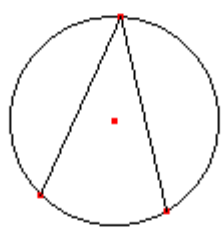
Alguns aspectos relacionados com o ensino/aprendizagem da geometria
(Vincenzo Bongiovanni)

1) O objeto da geometria

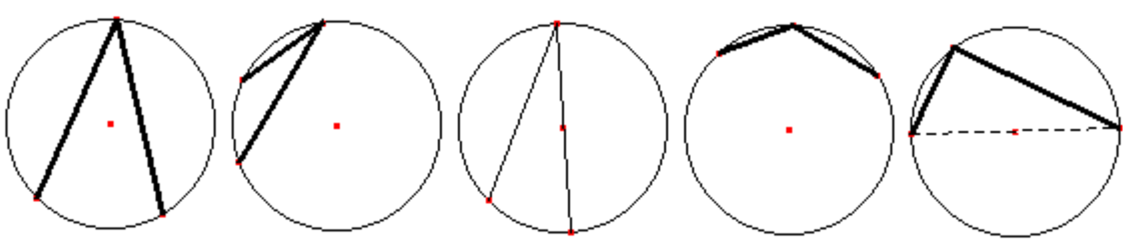
A **geometria elementar** trata de pontos, retas, planos, ângulos, triângulos, polígonos, circunferências, etc., que são abstrações dos pontos, retas, planos, ângulos, triângulos, polígonos, circunferências, etc., do nosso espaço físico. As relações que existem entre os entes físicos são aproximações muito boas das relações que existem entre os correspondentes entes ideais. No entanto, **o ensino da geometria** tem ignorado a relação entre os entes físicos representados por desenhos e os entes ideais. Nos primeiros anos do Ensino Fundamental, os alunos manipulam objetos geométricos tridimensionais (blocos lógicos, material dourado, puzzle, dobraduras, tangram, etc.).

No Ensino Fundamental II, as manipulações desaparecem lentamente em prol de atividades no ambiente papel e lápis ou num ambiente informático. Nos dois últimos anos do Ensino Fundamental II, repentinamente passa-se a trabalhar com objetos teóricos. O ponto já não tem dimensão, o segmento tem comprimento, mas já não tem mais espessura e assim por diante. Os alunos não percebem que houve a transição de uma **representação** para um **objeto teórico** e consequentemente **confundem com frequência propriedades do desenho com propriedades do objeto**. Quando, por exemplo, a figura desenhada é um triângulo, os alunos enxergam somente o triângulo que está sob os seus olhos, em geral acutângulo, e não um representante do objeto teórico triângulo. E o raciocínio do aluno é desenvolvido sobre a particular figura desenhada. Enquanto o professor olha o desenho e vê o objeto geométrico, o aluno, como não tem os mesmos conhecimentos do professor, só enxerga o que vê naquele particular desenho.

Quando o professor diz: "considere um ângulo inscrito numa circunferência", o aluno imagina



O professor por sua vez, raciocina como se o aluno imaginasse todos os casos possíveis :



Colette Laborde afirma que o ensino da geometria deve permitir ao aluno diferenciar o espaço físico (sensível) do espaço geométrico (abstrato) pois é somente a partir desta distinção que o aluno poderá compreender as questões que são apresentadas em geometria e as respostas que poderão ser dadas. É uma mudança de contrato que deve ser explicada ao aluno.

2) Brousseau e o espaço físico

Brousseau considera que o tamanho do espaço físico é uma variável didática. Ele classifica o espaço em três níveis: microespaço, mesoespaço e macroespaço.

- O **microespaço** é o espaço dos objetos pequenos que podem ser deslocados e manipulados. O aluno está no exterior do micro espaço. A folha de papel onde o aluno trabalha é um micro espaço. Determinar a altura de um triângulo desenhado numa folha de papel é um problema situado no micro espaço.

- O **mesoespaço** é o espaço dos objetos que variam até 50 vezes o tamanho do aluno. Esses objetos podem ser vistos globalmente, praticamente de maneira simultânea. O aluno faz parte do mesoespaço. A classe, o pátio da escola são mesoespaços. Determinar a altura de uma árvore é um problema situado no mesoespaço.

