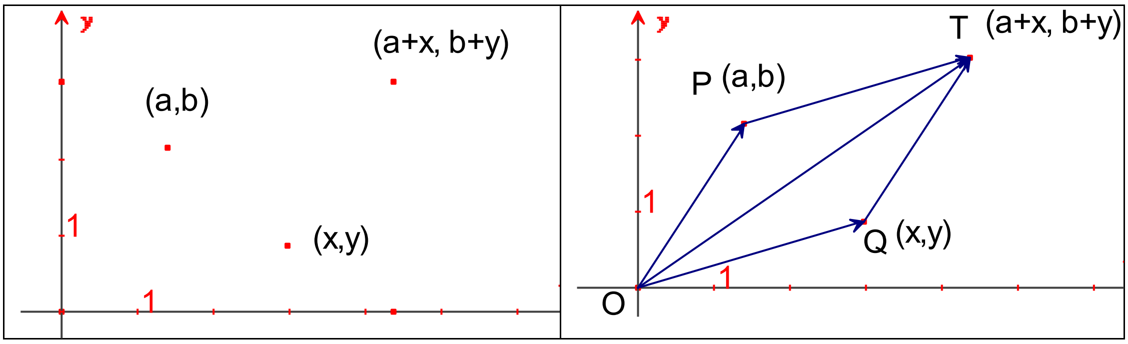
Interpretação geométrico de um número complexo

Um número complexo a+bi pode ser visto com um ponto em um plano cartesiano onde a abscissa é a e a ordenada é b. Dado um ponto P(a,b) associado ao complexo z=a+bi, podemos representar z por um vetor de origem O e extremidade P onde O é a origem do sistema de coordenadas. Existe uma correspondência entre cada ponto P do plano e o vetor definido por OP. Dessa forma usamos indiferentemente o par (a,b) para identificar **um ponto** do plano cartesiano ou **um número complexo** ou **um vetor.**

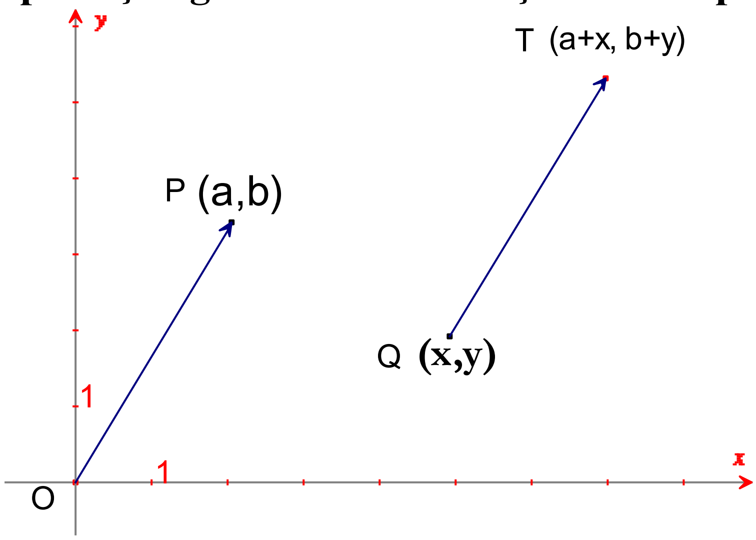


Interpretação geométrico de um complexo e um vetor

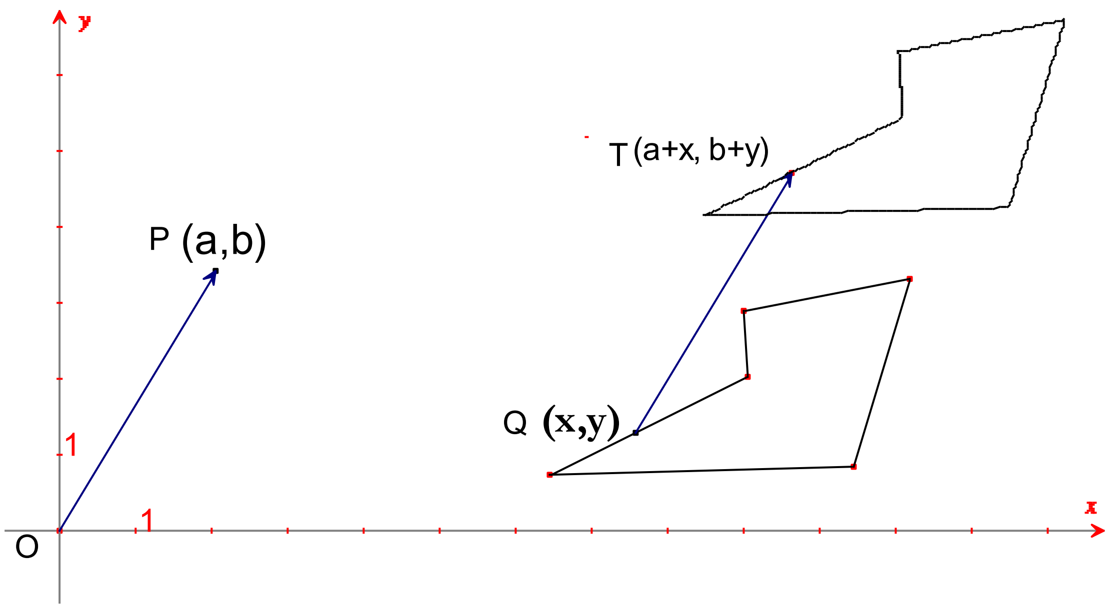
Observe que os complexos e os vetores se comportam de maneira análoga em relação à operação da adição. No primeiro quadro temos dois complexos (a,b) e (x,y) e a sua soma (a+x, b+y). No segundo quadro temos os vetores associados aos complexos. Repare que o vetor soma dos vetores OP e OQ é o vetor OT cuja origem é O e a extremidade é a mesma que o ponto associado à soma dos complexos (a,b) e (x,y).



