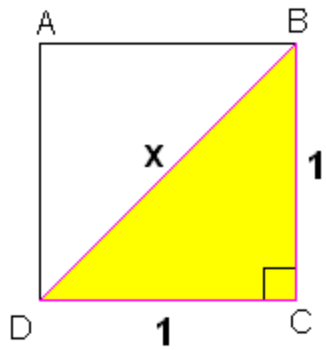
# <u>Revisitando a construção dos números reais</u>

(Vincenzo Bongiovanni)

O aluno entra em contato pela primeira vez com o conceito de número irracional no oitavo ano do ensino fundamental. Em geral, esse encontro se dá a partir da diagonal de um quadrado.




Ao aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo BCD encontra-se a igualdade $x^2 = 2$. E vem a pergunta: qual é o número racional que elevado ao quadrado dá como resultado 2? É possível mostrar ao aluno, de modo elementar, que não existe um número racional cujo quadrado é 2. Chamando o número racional x de $\frac{a}{b}$ , onde $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível cujo quadrado é 2, temos 4 possibilidades para os inteiros a e b na igualdade $a^2 = 2b^2$.
<u>Primeira possibilidade</u>: a e b pares. Absurdo pois a fração $\frac{a}{b}$ é irredutível.
<u>Segunda possibilidade</u>: a par e b ímpar. Sendo $a=2m$ e $b=2n+1$ teremos $4m^2=2(2n+1)^2$. Donde $4m^2= 2(4n^2+4n+1)$. Logo $4m^2=8n^2+8n+1$. Absurdo pois o primeiro membro é par e o segundo membro é ímpar.
<u>Terceira possibilidade</u>: a ímpar e b par. Sendo $a=2m+1$ e $b=2n$ teremos $(2m+1)^2 = 2.(2n)^2$. Donde $4m^2+4m+1=8n^2$. Absurdo pois o primeiro membro é ímpar e o segundo membro é par.
<u>Quarta possibilidade</u>: a e b ímpares. Sendo $a=2m+1$ e $b=2n+1$ teremos $(2m+1)^2=2. (2n+1)^2$. Donde $4m^2+4m+1=2.(4n^2+4n+1)$. Absurdo pois o primeiro membro é ímpar e o segundo membro é par.
Conclui-se que não existe um número racional cujo quadrado é igual a 2. Sabe-se que esse número existe pois é a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário que pode ser construído com régua e compasso. Portanto esse número não sendo racional é chamado de número irracional.

No final do processo de aprendizagem, a seguinte institucionalização do conceito de número irracional costuma ser apresentada pelo professor embora ela se situa num círculo vicioso: um número irracional é aquele que não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com $a \in Q$ e $b \in Q^*$ ou é aquele cuja representação decimal é infinita e não periódica. O conjunto dos números reais é em seguida apresentado como sendo aquele formado por todos os racionais e irracionais.

O objetivo deste texto é apresentar de modo informal como os reais foram construídos a partir do conjunto dos números racionais.
Desde a crise provocada pela descoberta das grandezas incomensuráveis na Antiga Grécia, os matemáticos levaram vinte séculos para construir um objeto matemático cujo quadrado é 2. Sabiam que nenhum número racional ao quadrado era igual a 2, sabiam que esse número existia mas não sabiam como definir e operar com esses novos números. Foi somente no século XIX que a façanha de dar uma definição consistente para esses objetos matemáticos se concretizou.

Galileu e Leibniz julgavam que a “ continuidade” de pontos sobre uma reta era conseqüência de sua densidade, isto é, do fato que entre dois pontos quaisquer existir sempre um terceiro. Mas só isto não bastava para caracterizar os números reais pois os números racionais também têm essa propriedade e não formam um “continuum”. Existe uma correspondência entre os números racionais e os pontos de uma reta. Escolhe-se na reta um ponto que será o ponto correspondente ao número 0 e uma unidade de comprimento para medir as distâncias. Pode-se construir para todo número racional, usando a unidade dada, um ponto na reta associado a esse número racional. Se representarmos todos os números racionais sobre a reta, não teremos preenchido totalmente os pontos da reta, restarão uma infinidade de “buracos”.

