Problema interessante na divisão por 2 dos múltiplos de 9

Prof. Vincenzo Bongiovanni

Os mais curiosos já terão notado um fato interessante que ocorre nas divisões sucessivas por 2 a partir de um múltiplo de 9, por exemplo, 360.

- Se somarmos os algarismos de 360, temos $3 + 6 + 0 = 9$
- Dividindo 360 por 2 obteremos 180, e a soma dos algarismos é 1+8+0=9
- Dividindo 180 por 2 obteremos 90, e a soma dos seus algarismos é 9+0=9
- Dividindo 90 por 2 teremos o número 45, e a soma dos seus algarismos é 4+5=9
- Dividindo 45 por 2 teremos 22,5, e a soma dos seus algarismos é 2+2+5=9
- Dividindo 22,5 por 2 teremos 11,25, e a soma dos seus algarismos é 1+1+2+5=9
- Dividindo 11,25 por 2 teremos 5,625, e a soma de seus algarismos é 5+6+2+5=18; por sua vez a soma dos algarismos dessa soma é 1+8=9

E assim sucessivamente.

Como explicar, nos exemplos acima que, a soma dos algarismos do resultado da divisão seja sempre 9 ou um número cuja soma de seus algarismos seja também, por sua vez, 9? E o que sucede com a soma dos algarismos, se continuarmos as divisões (ou multiplicações) sucessivamente?

A resposta a essa indagação será dada no texto a seguir. Inicialmente, consideremos o critério da divisibilidade por 9:

Dizemos que um número N é divisível por 9 se o quociente $\frac{N}{9}$ é um número inteiro, ou seja, se existe k $\in Z$ tal que $\frac{N}{9} = k$. Nesse caso, $N = 9k$, onde $k \in Z$.

Observe que 360 é divisível por 9 pois $\frac{360}{9} = 40$ é um número inteiro.

Vamos analisar esse critério da divisibilidade por 9 em duas partes:

Parte 1: se um número inteiro é divisível por 9 então a soma de seus algarismos é divisível por 9.
Demonstração:
Para facilitar a compreensão, tomemos um número N de 4 algarismos, N=ABCD. Da mesma forma que ao escrever 6854 como $1000 \cdot 6 + 100 \cdot 8 + 10 \cdot 5 + 4$, escreveremos N como $ABCD$ ou $1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D$.
Por hipótese N é divisível por 9, o que significa que $1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D = 9k, k \in Z$.
Logo $999A + A + 99B + B + 9C + C + D = 9k$.
Portanto $A + B + C + D = 9k - 999A - 99B - 9C = 9(k - 111A - 11B - C)$
Finalmente $\frac{A+B+C+D}{9} = k - 111A - 11B - C$
Donde se conclui que $\frac{A+B+C+D}{9}$ é inteiro pois k-111A-11B-C é um número inteiro. Logo A+B+C+D é divisível por 9.

Parte 2: se a soma dos algarismos de um número inteiro é divisível por 9 então o número é divisível por 9.
Demonstração:
Seja N=ABCD.
Se $A + B + C + D$ é divisível por 9 então $A + B + C + D = 9k, k \in Z$.
De $N = ABCD = 1000A + 100B + 10C + D$, vem que
$999A + A + 99B + B + 9C + C + D =$
$999A + 99B + 9C + A + B + C + D =$
$999A + 99B + 9C + 9k =$
$9 \cdot (111A + 11B + C + k) = N$
Assim $\frac{N}{9} = 111A + 11B + C + k$
Donde se conclui que $\frac{N}{9}$ é inteiro pois $111A + 11B + C + k$ é inteiro.
Esses resultados, parte 1 e parte 2, podem ser generalizados para números com 5, 6, ...,n algarismos como N=ABCDE, N=ABCDEF, etc.

Podemos resumir as duas partes do critério de divisibilidade escrevendo:

Um número inteiro é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos é divisível por 9.

Antes de voltarmos à pergunta inicial, uma outra propriedade

Se um número inteiro N é divisível por 9 então o produto de N por um número inteiro qualquer α é também divisível por 9.

De fato, se N é divisível por 9 então $N = 9k, k \in Z$. Multiplicando ambos os membros por α teremos: $N \cdot \alpha = 9k \cdot \alpha$. Donde $\frac{N.\alpha}{9}$ é um número inteiro pois $k \cdot \alpha$ é inteiro.

