Introdução ao estudo das geometrias Afim e Projetiva

(Vincenzo Bongiovanni)

Neste texto daremos uma ideia intuitiva das geometrias afim e projetiva. Para isso apresentaremos algumas caracterizações dessas geometrias à luz da geometria euclidiana.

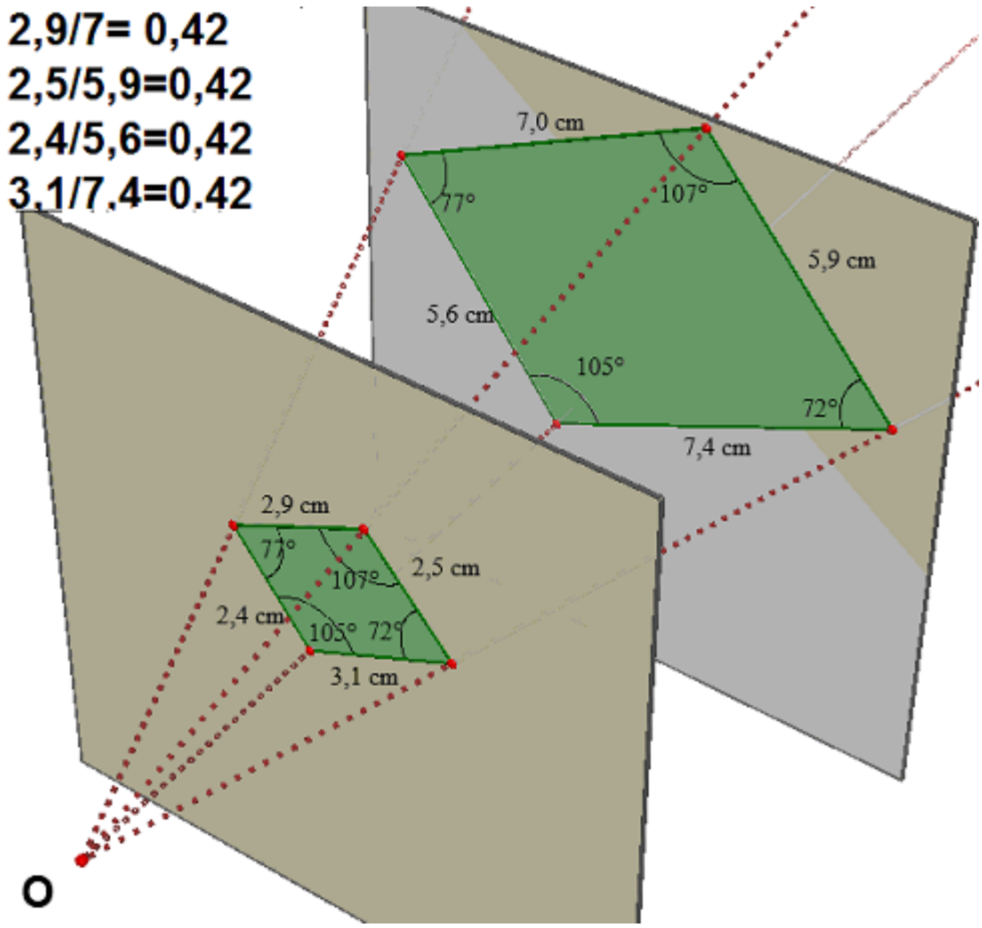
1) Geometria Euclidiana plana

O mais antigo texto grego que chegou completo até nós é a obra de Euclides: "Os Elementos". Essa obra constituída de 13 livros expõe grande parte do conhecimento matemático grego desde a época de Tales, em ordem lógica. **O que distingue essa obra das outras e fez a sua grandeza é a sua estrutura axiomática.** São deduzidos 465 teoremas a partir de 9 axiomas e 5 postulados. Na Antiga Grécia, axiomas ou noções comuns eram afirmações evidentes por si só e postulados eram proposições geométricas que se pediam que fossem aceitas sem demonstração. Hoje, na matemática, essas duas palavras são sinônimas. Os postulados na obra de Euclides eram cinco. Em linguagem atual, o primeiro postulado diz que existe um segmento de reta ligando dois pontos dados. O segundo diz que todo segmento de reta pode ser estendido indefinidamente em ambas as direções. O terceiro diz que existe um círculo com qualquer centro dado e qualquer raio dado. O quarto diz que todos os ângulos retos são iguais entre si. O quinto diz que se uma reta, encontrar outras duas retas formando ângulos internos do mesmo lado com soma menor que dois ângulos retos, então as duas retas, se suficientemente prolongadas, se encontrarão do lado em que estão os ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos. Mais tarde, o quinto postulado foi substituído por um outro equivalente a ele e denominado hoje de postulado das paralelas de Euclides (na forma de Playfair). "Por um ponto fora de uma reta, existe uma única reta paralela à reta dada". A geometria que utiliza esse sistema de axiomas onde **os casos de congruência e de semelhança de triângulos são o método principal para demonstrar e resolver problemas** é frequentemente denominada de **geometria elementar** ou **geometria de Euclides.** Mais tarde recebeu a denominação de **geometria euclidiana**. O primeiro livro de Euclides foi objeto de vários comentários por causa do quinto postulado. A forma um pouco complicada desse postulado incitou os matemáticos a tentar deduzi-lo a partir dos quatro primeiros. As inúmeras tentativas de tentar provar o quinto postulado de Euclides mostraram lacunas no sistema axiomático de Euclides. Nos Elementos, várias provas se apoiavam mais na constatação visual que em raciocínios provenientes dos postulados. Por exemplo, em algumas demonstrações, Euclides usa o fato de que as duas circunferências secantes se cortam em dois pontos o que não é necessariamente verdadeiro sem um postulado de completude da reta. Em Euclides, não se pode provar que se uma reta intersecta um lado de um triângulo então ela intersectará o outro lado do triângulo. Este fato somente foi percebido em 1882 pelo matemático Pasch que o adotou como postulado nas suas demonstrações. Os casos de congruência de triângulo eram estabelecidos a partir de um argumento intuitivo de superposição de figuras. Faltava um postulado que garantisse que as propriedades das figuras (comprimentos e ângulos) permanecessem inalteradas durante seu deslocamento. Em 1898 Hilbert inclui o caso de congruência de triângulo, indicado hoje pela sigla LAL em seus postulados. Faltavam nos postulados de Euclides, os chamados postulados de congruência, de continuidade e de ordem e também a escolha de certos conceitos iniciais chamados mais tarde de conceitos primitivos. Durante séculos, a obra de Euclides serviu de modelo e referência para o ensino da geometria. Autores posteriores a Euclides, respeitavam a divisão dos livros feitas por ele bem como a disposição e formulação das diferentes proposições. É preciso chegar a Hilbert em 1899 com sua obra "*Fundamentos da Geometria*" para se obter um sistema logicamente satisfatório. Hilbert baseou a sua exposição em três conceitos primitivos (ponto, reta e plano), em três relações fundamentais (incidente, estar entre e congruente) e em cinco grupos de axiomas (grupo 1: axiomas da incidência; grupo 2: axiomas da ordem; grupo 3: axiomas da congruência; grupo 4: axiomas da continuidade; grupo 5: o axioma do paralelismo.). Os axiomas estabelecem as ligações entre os conceitos primitivos e as relações fundamentais. Em 1930 Birkhoff apresenta uma nova formulação axiomática da geometria euclidiana onde as funções e os números reais desempenham um papel fundamental. Esses axiomas, ao contrário dos de Hilbert, introduzem a ideia de medida desde o início. Os segmentos e os ângulos são medidos com os números reais. O aluno tem agora à sua disposição as fórmulas das áreas das figuras elementares que só puderam ser obtidas com toda a generalização com a chegada dos números reais. Alguns geômetras adaptaram o sistema de Birkhoff para o ensino. Entre eles estão Moise Down e A.V.Pogorélov. Uma grande parte do trabalho que os professores realizam hoje no Ensino Básico utiliza as ideias de Birkhoff.