Dedekind (1831-1916) se voltou para a questão do preenchimento dos “buracos” da reta desde 1858 quando dava aulas de cálculo. Refletindo sobre a questão, Dedekind se perguntou: O que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais? E foi buscar a inspiração na teoria das proporções de Eudoxo ( IV A.C). Dedekind chegou à conclusão que a essência da continuidade de um segmento de reta estava na separação dos números racionais em duas classes. *“Por essa observação trivial, o segredo da continuidade será revelado”* escreveu Dedekind. A grosso modo, a sua ideia era a seguinte : Cortando uma reta em duas partes podemos separar os números racionais em dois conjuntos A e B onde todo número do primeiro conjunto A é menor que todo número do segundo conjunto B. Dessa forma, cada corte produz um e um só número que será chamado de número real. Por meio desses cortes, Dedekind, amplia o conjunto Q introduzindo os números irracionais.
Vamos explicitar essa ideia através de alguns exemplos.

Exemplo 1

Na reunião dos conjuntos $A=\{x\in Q/x<5/2\}$ e $B=\{x\in Q/x\geq 5/2\}$ estão todos os números racionais. Esses dois conjuntos determinam um corte no conjunto Q. Esse corte define o número real 5/2 que será indicado por (A,B) ou simplesmente por (5/2)*. Observe que A não tem um maior elemento e **B tem um menor elemento (tem um elemento mínimo)**

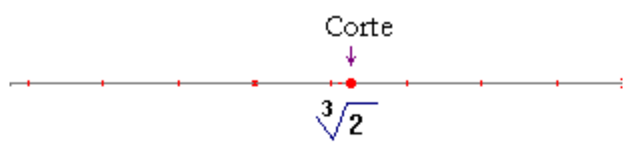
Exemplo 2

Na reunião dos conjuntos $A=\{x\in Q/x\leq 4\}$ e $B=\{x\in Q/x>4\}$ estão todos os números racionais. Esses dois conjuntos determinam um corte no conjunto Q. Esse corte define o número real 4 que será indicado por (A,B) ou simplesmente por (4)*. Observe que A **tem um maior elemento (tem um elemento máximo)** e B não tem um menor elemento.

Exemplo 3

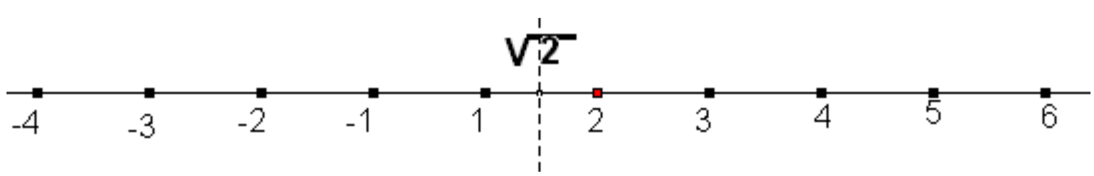
Na reunião dos conjuntos $A=\{x\in Q/x^3<2\}$ e $B=\{x\in Q/x^3>2\}$ estão todos os números racionais. Esses dois conjuntos determinam um corte no conjunto Q. Esse corte define o número real que denotamos por (A,B) ou usualmente por $(\sqrt[3]{2})$*. Esse corte define um número **real irracional.**

Observe que A não tem menor elemento e B não tem maior elemento.




Exemplo 4

Na reunião dos conjuntos $A=\{x\in Q/x^2<2 \text{ ou } x<0\}$ e $B=\{x\in Q / x^2>2\}$ estão todos os números racionais. Por exemplo $1{,}4\in A$ e $1{,}5\in B$. Esses conjuntos determinam um corte em Q que define o número **real irracional indicado por** $(\sqrt{2})$***.** Observe que A não tem menor elemento e B não tem maior elemento.



Observando os quatro exemplos percebe-se que, se A tem **um máxino** ou se B tem **um mínimo**, o corte define um **número real racional**; mas se A **não tem um máximo** e B **não tem um mínimo**, então o corte define um **número real irracional.**

| |
|---|
| Define-se **corte de Dedekind em Q** a um par de conjuntos não vazios A e B, com $A \neq Q$ e $B \neq Q$, de números racionais, satisfazendo duas condições:<br>a) A e B **contém todos os racionais** de modo que cada racional pertença, exclusivamente, a um ou outro conjunto<br>b) cada racional de A é menor que todo racional de B. |

Com esta definição, Dedekind criou os números reais, eliminou os "buracos" de Q e estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais. **Agora sim podemos definir o número irracional como sendo um número real não racional.**