- O **macroespaço** é o espaço dos objetos nos quais o aluno só pode ter uma visão parcial. A visão global é uma construção intelectual. O aluno está no interior do macro espaço. A determinação do raio do planeta Terra e da distância Terra/Lua são exemplos de problemas situados no macroespaço.

Brousseau afirma que as grades curriculares só privilegiam problemas do microespaço e sustenta que é necessário apresentar aos alunos não somente problemas relacionados ao **microespaço**, mas também ao **mesoespaço** e ao **macroespaço**. Isto pode ajudar o aluno a relacionar o espaço físico com o espaço geométrico e a transitar da geometria da observação para a geometria da dedução.

3) Nos currículos, a geometria está desvinculada do desenho geométrico

Várias pesquisas sobre o ensino/aprendizagem da geometria elementar apontam a falta de um trabalho integrado da geometria com o desenho geométrico. É como se fossem duas disciplinas distintas. As construções geométricas são atividades que levam o aluno ao domínio de conceitos geométricos pois é na construção geométrica de um objeto teórico que o aluno irá perceber a necessidade do conhecimento das propriedades geométricas do objeto teórico. É importante integrar as construções geométricas ao ensino da geometria.

O software de geometria dinâmica propicia aos alunos a possibilidade de verificarem por si mesmos se a construção feita obedece a todas as propriedades do objeto teórico. Ele permite diferenciar construções errôneas, chamadas na geometria dinâmica de **construções moles**, de construções corretas, denominadas na geometria dinâmica de **construções robustas**. Uma construção mole é apenas a reprodução da imagem mental que temos da figura. Numa construção mole, o objeto se desfaz quando se manipula um objeto de base. Numa construção robusta o aluno utiliza as propriedades da figura para obter a sua representação. Nesse caso, a construção resiste ao deslocamento de um objeto de base. A geometria dinâmica contribui a estabelecer uma importante distinção entre desenhar e construir.

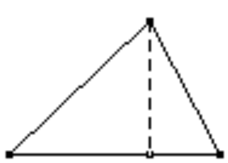
Podemos diferenciar desenho e construção da seguinte maneira:

- **Desenhar** é reproduzir a imagem mental que temos de um objeto geométrico. É uma das representações de um objeto geométrico teórico. É um traçado material válido para uma posição particular do objeto em questão.

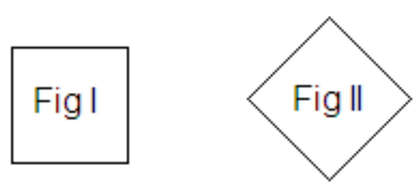
- **Construir** é utilizar as propriedades do objeto geométrico para obter a sua representação. A construção, quando realizada num software de geometria dinâmica, preserva, quando do deslocamento de um de seus pontos, as propriedades ligadas ao objeto geométrico que representa. Podemos dizer que, nesse caso, a construção é um desenho dinâmico, que não perde as suas propriedades quando do deslocamento de um de seus pontos de base. A construção vai além do simples traçado empírico controlado apenas pela visualização. A manipulação de um representante de um objeto geométrico **construído por um software de geometria dinâmica** pode contribuir para uma melhor compreensão do objeto teórico.

4) Estereótipos

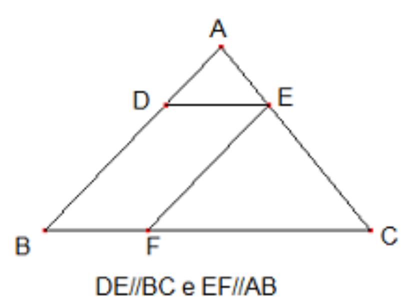
O tratamento estereotipado dado aos objetos geométricos pelos livros didáticos e, às vezes, pelos professores pode induzir os alunos a erros e levá-los a não reconhecer desenhos desses mesmos objetos quando apresentados em posições diferentes. Por exemplo, as alturas dos triângulos são sempre traçadas em triângulos acutângulos, as retas são sempre traçadas paralelas às bordas da folha do caderno, os quadrados são sempre desenhados com lados paralelos às bordas da folha de papel.