Interpretação geométrico da adição de complexos

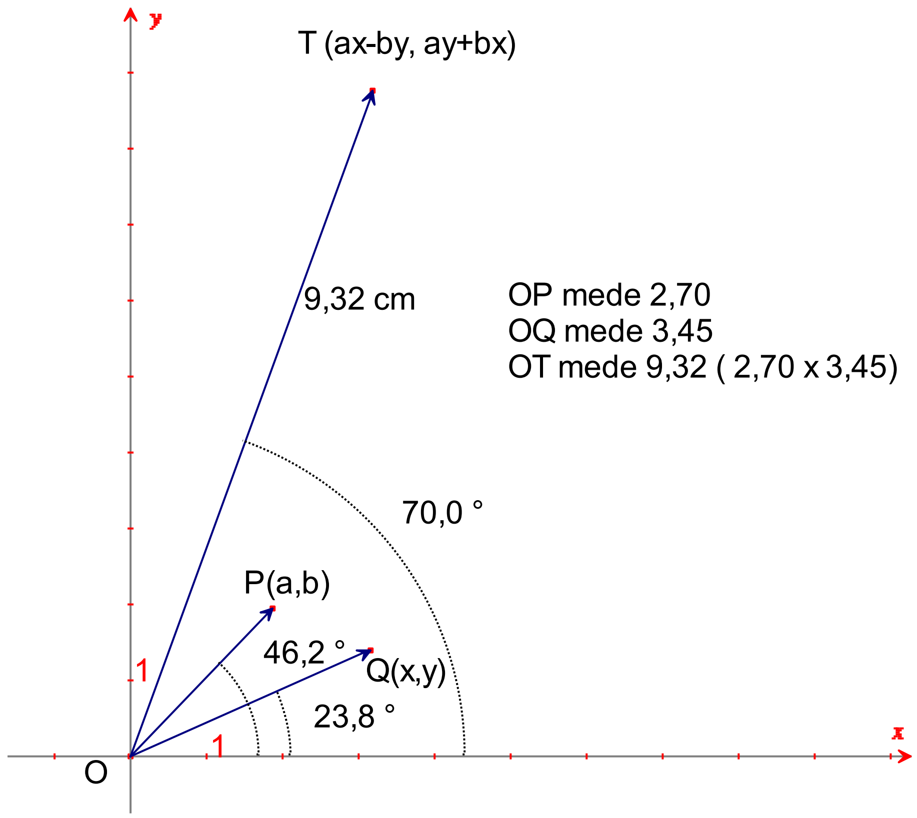


Sejam (a,b) e (x,y) dois complexos representados no plano cartesiano pelos pontos P e Q respectivamente. Adicionando os dois complexos teremos um novo complexo (a+x, b+y) representado pelo ponto T. Ao complexo (a,b) associamos o vetor OP. Observe que o ponto correspondente ao complexo obtido pela adição dos complexos (a,b) e (x,y) corresponde a uma translação do ponto Q segundo o vetor OP. Observe a figura abaixo : fixado o complexo (a,b), à medida que o complexo (x,y) representado pelo ponto Q percorre os lados do polígono, o complexo (a+x, b+y) percorre uma figura congruente à do polígono. Essa nova figura é o polígono inicial transladado. Portanto a adição de complexos corresponde a fazer translações de figuras no plano.