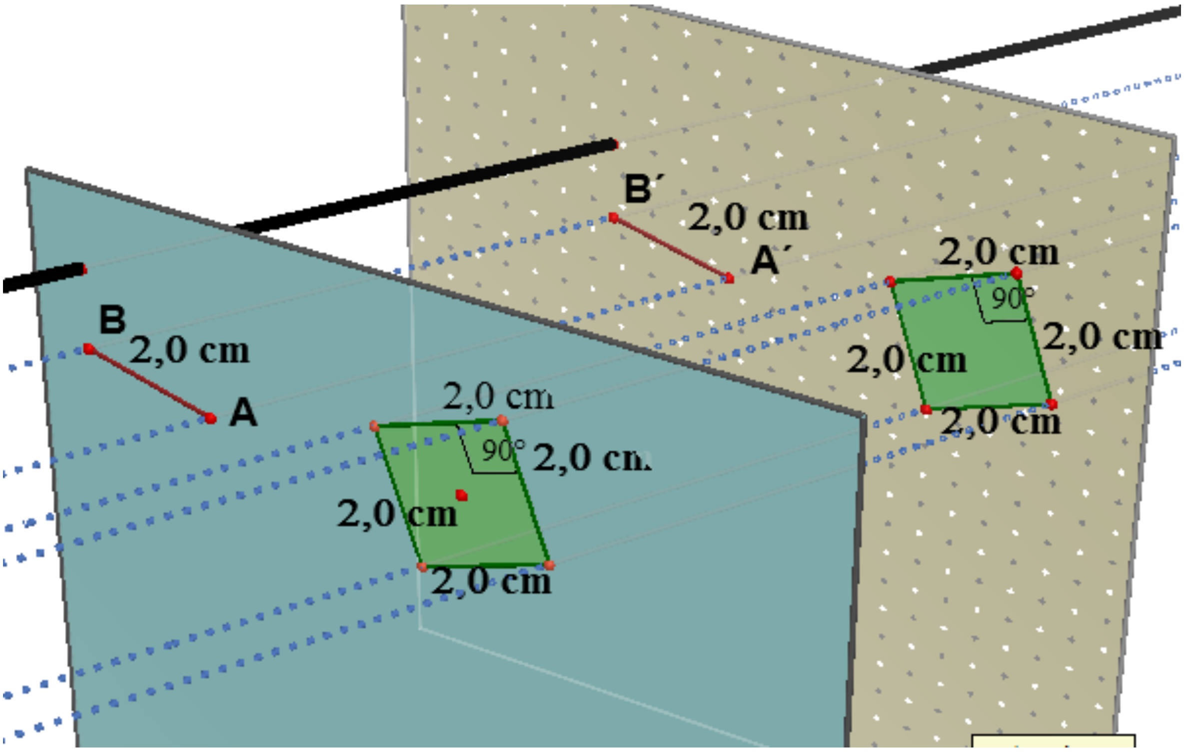
Os invariantes da geometria Euclidiana plana

Consideremos dois planos paralelos. Desenhamos uma figura no primeiro plano e a projetamos no outro plano, por **um feixe de retas incidentes num ponto O** ou por um **feixe de retas paralelas**. A geometria euclidiana se preocupa em estudar as propriedades da figura desenhada no primeiro plano que não se alteram quando ela é projetada no segundo plano.

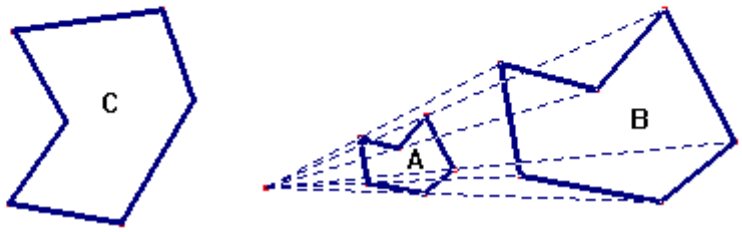
No caso em que o feixe de retas é incidente no ponto O, a figura desenhada no primeiro plano e a figura projetada no segundo plano são semelhantes. Os principais invariantes são **os ângulos e as razões entre segmentos correspondentes**



.No caso da figura em que o feixe de retas é formado por retas paralelas, a figura desenhada no primeiro plano e a figura projetada no segundo plano são congruentes e os principais invariantes são os **ângulos, os comprimentos e as áreas.**



Uma proposta alternativa para o estudo da geometria euclidiana é a que utiliza as transformações **geométricas. A translação, a reflexão em reta e a rotação** são transformações que levam uma figura numa outra congruente à primeira e os seus elementos invariantes são as distâncias e as medidas dos ângulos. Tais transformações geométricas estão associadas à congruência de figuras. Uma **transformação geométrica que não preserva distâncias é a homotetia.** Essa transformação está associada à ampliação e redução de figuras. Ela não preserva distâncias mas transforma uma figura numa outra semelhante à primeira e os seus elementos invariantes são os ângulos e as razões entre dois segmentos correspondentes. Além disso os segmentos correspondentes são paralelos entre si e os pontos correspondentes incidem num ponto chamado centro da homotetia. Uma transformação geométrica que engloba as isometrias e a homotetia é **a transformação semelhança**. Ela leva uma figura numa outra semelhante à primeira. Os elementos invariantes dessa transformação são os ângulos e as razões entre dois segmentos correspondentes. Essas transformações e as suas composições permitem dar um tratamento mais geral à noção de congruência e semelhança. Por exemplo, dizemos que duas figuras são **congruentes** se existe uma isometria do plano que transforma a primeira figura na segunda figura e dizemos que duas figuras A e C são **semelhantes** se existe uma figura B homotética a A e congruente a C.