As alturas dos triângulos são sempre traçadas em triângulos acutângulos.



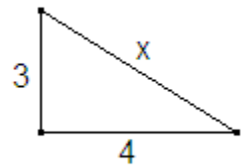
Os alunos reconhecem que a Figura I é um quadrado, mas o mesmo quadrado (Figura II) não costuma, em geral, ser reconhecido como quadrado.

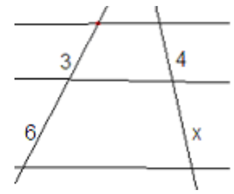


Os alunos reconhecem o teorema de Tales quando $DE \parallel BC$ mas não o visualizam quando $FE \parallel AB$.

5) Inobservância do enunciado

Um aspecto observado por professores no ensino da geometria é a não observância dos alunos nas hipóteses do enunciado de um problema. Os dois exemplos a seguir foram propostos a alunos do Ensino Básico.





O que se pode afirmar sobre o valor de x?   O que se pode afirmar sobre o valor de x?

Na primeira figura, a maioria dos alunos se deixou seduzir pelo desenho e usou o teorema de Pitágoras para afirmar que o valor de x é 5. No entanto não havia a informação que o ângulo oposto a x era reto. Com as informações dadas é possível construir infinitos triângulos. Parsysz fala em "contaminação do sabido pelo percebido". No segundo exemplo, são dadas três retas cortadas por duas retas e se pede o valor de x. Nesse caso, os alunos se deixam também levar pelo percebido (as retas parecem paralelas) e respondem em geral que $x = 8$ usando para isto o teorema de Tales.

6) Desafios da geometria espacial

Em relação ao ensino/aprendizagem da geometria espacial as dificuldades são de outra natureza. A maioria dos professores de Matemática considera a Geometria Espacial um tema difícil de ser ensinado. Por sua vez, a maioria dos alunos considera a Geometria no espaço um tema difícil de ser aprendido. Por que tanta dificuldade no ensino e aprendizagem desse tema?

Uma das principais razões está relacionada com a codificação e decodificação de figuras espaciais. Codificar é representar no plano um objeto tridimensional e decodificar é interpretar a representação plana de uma figura espacial. Em geral, há uma perda de informações quando se passa de um objeto tridimensional para sua representação bidimensional. De fato, um objeto representado no papel não corresponde à formação da imagem mental que se tem do objeto.

Por exemplo, sabemos que todas as faces de um cubo são quadradas, mas representamos algumas de suas faces por paralelogramos. Sabemos que a base de um cone circular é um círculo, mas a representamos por uma elipse. Retas reversas não se intersectam, mas as suas representações no plano são retas concorrentes ou paralelas. As faces de uma pirâmide triangular estão em 4 planos distintos, mas numa folha de papel são representadas num único plano. Portanto, há um conflito entre o que é visto no espaço e o que é representado em um suporte bidimensional. Quando lidamos com representações espaciais, o controle perceptivo está ausente, tanto na codificação quanto na decodificação.

Outra dificuldade na aprendizagem da geometria espacial é proveniente da fraca experiência que os alunos trazem do ensino básico com a manipulação e exploração de objetos sólidos e maquetes. Diversos trabalhos mostram que essa capacidade de elaborar e interpretar uma representação gráfica — chamada de habilidade espacial ou de visualização espacial — pode (e deve) ser estimulada. Surge então uma questão: como desenvolver a visualização espacial?

7) Visualização espacial

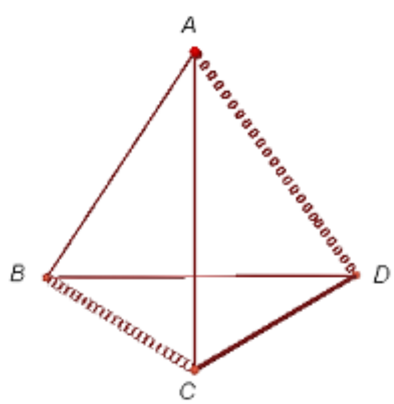
Uma alternativa apontada por várias pesquisas para desenvolver a visualização espacial é propiciar inúmeras situações com materiais concretos, qualquer que seja a idade do aluno (Parsysz). Uma outra que começa a ser investigada é a utilização de representações dinâmicas em ambientes informáticos. Em setembro de 2004, no Congresso Internacional Cabriworld, realizado em Roma, foi lançado o Cabri 3D, um software de geometria dinâmica 3D.