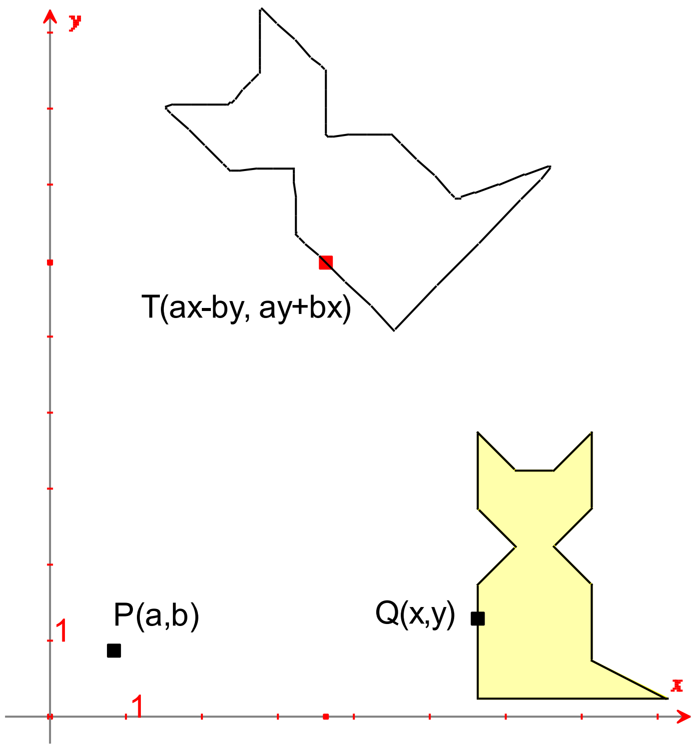


Interpretação geométrico da multiplicação de complexos

Dados dois complexos (a,b) e (x,y). Ao multiplicar (a,b) pelo complexo (x,y) obtemos o complexo (ax-by, ay+bx). Esses complexos serão representados pelos pontos P, Q e T respectivamente. Observe que o ângulo entre o vetor OP e o eixo x é 46,2º , o ângulo entre o vetor OQ e o eixo x é 23,8º e o ângulo entre o vetor OT e o eixo x é 70º (observe que 70º = 23,8º +46,2º) . Geometricamente, isso corresponde a rotacionar o complexo (x,y) de um ângulo de 46,2º no sentido anti-horário, em torno do ponto O . Além disso observe que as distâncias das extremidades dos complexos ao ponto O são OP =2,70, OQ =3,45 e OT = 9,32. Observe que OT=OP.OQ0. Todos esses resultados obtidos experimentalmente podem ser facilmente justificados.

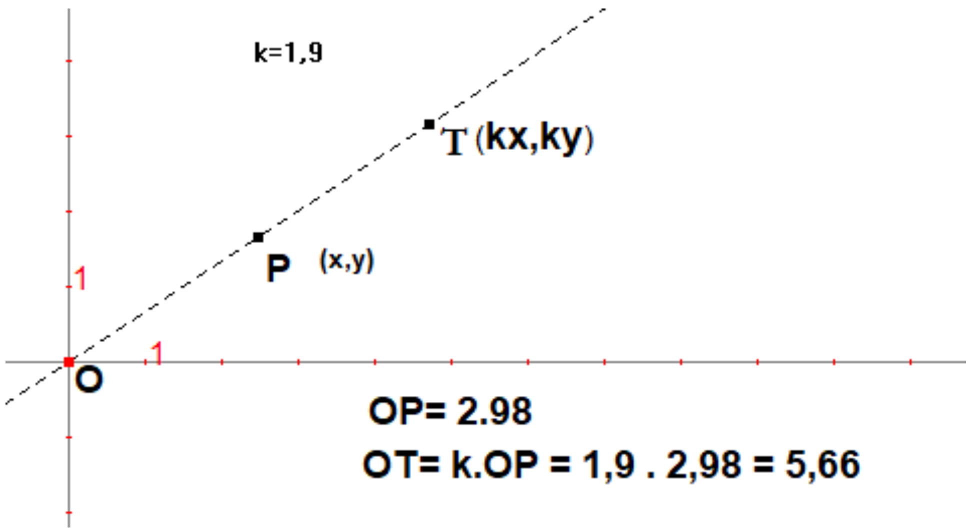


Observe na figura abaixo que quando o ponto Q associado ao complexo (x,y) percorre o contorno do gato, o complexo T que corresponde ao produto dos complexos (a,b) e (x,y) também percorre também uma figura semelhante à primeira. Essa nova figura é o gato rotacionado e ampliado. Por isso dizemos que a multiplicação de complexos corresponde a fazer rotações e homotetias de figuras no plano.



Interpretação geométrica da multiplicação de um real por um complexo

k.(a,b)= (k,0). (a,b)=(k.b-b.0, kb+0.a)=(ka, kb)



Ao multiplicar um número complexo P(x,y) por um número real positivo k, o novo completo T(kx,ky) estará na semirreta OP e a uma distância k.OP da origem.

Ao multiplicar um número complexo P(x,y) por um número real negativo k, o novo completo T(kx,ky) estará na semirreta OP, a uma distância k.OP da origem e O entre P e T.