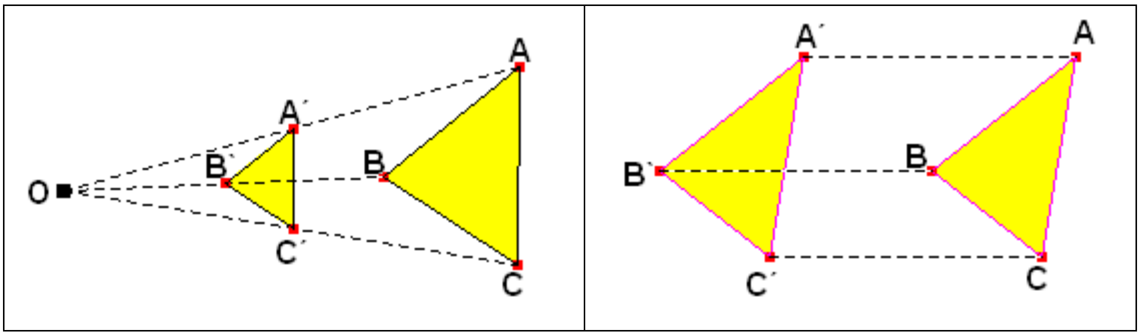


Um dos objetivos da introdução das transformações geométricas no ensino da geometria é ampliar certos conceitos geométricos e fornecer novos métodos para resolver certas classes de problemas geométricos.

2) Geometria Afim plana

A geometria afim formaliza a percepção que temos da sombra de um objeto desenhado num plano e projetado num outro plano, não paralelo ao primeiro, por raios paralelos entre si.

Ela estuda as propriedades das figuras que podem ser deduzidas dos axiomas de Hilbert de incidência, ordem, continuidade e paralelismo e apenas de alguns axiomas de congruência. Em relação a esses axiomas, ela considera apenas os axiomas que intervém na noção de ,igualdade de segmentos ou da razão entre segmentos, contidos numa mesma reta ou em retas paralelas. Além disso, em algumas axiomáticas, ela considera também **o Teorema de Desargues,** ilustrado abaixo como **axioma (**se os triângulos ABC e A´B´C´ são tais que A e A´, B e B´, C e C´ são concorrentes ou paralelos e se AB//A´B´e AC// A´C´então BC//B´C´).



As noções métricas ligadas às medidas de segmentos e às medidas de ângulos não são consideradas na geometria afim.

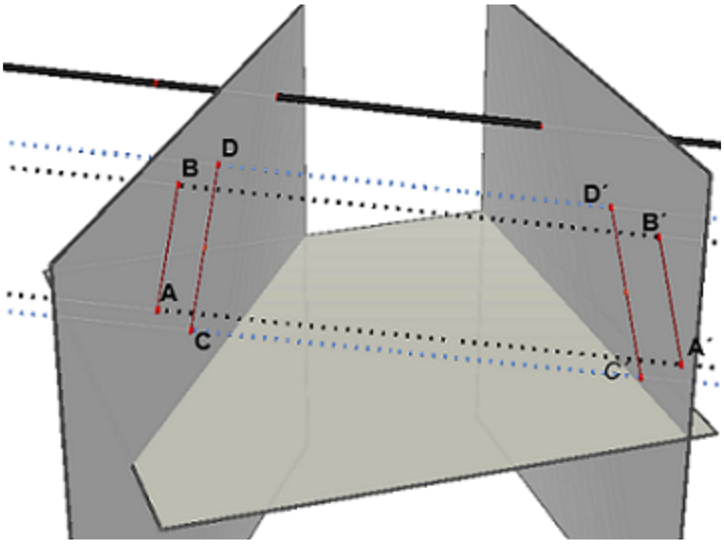
Os invariantes da geometria afim plana

Consideremos dois planos não paralelos. Desenhamos uma figura no primeiro plano e a projetamos no outro plano com um feixe de retas paralelas. A geometria afim se preocupa em estudar as propriedades da figura desenhada no primeiro plano que não se alteram quando a figura é projetada no segundo plano.

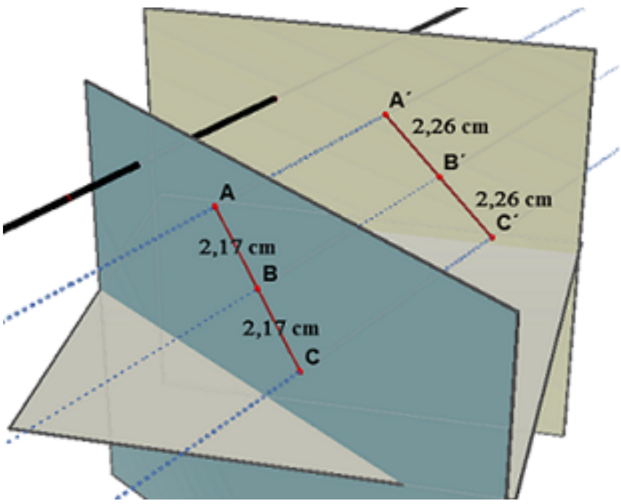
Quais são as propriedades que se conservam?

O alinhamento de três pontos é conservado, isto é, se três pontos do primeiro plano estão alinhados então as suas imagens no segundo plano serão alinhadas.

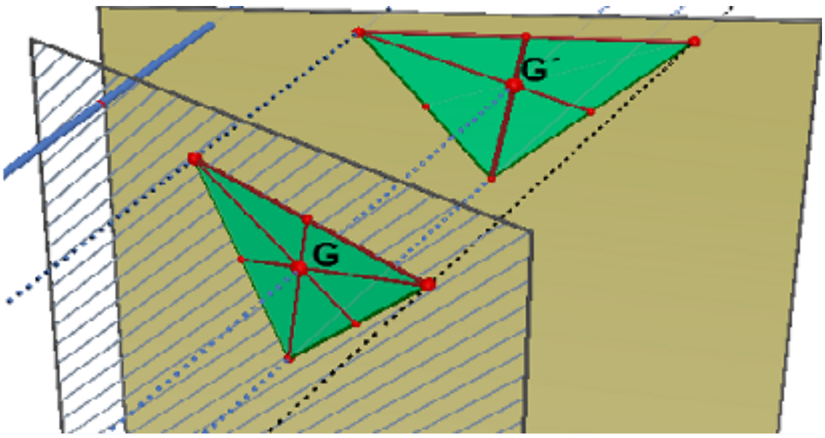
O paralelismo é conservado, isto é, se duas retas AB e CD são paralelas no primeiro plano então as suas imagens A´B´ e C´D´ no segundo plano serão paralelas.