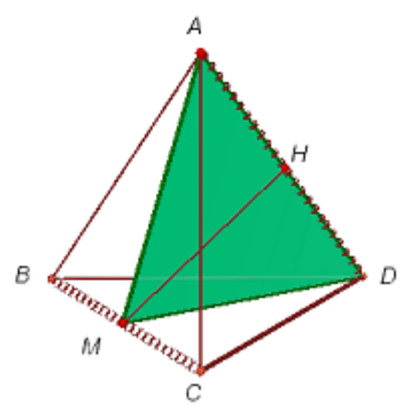
Esse software, além de preservar as propriedades de objetos geométricos tridimensionais quando manipulados, permite também **mudar o ponto de vista** em relação ao objeto representado. É possível olhar o sólido de cima, de lado, de frente, de baixo ou de qualquer ponto de vista, em diversos sistemas de representação. Além dessa grande vantagem, o Cabri 3D é um software de **manipulação direta** em três dimensões. Isto significa que o usuário age diretamente sobre a representação gráfica dos objetos que estão na tela ao invés de agir sobre a sua representação interna (o código).

Diversas pesquisas apontam que a explicitação das regras de representação pode favorecer o desenvolvimento da visualização espacial. Parsysz na sua tese de doutoramento enfatiza a importância de se ensinar as regras de representação a alunos do Ensino Básico. Machado no livro Epistemologia e didática, diz : "... poucos são os professores que buscam de modo consciente o **desenvolvimento nos alunos da capacidade de representar**. Tal capacidade de transitar do objeto para a representação plana e vice-versa, sem dúvida é possível de ser desenvolvida, competindo à escola a realização de tal tarefa".

8) Planos geométricos

Em relação à geometria espacial, a pesquisa de Rommevaux (tese de doutoramento) afirma que as maiores dificuldades encontradas pelos alunos na resolução de um problema estão situadas no **discernimento de planos** contidos nas situações estudadas e representadas. Rommevaux afirma que saber discernir esses planos é um passo decisivo para a aprendizagem da geometria espacial.





Para obter a distância entre duas arestas opostas (BC e AD) de um tetraedro regular ABCD de aresta a, é necessário discernir o plano passando pelos pontos M e H onde M e H são ponto médios das arestas BC e AD. A altura do triângulo isósceles AMD será a distância.

9) O olhar de Parsysz sobre o ensino da geometria.

Bernard Parsysz apresenta um modelo para o ensino da geometria onde destaca 4 etapas no desenvolvimento do pensamento geométrico:

- A primeira etapa é denominada por ele de **geometria concreta** (nível G0); nesse nível parte-se da realidade, do concreto e os objetos são materializados.

- A segunda etapa é denominada de **geometria espaço-gráfica** (nível G1), que é a geometria das representações figurais e gráficas; nesse nível os objetos são bidimensionais como por exemplo desenhos produzidos numa folha ou numa tela de um computador. A justificativa de propriedades é feita pelo "olhar".

- A terceira etapa é denominada de **geometria protoaxiomática** (nível G2); nesse nível os conceitos são objetos teóricos e as demonstrações dos teoremas são feitas a partir de premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo. É possível que nesse nível elementos de G0 e G1 sejam incorporados no G2, ou seja, é possível que o sabido se apoie ainda no percebido.

- A quarta etapa é denominada de **geometria axiomática** (nível G3); nesse nível os axiomas são explicitados completamente.

Parsysz afirma que uma das grandes tarefas do professor de matemática no ensino da geometria é promover o salto de validações perceptivas para validações dedutivas.

10) A articulação das quatro faces do tetraedro segundo Machado

Para garantir uma aprendizagem significativa da geometria, Machado sugere articular **quatro processos no ensino da geometria**:
- Percepção
- Construção
- Representação
- Organização conceitual

"Na construção do conhecimento geométrico, em vez de uma polarização empírico/formal, é fundamental a caracterização de quatro processos: a percepção, a construção, a representação e a concepção. Não são fases que se sucedem linear e periodicamente, mas faces como as de um tetraedro, com elementos comuns e multiplamente articuladas."