No começo do século vinte, uma modificação do corte de Dedekind foi proposta por Bertrand Russell (1872-1970). Ele notou que como qualquer das duas classes A e B é univocamente determinada pela outra, uma só bastava para a determinação de um número real. A partir daí, não sendo necessário considerar as duas classes de cada corte, começou-se a trabalhar somente com a classe da esquerda ou somente com a classe da direita.
Apresentamos a seguir, a definição de número real considerando apenas a classe à esquerda. Esta definição é equivalente à definição de Dedekind.

| |
|---|
| Seja A um subconjunto não vazio de Q e $A \neq Q$. Dizemos que A é um número real (ou um corte de Q) se satisfaz duas condições :<br>a) Se $x \in A$ e y é um número racional com $y<x$ então $y \in A$<br>b) A não tem elemento máximo. |

Assim, o número real 5/2 passa a ser definido somente por uma das classes $\{x \in Q/\ x<5/2\}$. Ele será indicado por $(5/2)^*$
O número real 2, indicado por $2^*$ é o conjunto $\{x \in Q/x<2\}$
O número real 3, indicado por $3^*$ é o conjunto $\{x \in Q/x<3\}$
O número real $\frac{1}{2}$ , indicado por $(\frac{1}{2})^*$ é o conjunto $\{x \in Q\ /x < \frac{1}{2}\}$
De um modo geral, se r pertence a Q então o número real $r^*$ é o conjunto $\{x \in Q/x<r\}$
O número real irracional $\sqrt[3]{5}$, indicado por $(\sqrt[3]{5})^*$ é o conjunto $\{x \in Q/x^3 < 5\}$

Por meio do corte, Dedekind introduziu os números irracionais. A união dos racionais com os irracionais constitui o conjunto dos números reais indicado pela letra R. Os elementos do conjunto dos números reais podem ser representados por meio de pontos de uma reta e muitas vezes denominada de reta numérica. Essa propriedade de R caracteriza o que Dedekind chama de continuidade.

O passo seguinte foi definir uma adição, uma multiplicação e uma relação de ordem entre esses objetos.

| |
|---|
| A soma do real $A_1$ com o real $A_2$ indicada por $A_1+A_2$ é definida como o conjunto cujos elementos são a soma de um elemento qualquer de $A_1$ com outro elemento qualquer de $A_2$. |

Assim, seja o número real 2* e o número real 3*. A soma 2*+ 3* é o conjunto cujos elementos são formados pelas somas de um elemento qualquer de 2* com outro elemento qualquer de 3* Assim sendo $2^*=\{x\in Q/x<2\}$ e $3^* =\{y\in Q/y<3\}$ então $2^*+ 3^* =\{x+y/ x\in 2^* \text{ e } y\in 3^*\}=\{x+y/ x\in Q \text{ e } y\in Q \text{ e } x<2 \text{ e } y<3\}=$
$=\{x+y/ x\in Q \text{ e } y\in Q \text{ e } x+y<5\}=\{z\in Q/z<5\}= 5^*= (2+ 3)^*$. Pode-se generalizar esse resultado para dois números reais a* e b* quaisquer. Teremos então
$a^*+b^*= (a+b)^*$

| |
|---|
| Diz-se que o número real $A_1$ é **menor ou igual** ao número real $A_2$ se, e somente se, $A_1\subset A_2$ . Diz-se que o número real $A_1$ é **menor** que número real $A_2$ se. e somente se, $A_1\subset A_2$ e $A_1\neq A_2$. |

Assim, sendo $2^*=\{x\in Q/x<2\}$ e $3^*=\{y\in Q/y<3\}$, como todo elemento do conjunto 2* é elemento do conjunto 3* e os conjuntos são distintos dizemos que $2^*<3^*$

| |
|---|
| Diz-se que o real A é **positivo** (e se indica com $0^* <A$) quando $0^*\subset A$ e que o real A é **negativo** (e se indica com $A< 0^*$) quando $A\subset 0^*$. |

Assim, sendo $0^*=\{x\in Q/x<0\}$ e $5^*=\{x\in Q/x<5\}$ diremos que o real 5* é positivo pois $0^* \subset 5^*$, ou seja, todo elemento de 0* é elemento de 5*.
Sendo $0^*=\{x\in Q/x<0\}$ e $-2^*=\{x\in Q/x<-2\}$diremos que o real -2* é negativo pois $-2^* \subset 0^*$.

A definição de **produto de números reais** será dada aqui apenas para números reais positivos mas ela pode ser estendida facilmente para dois números reais quaisquer.