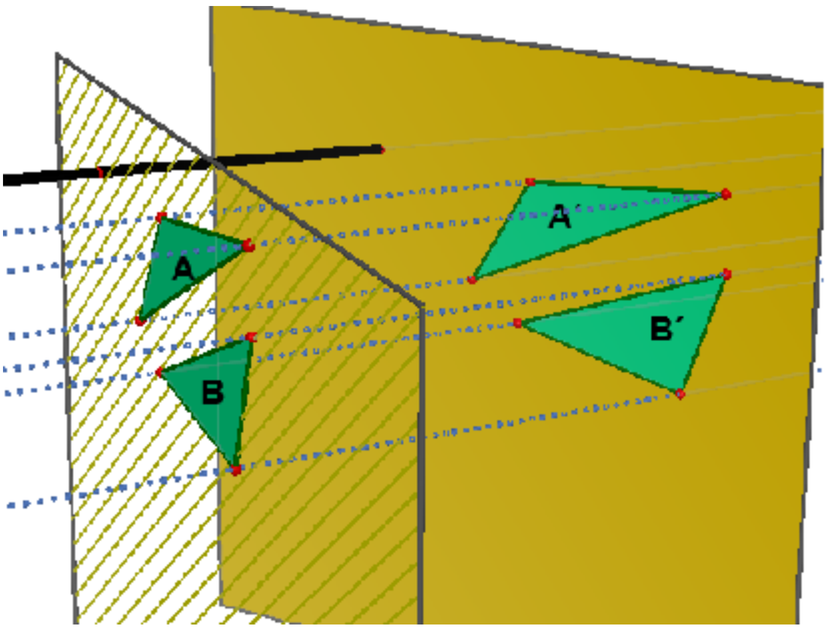
O ponto médio é conservado, isto é, se B é ponto médio do segmento AC no primeiro plano então a imagem B´ do ponto B será ponto médio da imagem A´C´.



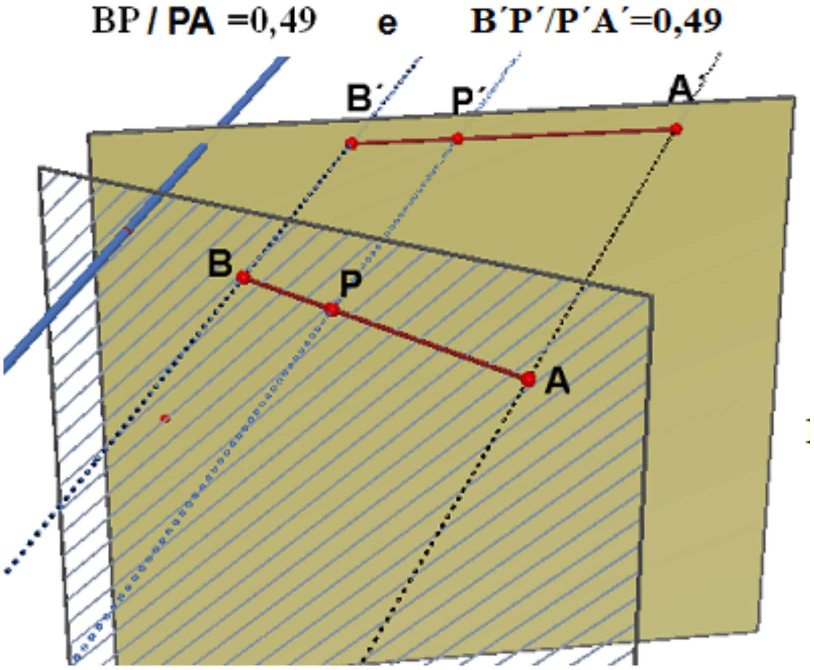
O baricentro é conservado, isto é, se G é o baricentro dos n pontos dados no primeiro plano então a sua projeção G´, imagem de G no segundo plano, será o baricentro das imagens dos n pontos dados.



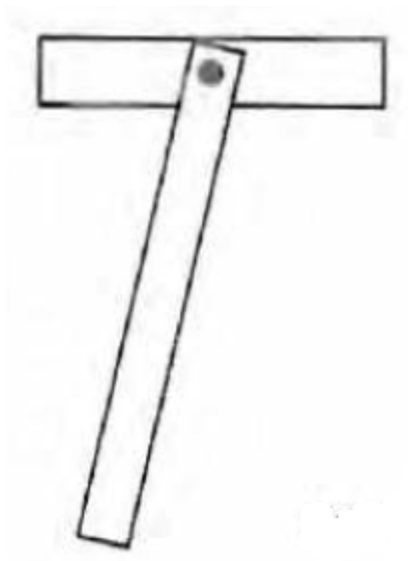
A razão entre as áreas é preservada, isto é, se A e B são as áreas de duas figuras do primeiro plano e A´e B´ as áreas das figuras no segundo plano que são imagens das figuras do primeiro plano então $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$ ou de maneira equivalente $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \mathrm{k}$



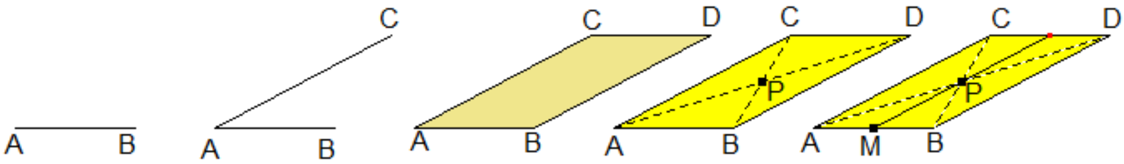
A razão entre dois segmentos contidos numa mesma reta ou em retas paralelas é igual à razão entre as imagens dos segmentos. Essa é a propriedade fundamental da geometria afim.



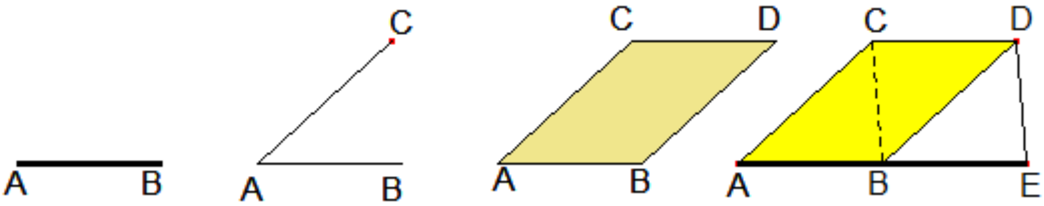
O instrumento usado na geometria afim, nas construções, é uma régua T composta de uma régua que se desloca na borda da folha e de uma segunda régua não graduada que gira em torno de um ponto da primeira régua. Uma outra possibilidade para a construção de figuras é usar régua não graduada e um esquadro para o traçado de retas paralelas.