Não obstante o fato de a iniciação em geometria realizar-se por meio da **percepção** de formas e de suas propriedades características através de atividades sensoriais, como a observação e a manipulação de materiais, desde muito cedo tais atividades relacionam-se diretamente com a **construção** de objetos em sentido físico, através de massas, varetas ou papéis, por exemplo, bem como com a **representação** de objetos através de desenhos.

Ocorre, no entanto, que essas atividades intermediárias, sobretudo as correspondentes à representação, não costumam ser suficientemente valorizadas como elementos fundamentais dos processos cognitivos, sendo, muitas vezes, concebidas tendo em vista primordialmente alcançar-se, o mais rapidamente possível, a **organização conceitual**. E a fecundidade da geometria nasce precisamente da articulação das quatro faces anteriormente citadas.

Conforme Machado, "No caso específico do ensino da geometria, constituem desvios a serem evitados o tratamento isolado de qualquer uma das faces, constituindo-se temas ou mesmo disciplinas como Construções geométricas." Ele complementa: "É tão importante transitar, como uma criança, da percepção à construção, daí à representação e, então, à organização conceitual, quanto o é realizar o percurso do engenheiro, que concebe o objeto antes de representá-lo e construí-lo, e só então torná-lo palpável."

11) A diversidade de registros segundo Duval

Cada conceito pode ser apresentado ao aluno em diferentes registros (Duval cita o registro da língua natural, o registro gráfico, o registro simbólico, o registro figural). Cada aluno tem mais ou menos facilidade em trabalhar num determinado registro. Quando um problema é proposto num registro diferente daquele do domínio do aluno, saber mudar de registro ajuda o aluno a resolver melhor o seu problema pois toda representação é cognitivamente parcial em relação àquilo que ela representa. Duval (1996) sustenta que para que um conhecimento ou um saber matemático possa ser colocado em funcionamento, é necessário que o aprendiz o apreenda não somente com um registro, mas com pelo menos **dois registros de representação** e que saiba coordenar esses registros.

12) O papel das figuras

De grande importância para o estudo da geometria são as figuras. Segundo Duval, o principal motivo é que na resolução de um problema, a representação figural **mostra mais facilmente a ideia da solução** do que em outros registros. Os desenhos permitem um acesso mais direto, mais rico e menos custoso que um texto. Mas um desenho é visto por um aluno diferentemente de como é vista por um professor. Muitas vezes para resolver um problema é necessário transformar (modificar) a figura dada em outras figuras para obter novos elementos que poderão nos levar à ideia da solução de um problema ou de uma prova. Uma dessas transformações recebe o nome de **reconfiguração** e consiste na divisão da figura em outras subfiguras que podem ou não serem reagrupadas formando outras figuras. Há fatores que tornam a operação de reconfiguração mais ou menos visível ou mais ou menos complexa. O estudo desses fatores, o reconhecimento de diferentes reconfigurações e a seleção da reconfiguração pertinente na resolução de um problema deve ser levado em conta pelo professor no ensino da geometria.

13) A mudança de quadros segundo Douady

O conceito de "quadro, mudança de quadro e jogo de quadros" foi utilizado na didática da Matemática francesa pela primeira vez por Régine Douady na sua tese de doutoramento "*Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l´enseignement des mathématiques*". Douady caracteriza a noção de quadro da seguinte maneira: "Um quadro é constituído de objetos de um campo da matemática, de relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diferentes e das imagens mentais associadas a esses objetos e a essas relações".

O **quadro da geometria euclidiana,** por exemplo**,** é constituído pelos axiomas de Euclides ou de Hilbert ou de Birkhoff. Se a axiomática em questão for a de Euclides, o quadro incluirá os 5 postulados de Euclides (segundo a tradução de Vitrac), os 9 axiomas de Euclides e todas as 465 proposições demonstradas por Euclides. Entre esses resultados estão os quatro casos de congruência de triângulos, todos os teoremas relacionados com os triângulos, os quadriláteros, circunferência, o teorema de Tales, o teorema de Pitágoras e os casos de semelhança de triângulos.