Define-se produto do real positivo $A_1$ pelo real positivo $A_2$ ao real indicado por $A_1.A_2$ cujos elementos são os racionais negativos, o zero e os racionais que são produtos de um racional positivo qualquer de $A_1$ por um racional positivo qualquer de $A_2$.

Exemplo 1

Se $(\sqrt[3]{2})^*=\{x\in Q/x^3<2\}$ e $(\sqrt[3]{5})^*=\{x\in Q/x^3<5\}$ então

$(\sqrt[3]{2})^*.(\sqrt[3]{5})^* = Q_- \cup \{ a \,.\, b \ / \ a \in Q \text{ e } a>0,\ b \in Q \text{ e } b>0,\ a \in \sqrt[3]{2} \text{ e } b\in \sqrt[3]{5}\}=$

$= Q_-\cup\{a \,.\, b \ / \ a \in Q \text{ e } a > 0, b\in Q \text{ e } b >0,\ a^3 < 2 \text{ e } b^3 < 5\} =$

$=Q_-\cup\{a \,.\, b \ / \ a\in Q \text{ e } a>0,\ b\in Q \text{ e } b>0,\ (a \,.\, b)^3 < 10 \}=\{z\in Q/z^3<10\}=$

$= (\sqrt[3]{10})^* =(\sqrt[3]{2.5})^*$. Portanto $(\sqrt[3]{2})^*.(\sqrt[3]{5})^* = (\sqrt[3]{10})^*$

Exemplo 2

Sendo $Q_- =\{x\in Q/x<0\}$ , $Q_+\{x\in Q/x > 0\}$ e $2^*=\{x\in Q/x<2\}$ e $3^* =\{y\in Q/y<3\}$ então $2^*.\ 3^* =Q_- \cup \{a.b/\ a\in Q_+,\ b\in Q_+,\ a\in 2^* \text{ e } b\in 3^*\}=$

$=Q_- \cup\{a \,.\, b \ / \ a\in Q_+,\ b\in Q_+ \text{ e } a<2 \text{ e } b<3\}=$

$=Q_- \cup \{a \,.\, b \ / \ a\in Q_+,\ b\in Q_+ \text{ e } a \,.\, b <6\}=\{z\in Q/z<6\}= 6^*= (2 \,.\, 3)^*$

Pode-se generalizar esse resultado para dois números reais $a^*$ e $b^*$ quaisquer. Teremos então $a^* \,.\, b^*= (a \,.\, b)^*$

Com esta definição pode-se construir o objeto matemático tão esperado (desde os gregos) cujo quadrado é 2. Esse objeto é precisamente

$(\sqrt{2})^*=\{x\in Q \ / \ x\leq 0 \text{ ou } x^2< 2\}$. Pode-se verificar que $(\sqrt{2})^*.\ (\sqrt{2})^* = 2^*$.

É possível, utilizando as definições acima, provar a validade das seguintes propriedades:

1) $A_1$ Para todo a, b e c em R temos: $(a + b) + c = a + ( b + c)$
2) $A_2$ Para todo a e b em R temos: $a + b = b + a$
3) $A_3$ Existe $0\in R$ tal que $a + 0=a$.
4) $A_4$ Para todo $a\in R$ existe $-a$ em R tal que $a + (-a) = 0$
5) $M_1$ Para todo a,b e c em R temos: $(a \,.b) \,.\, c = a \,.\, ( b \,.\, c)$
6) $M_2$ Para todo a e b em R temos: $a \,.\, b = b \,.\, a$
7) $M_3$ Existe $1\in R$, $1\neq 0$ tal que $a.1 =a$
8) $M_4$ Para todo $a\in R$, $a\neq 0$ existe $a^{-1}\in R$ tal que: $a \,.\, a^{-1}= 1$
9) D Para todo a, b e c em R temos: $a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$
10) $O_1$ Para todo a em R temos: $a\leq a$
11) $O_2$ Para todo a e b em R temos: $a\leq b$ e $b\leq a \Rightarrow a = b$
12) $O_3$ Para todo a, b e c em R temos: $a\leq b$ e $b\leq c \Rightarrow a\leq c$
13) $O_4$ Para todo a e b em R temos: $a\leq b$ ou $b\leq a$
14) OA Para todo a e b em R temos: $a\leq b \Rightarrow a + c\leq b + c$