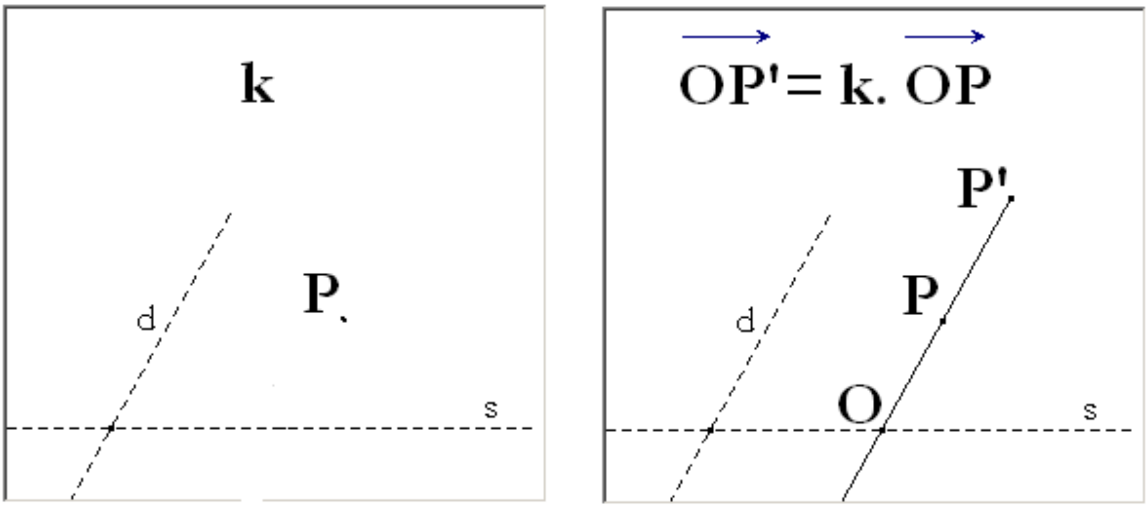
Como exemplo de um problema na geometria afim é a construção do ponto médio de um segmento AB. Constrói-se inicialmente um paralelogramo ABCD, em seguida as suas diagonais e finalmente
pelo ponto de intersecção traça-se uma reta paralela a um dos lados do paralelogramo.



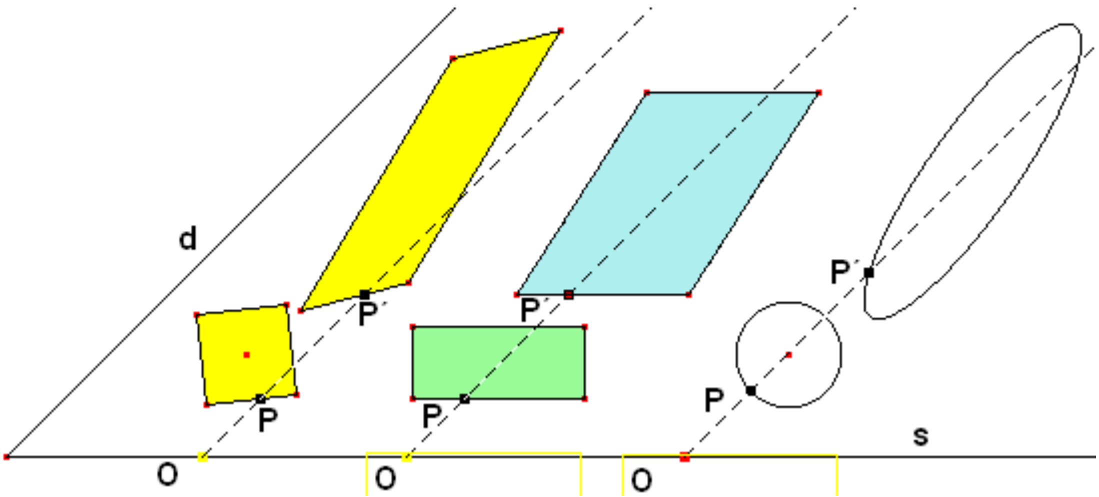
Um outro exemplo é a duplicação de um segmento AB. Constrói-se um paralelogramo ABCD como na figura abaixo, em seguida traça-se o segmento CB e pelo ponto D traçar uma paralela a BC. Os lados AB e CD do paralelogramo ABCD serão iguais e os lados CD e BE do paralelogramo BEDC serão iguais. Logo AB=BE



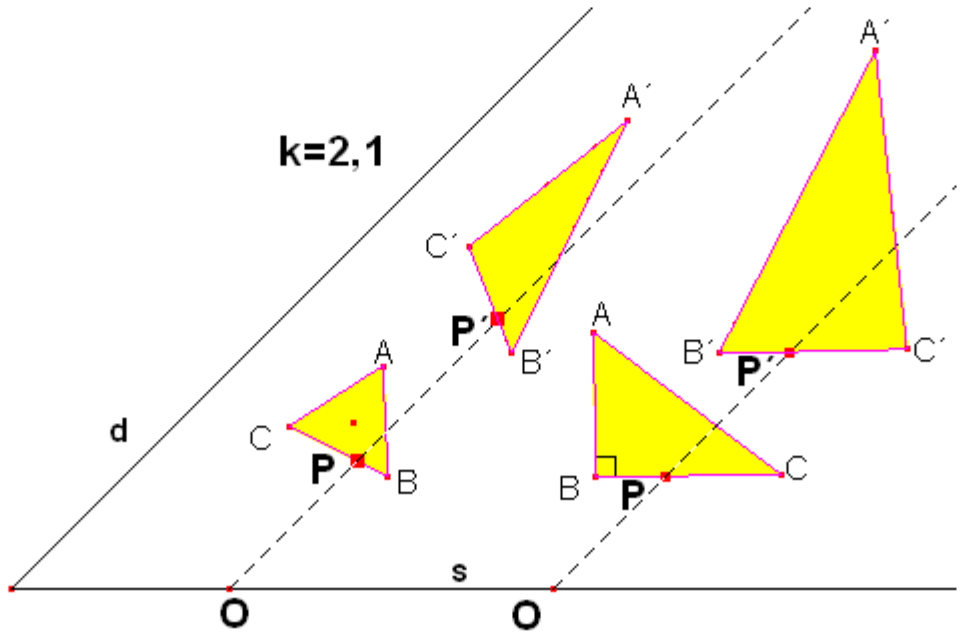
A transformação geométrica associada à geometria afim é denominada afinidade e é definida da seguinte maneira. Consideram-se duas retas s e d concorrentes num plano e uma razão k. Por ponto P do plano traça-se uma reta paralela à reta d que intersecta a reta s no ponto O. Chama-se afinidade de razão k, eixo s e direção d a uma transformação do plano em si mesmo que leva o ponto P no ponto P´ tal que $\overrightarrow{OP'}$=k.$\overrightarrow{OP}$.



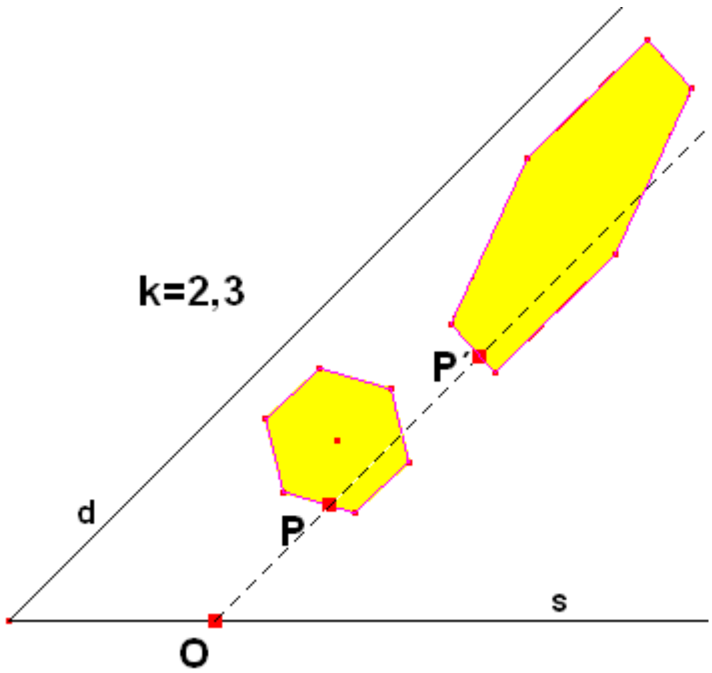
Na figura abaixo temos um quadrado sendo transformado num paralelogramo por uma afinidade. A noção de paralelogramo é afim pois as igualdades dos lados opostos congruentes contidos em retas paralelas são transportadas nas suas respectivas imagens. Um quadrado e um retângulo são transformados por uma afinidade num paralelogramo pois o paralelismo é um invariante e uma circunferência é transformada numa elipse.