Muitas vezes na geometria, para resolver um problema, é necessário mudar de contexto no qual o problema é apresentado. Douady chama essa passagem de **mudança de quadro**. Essa mudança de quadro pode permitir uma nova entrada nas dificuldades encontradas pelos alunos e pode fazer emergir ferramentas e técnicas não pertinentes na primeira formulação.

Douady propõe também um **jogo interativo** entre **quadros** que consiste em uma mudança de quadro seguida de um retorno ao quadro inicial. Esse jogo consiste em transferir o problema de um quadro para um outro, interpretar as correspondências entre os elementos dos dois quadros, resolver o problema e finalmente voltar com a solução do problema para o quadro de partida.

14) A dialética ferramenta/objeto segundo Douady

Régine Douady na sua tese de doutoramento "Jogo de quadros e dialética ferramenta/objeto" sugere uma nova organização para a construção de certos conceitos. Podemos resumir esta organização chamada **dialética ferramenta/objeto** da seguinte maneira: "Para certas noções, uma sequência de atividades fazendo alternar o aspecto ferramenta da noção visada com o aspecto objeto, seguida de uma institucionalização, e seguida de exercícios variados de familiarização que precisam das noções recentemente institucionalizadas e sua reutilização numa situação nova, pode ajudar na construção de um conhecimento procurado. "

15) Reconhecimento da hierarquia das deduções

Muitos alunos não têm consciência que uma lógica permeia a geometria e que todos os resultados geométricos podem ser obtidos um após o outro dedutivamente. Para eles definições, postulados e teoremas são conceitos sem nenhuma hierarquização. (GRAVINA-1996 VII Simpósio Brasileiro de

Informática na Educação). A geometria euclidiana pode ser apresentada por uma justaposição de resultados ou por um encadeamento lógico dos resultados. Euclides priorizava o método axiomático mesmo sendo a sua axiomática incompleta.

Uma axiomática completa da geometria euclidiana foi apresentada por Hilbert num curso dado por ele em 1898 e publicado em 1899 no seu livro Fundamentos da geometria. Hilbert baseou a sua exposição em três conceitos primitivos (ponto, reta e plano), em três relações fundamentais (incidente, estar entre e congruente) e em cinco grupos de axiomas (axiomas da incidência, axiomas da ordem, axiomas da congruência, axiomas da continuidade e o axioma do paralelismo). Os axiomas estabelecem as ligações entre os conceitos primitivos e as relações fundamentais.

A apresentação atual da geometria euclidiana, muito mais amena que a forma de Hilbert, foi proposta por Birkhoff em 1930 e adaptada mais tarde por Moise e Pogorelov. Ela utiliza os números reais e as funções no seu sistema de axiomas. Em 1872 Félix Klein propôs uma alternativa para o estudo da geometria euclidiana que utiliza as transformações geométricas.

16) As transformações geométricas

A inclusão das transformações geométricas no estudo de conceitos geométricos vem sendo enfatizada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC/SEF, 1998). A Geometria apresentada no Ensino Fundamental e Médio é a Geometria Euclidiana que tem como ferramentas principais, tanto na resolução de problemas quanto nas demonstrações, a congruência e a semelhança de triângulos. As isometrias, transformações geométricas que preservam distâncias, e as homotetias, transformações geométricas que preservam o paralelismo e a razão entre segmentos correspondentes permitem dar um tratamento mais geral à noção de congruência e semelhança. Um dos objetivos da introdução das transformações geométricas no ensino da geometria é ampliar certos conceitos geométricos e fornecer novos métodos para resolver certas classes de problemas geométricos.