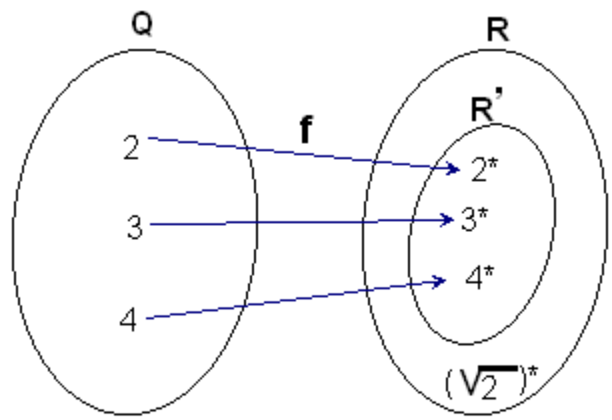
15) OM   Para todo a, b e c em R temos : $a \leq b$ e $0 \leq c \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$
16) C   Todo subconjunto não vazio de R limitado superiormente tem supremo.

O conjunto R munido das operações de adição e multiplicação e satisfazendo as 9 primeiras propriedades acima recebe o nome de **corpo.**
O conjunto R munido das operações de adição, de multiplicação e da relação de ordem e satisfazendo as 15 primeiras propriedades acima recebe o nome de **corpo ordenado**.
O conjunto R munido das operações de adição, multiplicação e da relação de ordem e satisfazendo as 16 propriedades acima recebe o nome de **corpo ordenado completo.**
A demonstração dessas propriedades é um trabalho longo e laborioso que exige um grande dispêndio de tempo. É por isto que, em geral, nos cursos de cálculo ou de análise, define-se o conjunto R a partir dessas 16 propriedades, que passam a ser axiomas, sem revelar a natureza de seus elementos.

Conforme Spivak[1] :
"*É inteiramente irrelevante que um número real seja um subconjunto de número racionais; tal fato nunca deveria entrar na demonstração de qualquer teorema importante sobre números reais. Demonstrações aceitáveis deveriam apenas usar o fato de que os números reais satisfazem as 16 propriedades ou seja que formam um corpo ordenado completo.*"

## Agora vamos mostrar porquê se escreve que $Q \subset R$

Vamos definir uma aplicação bijetora f de Q em R' onde R' é o conjunto formado por todos os números reais da forma r* onde r é um número racional. Essa aplicação será definida por f(x)=x*. Vamos provar que existe um isomorfismo entre Q e R', ou seja, que existe uma função bijetora f de Q em R' que verifica duas condições: f(x+y)=f(x)+f(y) e f(x).f(y)=f(x.y) para quaisquer x e y em Q.




Prova
f é injetora pois $x \neq y$ implica que $x^* \neq y^*$
f é sobrejetora pois qualquer que seja $x^* \in R'$, existe $x \in Q$ tal que $f(x)=x^*$
Logo f é bijetora.
$f(x+y) = (x+y)^* = x^*+y^* = f(x)+f(y)$
$f(x.y) = (x.y)^* = x^*.y^* = f(x).f(y)$
Temos portanto um isomorfismo entre Q e R'.
A existência desse isomorfismo permite identificar conjuntos de elementos diferentes. Portanto "aceita-se" escrever que Q = R' e pelo fato de $R' \subset R$, considerar Q como subconjunto de R. Podemos também igualar os elementos de Q e de R' escrevendo $1=1^*$, $2 = 2^*$, $\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^*$, etc.....
Observe que o número real 1 é um subconjunto de Q ao passo que o racional 1 é uma classe de equivalência. Portanto são elementos de natureza distinta mas podem ser confundidos devido ao isomorfismo e "faz-se de conta" que são iguais.
Esta visão microscópica de que números reais são subconjuntos de racionais é importante porque nos mostra como criar o conjunto dos números reais e porque mostra que um corpo ordenado completo existe. Além disso, ela nos fornece um fascinante exemplo do que é fazer matemática.

Bibliografia

[1] Michael Spivak
Calculus
Editorial reverté, s.a
[2] Elon Lages Lima
Curso de análise
Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPQ
[3] Geraldo Ávila
Introdução à análise matemática
editora Edgard Blucher Ltda
[4] Carl B.Boyer
História da matemática
Editora da Universidade de São Paulo.
[5] Hamilton Luiz Guidorizzi
Um curso de cálculo volume 1
Livros técnicos e científicos editora S.A