A igualdade dos dois segmentos contidos em retas não paralelas não é transportada na imagem   Ser um triângulo isósceles, por exemplo, não é uma propriedade afim. A imagem de um triângulo equilátero ABC não é um triângulo equilátero. Os ângulos não são transportados por uma afinidade. Um triângulo retângulo ABC não é transformado num triângulo retângulo pois a afinidade não preserva os ângulos.



Um hexágono regular é transformado por uma afinidade em um hexágono não regular mas os três pares de lados paralelos continuam paralelos pois a afinidade conserva o paralelismo.



O teorema de Tales é o invariante fundamental na geometria afim, pois a razão entre segmentos contidos numa mesma reta é transportada para a razão entre as suas imagens.

Geometria afim de um ponto de vista algébrico

Além do ponto de vista geométrico tratado acima, a geometria afim pode também ser definida de um ponto de vista algébrico.

A folha de papel (infinita) onde traçamos pontos, retas e desenhamos figuras pode ser modelada por uma estrutura matemática abstrata chamada plano afim. Nessa estrutura, idealizada para capturar o que a nossa experiência física e sensorial experimenta como plano, os teoremas de geometria vistos no ensino básico podem ser demonstrados rigorosamente.

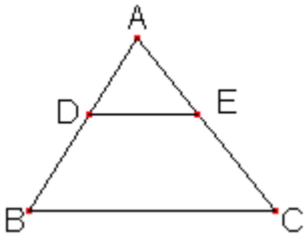
Chama-se plano afim a um conjunto E de elementos, chamados pontos, tal que a todo par de pontos (A,B) corresponde um vetor $\vec{u}$ de um espaço vetorial V sobre o corpo dos números reais que possui as seguintes propriedades:

i) Dados um ponto A qualquer em E e um vetor qualquer $\vec{u}$ em V existe um único ponto B em E tal que A+$\vec{u} = B$

ii) Para todo A,B e C em E é válida a relação $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ =$\overrightarrow{AC}$, isso equivale a dizer que, qualquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em V temos A+($\vec{u}$ +$\vec{v}$)=(A+$\vec{u}$)+ $\vec{v}$.

O ponto A+$\vec{u}$ é denominado soma do ponto A com o vetor $\vec{u}$. O único vetor $\vec{u}$ tal que A+$\vec{u}$ =B é denominado diferença dos pontos B e A e será indicado por B-A. Em seguida, definimos em E várias noções de geometria elementar. Assim por exemplo, uma reta definida por dois pontos distintos A e B é o conjunto de todos os pontos X de E tais que X=A+α. $\overrightarrow{AB}$ com α∈R. Uma semirreta de origem A e passando por B é o conjunto de todos os pontos X de E tais que X = A+α. $\overrightarrow{AB}$ onde α∈R e α≥0. Um segmento de origem A e extremidade B é a intersecção das semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ .O ponto médio M do segmento AB é definido por M=A+ $\frac{1}{2}$. $\overrightarrow{AB}$. Um plano afim definido por três pontos não alinhados A,B e C é o conjunto dos pontos X tais que X=α. $\overrightarrow{AB} + \beta . \overrightarrow{AC}$ onde α e β são números reais. Todas as propriedades deduzidas a partir dos axiomas de um espaço vetorial (soma de vetores e multiplicação de um real por um vetor) são afins.

Vamos demonstrar o **teorema de Tales (na sua forma reduzida) como um exemplo de uma propriedade afim.**



Hipótese: DE//BC   Tese: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$

Demonstração: Como A, D e B são alinhados então $\overrightarrow{AB} = \alpha.\overrightarrow{AD}$

Como A, E, C são alinhados então $\overrightarrow{AC} = \beta.\overrightarrow{AE}$

Na geometria afim vale a relação $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Logo $\alpha.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \beta.\overrightarrow{AE}$.

Como BC//DE então $\overrightarrow{BC} = \gamma.\overrightarrow{DE}$. Donde $\alpha.\overrightarrow{AD} + \gamma.\overrightarrow{DE} = \beta.\overrightarrow{AE}$. (1)

Mas $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$. Substituindo $\overrightarrow{DE}$ por $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ em (1) teremos:

$\alpha.\overrightarrow{AD} + \gamma.(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}) = \beta.\overrightarrow{AE}$. Portanto $(\alpha - \gamma).\overrightarrow{AD} + (\gamma - \beta).\overrightarrow{AE} = \vec{0}$

Como $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ são linearmente independentes então $\alpha - \gamma = 0$ e $\gamma - \beta = 0$. Donde se conclui que $\alpha = \beta = \gamma$. Logo $\overrightarrow{AB} = \alpha.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} = \alpha.\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{BC} = \alpha.\overrightarrow{DE}$. Segue que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$.

Demonstração do recíproco do teorema de Tales (na sua forma reduzida).

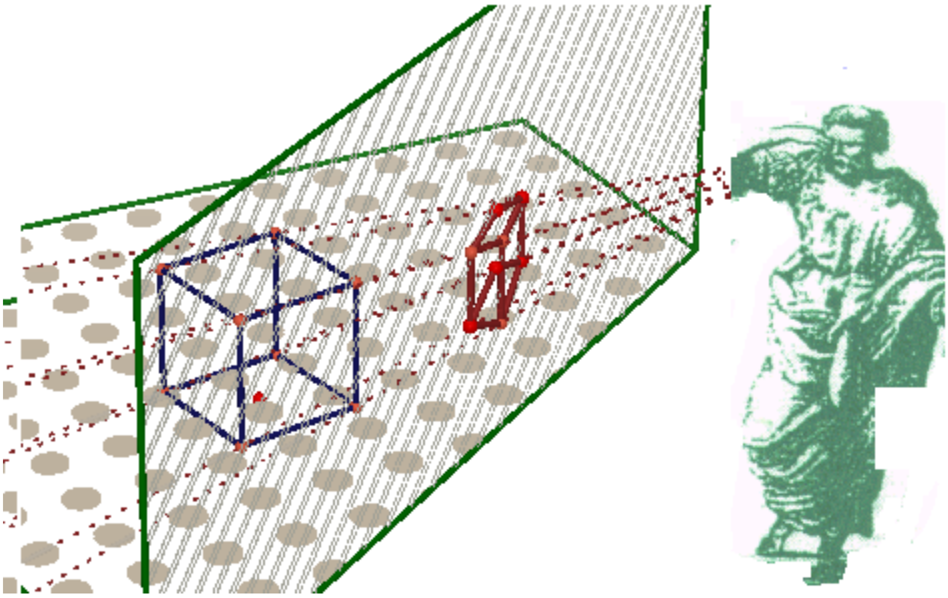
Hipótese: $\overrightarrow{AB} = \alpha.\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AC} = \alpha.\overrightarrow{AE}$ Tese: DE//BC