17) A problemática prova/demonstração

Consideramos a problemática da prova/demonstração em Matemática como um desafio a ser enfrentado. É um tópico dos mais delicados no ensino tanto para professores como para alunos. O fato de se pedir ao aluno justificar um resultado a partir de premissas da geometria euclidiana se apresenta a ele mais como uma exigência de um contrato didático do que propriamente uma necessidade. Estudos do pesquisador, De Villiers, afirmam que um dos maiores problemas no ensino da demonstração é a dificuldade que os alunos têm em compreender a necessidade da prova, principalmente quando os resultados a demonstrar são evidentes.
Estudos internacionais em Educação Matemática indicam que os alunos tendem a confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e analisam argumentos de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo. (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000). É importante proporcionar aos alunos situações que provoquem o salto de validações perceptivas para validações dedutivas. É preciso capacitar o aluno a ter um controle sobre a sua ação. Freudenthal sugere o caminho da organização lógica local no ensino da

demonstração. Na educação básica é mais importante falar em processos de validação do que em demonstração formal.

18) Demonstrações baseadas em uma lógica local

Hans Freudenthal (1905-1990) escreveu um livro chamado *Matematics as an Educational Task*, publicado em 1973 onde dedica um capítulo sobre a geometria. Ele define a geometria (usada no ensino básico) da seguinte maneira: "Geometria é compreender o espaço, [...] esse espaço no qual a criança vive, respira e se movimenta. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, com vista a viver, respirar e movimentar-se melhor". Ele defende que no ensino da demonstração, em vez de se pretender apresentar ao aluno um sistema axiomático completo, devem ser apresentadas experiências de organização lógica local, em que alguns resultados conjeturados sejam obtidos por meio de curtas deduções, interligados logicamente. Uma proposta de organização lógica local poderia consistir em assumir os casos de congruência de um triângulo para provar as propriedades dos quadriláteros. Uma outra proposta poderia consistir em assumir os axiomas de área para demonstrar as fórmulas das áreas de polígonos. Uma terceira proposta poderia consistir em assumir que retas paralelas, quando cortadas por uma reta transversal, determinam ângulos alternos internos congruentes para demonstrar as fórmulas da soma das medidas dos ângulos internos e externos dos polígonos

19) O processo de aprender a demonstrar em geometria

Balacheff e Gutierrez distinguem duas grandes categorias de provas que intervêm na aprendizagem da demonstração: as provas pragmáticas, ligadas à ação (provas baseadas em manipulações ou exemplos concretos onde a intuição e a experimentação desempenham papéis fundamentais.) e as provas intelectuais que se caracterizam por um distanciamento em relação à ação. Balacheff analisa detalhadamente as demonstrações pragmáticas enquanto Gutierrez se concentra mais nas demonstrações intelectuais em que a convicção provém de argumentos abstratos baseados em propriedades gerais, operações abstratas e deduções lógicas. Tais classificações podem ajudar o professor a diferenciar validações perceptivas, daquelas instrumentalizadas e daquelas dedutivas

20) A teoria dos irmãos van Hiele no ensino e aprendizagem da geometria

Essa teoria propõe uma progressão na aprendizagem da geometria através de 5 níveis cada vez mais complexos. O objetivo inicial dos van Hiele era ajudar os alunos a desenvolver o *insight* em geometria. Eles definem o *insight* da seguinte maneira: uma pessoa mostra *insight* se é capaz de se desempenhar numa situação não usual, se desenvolve corretamente e adequadamente as ações requeridas pela situação e se desenvolve deliberadamente e conscientemente um método que resolva a situação. Quando os estudantes têm *insight*, eles são capazes de aplicar seu conhecimento ordenadamente para resolver problemas e entendem o que estão fazendo e por que estão fazendo. O professor tem um papel fundamental ao definir as tarefas adequadas para os alunos progredirem para níveis superiores de pensamento.

21) A importância de um trabalho com a definição segundo Cécile Ouvrier

Cécile Ouvrier-Buffet na sua tese de doutoramento afirma que construir definições desempenha um papel essencial na atividade matemática interagindo dialeticamente com a formação de conceitos. As situações de construção de definição estão ausentes no ensino em todos os níveis e sugere que os professores proponham situações de construção de definição em classe como uma primeira entrada do aluno na construção de um conceito. Cita como exemplos, os conceitos de trapézio, trapézio isósceles, quadriláteros e conjunto convexo.