Exemplo 1: fazendo $N = 360$ e $\alpha = 2^n$, teremos

para $n = 1, N \cdot \alpha = 360 \cdot 2^1 = 720$

para $n = 2, N \cdot \alpha = 720 \cdot 2^2 = 2880$

Podemos observar que todos esses números $N \cdot \alpha$ são divisíveis por 9.

Exemplo 2: fazendo $N = 360$ e $\alpha = 10^n$, teremos

para $n = 1, N \cdot \alpha = 360 \cdot 10^1 = 3600$

para $n = 2, N \cdot \alpha = 360 \cdot 10^2 = 36000$

Novamente, observamos que todos esses números são divisíveis por 9.

Voltando à questão proposta, como explicar que dividindo 360 por 2 e depois novamente por 2 e assim sucessivamente, obtém-se sempre uma soma dos algarismos igual a 9 ou a soma dos algarismos da soma igual a 9 e assim sucessivamente em relação a todas as somas?

Dividir 360 por 2 e depois por 2 e assim sucessivamente, equivale a escrever $\frac{360}{2^n}$ com $n = 1,2,3, \ldots, n$.

Observe na tabela abaixo que surgirão vários números decimais. Para eliminar os números com vírgula, pois nesse caso não se pode falar em divisibilidade, podemos multiplicar os números decimais por 10^n, pois, como demonstrado, se um número N é divisível por 9 então $N \cdot 10^n$ também é divisível por 9:

n	$\frac{360}{2^n}$	$\frac{360}{2^n} . 10^n$
0	360	
1	180	
2	90	
3	45	
4	22,5	22500
5	11,25	112500
6	5,625	562500
7	2,8125	2812500

Observe que ao multiplicar, a partir de $n = 4$, o produto do número $\frac{360}{2^n}$ por 10^n, teremos:

$$\frac{360}{2^n} \cdot (2 \cdot 5)^n = \frac{360}{2^n} \cdot 2^n \cdot 5^n = 360 \cdot 5^n$$

que é um número inteiro divisível por 9, já que 360 é divisível por 9. Dessa forma podemos prosseguir sem nos preocupar com os números decimais.

Assim, todos os números da forma $\frac{360}{2^n} \cdot 10^n$ resultantes das divisões sucessivas de 360 por 2, com os devidos cuidados para não termos números decimais, serão números inteiros divisíveis por 9.

Vamos analisar alguns desses números. A título de demonstração trataremos apenas daqueles formados por 2 algarismos, 3 algarismos e 4 algarismos.

a) Suponhamos que um desses números tenha dois algarismos. Vamos indicá-lo por AB. Como AB é divisível por 9, a soma A+B é divisível por 9. O maior valor da soma A+B é 18. Portanto há duas possibilidades para a soma: 18 ou 9 . Será 18 se AB=99. Nesse caso a soma dos algarismos é 18 (9+9) e a soma dos algarismos da soma será 9 (1+8). A segunda possibilidade é a soma A+B=9. Nesse caso, os números são 18 ou 81, 27 ou 72, 36 ou 63, 45 ou 54, confirmando que a soma dos algarismos é 9.

b) Suponhamos que um desses números tenha 3 algarismos. Vamos indicá-lo por ABC. Como ABC é divisível por 9 então a soma A+B+C é divisível por 9. Nesse caso teremos 3 possibilidades para a soma dos algarismos: 27 ou 18 ou 9. Será 27 se o número é 999. Nesse caso a soma dos algarismos é 27 (9+9+9) e a soma dos algarismos da soma será 9 (2+7). A segunda possibilidade é a soma A+B+C=18. Nesse caso a soma dos algarismos da soma será 9 (1+8). A terceira possibilidade é a soma A+B+C=9.

c) Supondo que um desses números tenha 4 algarismos. Vamos indicá-lo por ABCD. Como ABCD é divisível por 9 então a soma A+B+C+D é divisível por 9. Nesse caso teremos 4 possibilidades para a soma dos algarismos: 36 ou 27 ou 18 ou 9. Será 36 se o número é 9999. Nesse caso a soma dos algarismos é 36 e a soma dos algarismos da soma será 9. A segunda possibilidade é a soma A+B+C+D =27. Nesse caso a soma dos algarismos da soma será 9 (2+7). A terceira possibilidade é a soma A+B+C+D=18. Nesse caso a soma dos algarismos da soma é 9 (1+8). A quarta possibilidade é a soma A+B+C+D=9.

E assim por diante para números com 5, 6, 7, …, n, algarismos.

Conclusão:

A soma dos algarismos de qualquer número inteiro divisível por 9 é um múltiplo de 9.