Demonstração: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

Logo $\alpha.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \alpha.\overrightarrow{AE}$. Portanto $\overrightarrow{BC} = \alpha(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \alpha.\overrightarrow{DE}$. Logo BC//DE

Geometria projetiva

Uma das primeiras rupturas com a obra de Euclides surgiu no Renascimento a partir de uma nova representação do espaço nas artes. A geometria euclidiana não conseguia atender à necessidade de representar a profundidade nos quadros. Em 1435 na obra do pintor Alberti, encontramos pela primeira vez a explicitação de um novo procedimento para representar os objetos do espaço. "*quando devo pintar eis como procedo: desenho um retângulo tão grande quanto eu queiro e o considero como sendo uma janela aberta no qual olho aquilo que será pintado nesse quadro*".

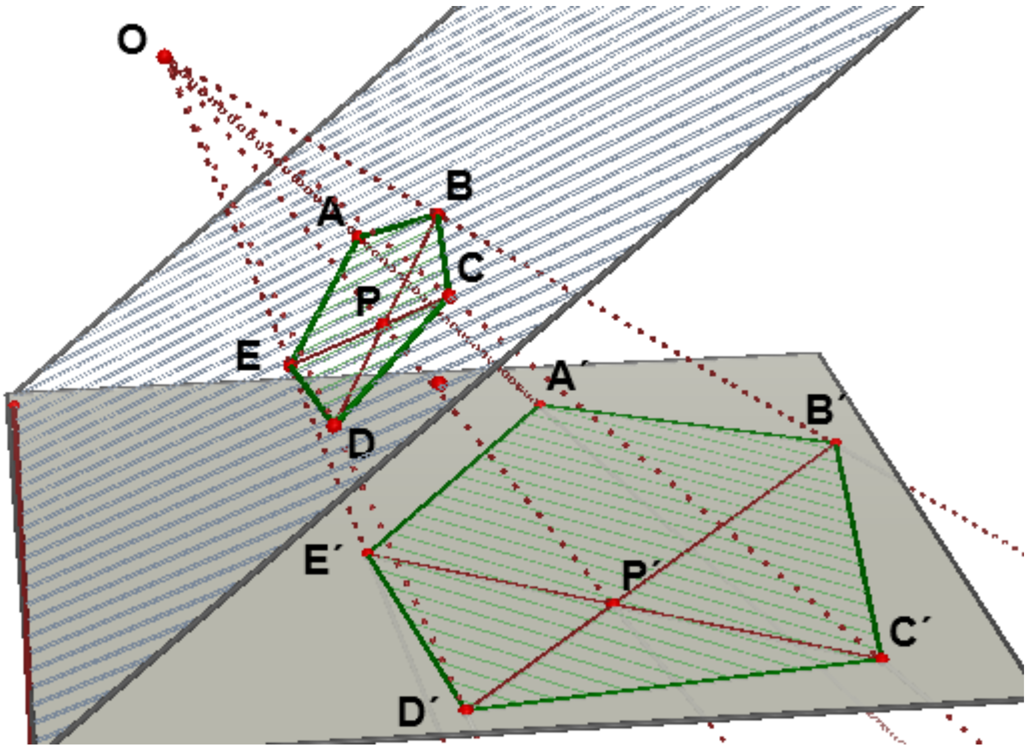


O desenho representado na janela é denominado a perspectiva do objeto. Essa foi a primeira sistematização do conceito de perspectiva. Com o passar do tempo as noções intuitivas de perspectiva se tornaram o ponto de partida para uma nova geometria chamada geometria projetiva. Ela surgiu no século XVII com Desargues ao procurar generalizar as regras da perspectiva utilizadas pelos artistas. Em 1639 ele publica uma obra intitulada “Brouillon projet” onde faz uma síntese entre as cônicas de Apolônio e a pespectiva central. A geometria projetiva nasce da conjunção dessas duas teorias. A ideia principal dessa obra é considerar as cônicas como perspectiva de uma circunferência. Enquanto Apolônio estuda cada curva isoladamente, Desargues inova estudando as três curvas simultaneamente. Nesse caso é necessário postular que as retas paralelas se intersectam no infinito. Nasce o ponto do infinito e consequentemente a reta do infinito. As ideias de Desargues foram continuadas por Pascal, Philippe de la Hire e Poivre. Mas logo foram eclipsadas pela geometria de Descartes. Foi somente em 1822 que Poncelet (1788-1867) redescobre e retoma as ideias de Desargues e complementa o estudo da geometria projetiva.

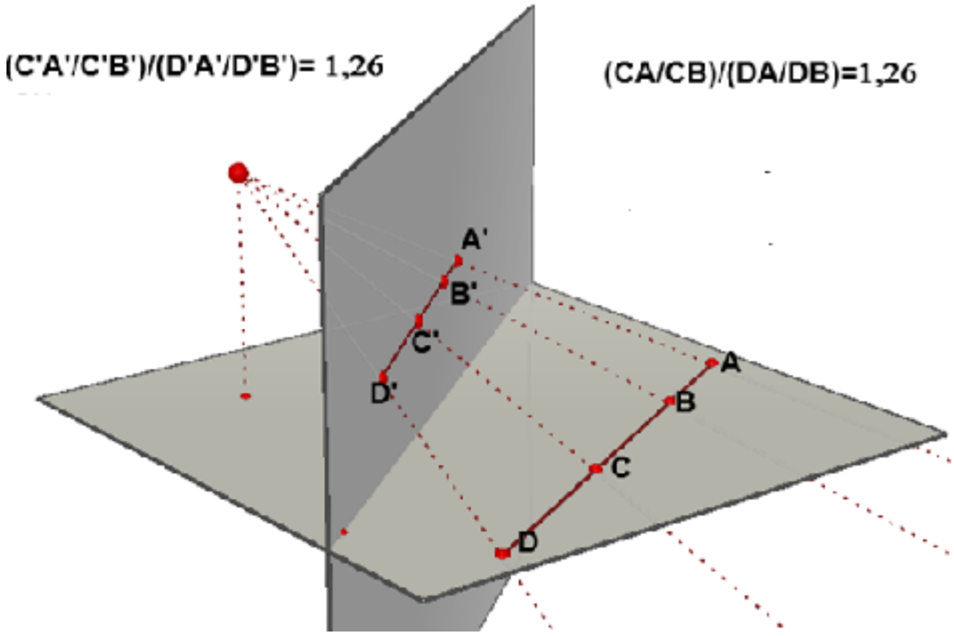
Os invariantes da geometria projetiva

Consideremos dois planos não paralelos. Desenhamos uma figura no primeiro plano e a projetamos no outro plano **por meio de** um feixe de retas incidentes num ponto O. A geometria projetiva se preocupa em estudar as propriedades da figura desenhada no primeiro plano que não se alteram quando a figura é projetada no segundo plano.