22) A dialética novo/antigo segundo Chevallard

Todo saber ensinado progride segundo uma dialética do antigo para o novo. Se desejamos introduzir uma noção matemática nova no ensino devemos fazê-lo com a condição de não o fazer aparecer como radicalmente nova, mas sim como um prolongamento de conhecimentos antigos. É a **dialética antigo-novo**. Todo objeto do saber que desejamos ensinar deve ser apresentado inicialmente como novo. Deve-se em seguida mostrar que esse objeto tem uma outra face: ele se inscreve na perspectiva do universo de conhecimentos antigos.

23) Dualidade conceito x figura

Fishbein (1993) no artigo *The theory of figural concepts*, Educational Studies in Mathematics, 24/2, 139-162 trata o objeto geométrico como tendo duas componentes: uma conceitual e outra figural. A componente conceitual expressa as propriedades do objeto. A componente figural corresponde à imagem mental que temos do objeto. Na formação da imagem mental o desenho desempenha um papel fundamental, mas ele pode interferir negativamente no aspecto conceitual. É necessário construir os conceitos geométricos com equilíbrio conceitual e figural.

24) Michèle Artigue e a análise a priori

Uma das etapas da metodologia chamada de engenharia didática é a análise a priori. Antes de apresentar uma atividade ao aluno, é desejável que o professor faça uma análise a priori da atividade. É uma análise teórica independente de toda realização particular da situação proposta. Trata-se de esclarecer o que pode acontecer com os saberes em jogo quando a situação é colocada em funcionamento.

Para evitar surpresas na aplicação de uma atividade, é importante que o professor saiba qual é o objetivo da atividade proposta, quais conhecimentos prévios dos alunos são necessários para a resolução da atividade, quais conhecimentos poderão ser apropriados pelos alunos para serem utilizados em outras atividades, quais as possíveis estratégias esperadas dos alunos na resolução da atividade, quais as possíveis dificuldades que eles terão na resolução da atividade, quais mudanças de quadros poderão favorecer a resolução da atividade, quais registros de representação poderão ser utilizados pelos alunos, que tipos de ajuda serão dadas caso o aluno fique bloqueado na resolução e que tipo de controle o aluno terá sobre a sua ação.

25) O contexto histórico

Certos conceitos geométricos podem ser mais bem compreendidos a partir da história. Por exemplo, pode-se utilizar a evolução das definições dos quadriláteros notáveis para mostrar a riqueza do conhecimento histórico na formação de conceitos geométricos. As concepções dos alunos em relação às definições de quadrado, retângulo, losango e paralelogramo nas séries iniciais se assemelham muito com as de Euclides e Legendre ao passo que, nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, se assemelham mais à concepção de Hadamard. Outro exemplo poderia ser o surgimento do número π.

26) Os níveis de conhecimento, segundo Aline Robert

No artigo "Ferramentas de análise dos conteúdos matemáticos a ensinar" (*Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 18, no2, pp.139-190,1998), a pesquisadora francesa Aline Robert classifica o funcionamento dos conhecimentos matemáticos pelos alunos em 3 níveis: técnico, mobilizável e disponível.

O aluno põe em funcionamento um conhecimento matemático de nível **técnico** quando resolve uma questão simples que corresponde a uma aplicação imediata de um teorema, de uma propriedade, de uma definição ou de uma fórmula. Em geral, há indicações dos métodos a utilizar. No nível de funcionamento **mobilizável** os conhecimentos que serão utilizados são bem identificados, mas necessitam de alguma adaptação ou de alguma repetição antes de serem colocados em funcionamento. O nível de funcionamento **disponível** corresponde a resolver uma questão proposta sem nenhuma indicação ou sugestão fornecida pelo professor.

É preciso achar nos conhecimentos anteriores o que favorece a resolução da questão. Aline Robert sugere que nenhum desses três níveis seja negligenciado no ensino da matemática.

27) Algumas recomendações para a revitalização da geometria (ICME VIII)

- Os conceitos devem ser estudados de um ponto de vista experimental e indutivo. Os resultados decorrentes da abordagem intuitiva devem ser provados.
- Deve ser dada maior ênfase aos conceitos centrais de geometria, tais como, as transformações geométricas e os seus efeitos em conjuntos de pontos.
- Uma ampla variedade de programas de computador deve ser utilizada, tanto como ferramentas de investigação como para a construção de conceitos.