Quais são as propriedades que se conservam?



A incidência é conservada, ou seja, se um ponto pertence a uma reta, a sua imagem pertencerá à imagem da reta.
A colinearidade é conservada, ou seja, se três pontos B, P e D são alinhados então as suas imagens B´, P´ e D´ serão alinhadas.
A ordem de pontos é preservada, ou seja, se o ponto P está entre os pontos B e D então a imagem P´ de P estará entre as imagens dos pontos D´ e B´.
A concorrência entre retas é preservada, isto é se duas retas incidem num ponto P então as imagens das retas incidirão no ponto P´ que é imagem do ponto P.
A razão dupla é conservada. A razão dupla (ou razão cruzada ou razão anarmônica) de quatro pontos alinhados A,B,C,D e se indica por (ABCD) é o quociente $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$. Isto significa que se tivermos quatro pontos alinhados no plano e suas imagens A´, B´ , C´ e D´ no outro plano então a razão dupla se mantém.



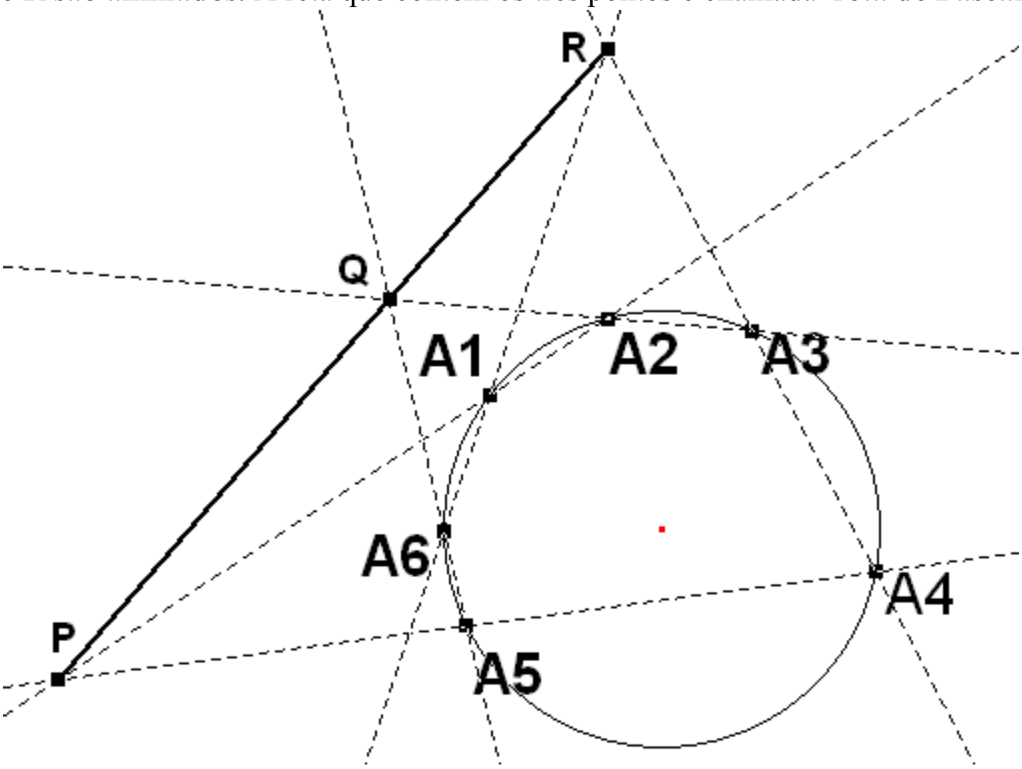
O quadro abaixo mostra que todos os resultados da geometria projetiva são válidos nas geometrias afim e euclidiana. Da mesma forma, todos os resultados da geometria afim são válidos na geometria euclidiana.

Alguns Invariantes da geometria projetiva Incidência, ordem, colinearidade, concorrência e razão dupla
Alguns invariantes da geometria afim Incidência, ordem, colinearidade, concorrência e razão dupla + Paralelismo, ponto médio, baricentro, razão entre segmentos numa reta, razão entre áreas
Alguns invariantes da geometria euclidiana Incidência, ordem, colinearidade, concorrência e razão dupla + Paralelismo, ponto médio, baricentro, razão entre segmentos numa reta, razão entre áreas + Comprimentos, ângulos e áreas

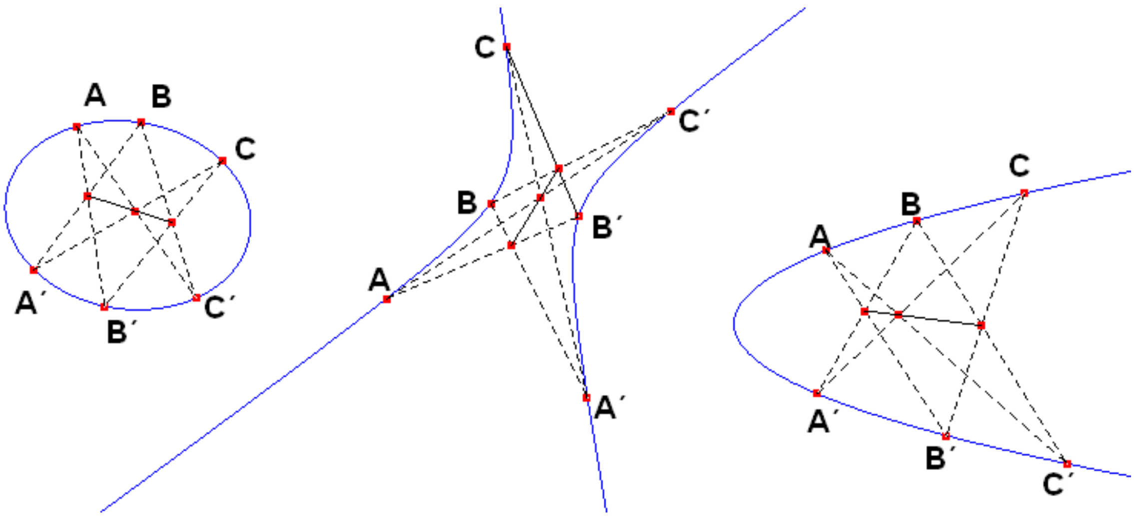
O teorema de Pitágoras não tem sentido na geometria afim, ele é um resultado da geometria euclidiana. Os teoremas de Tales, Menelaus e Ceva são resultados da geometria afim. Problemas associados a alturas e bissetrizes de um triângulo são problemas euclidianos ao passo que aqueles associados a medianas de um triângulo são problemas afins. O teorema de Pappus que emprega somente as noções de concorrência e de alinhamento é um teorema projetivo. Cada teorema possui um habitat privilegiado que corresponde ao quadro mais geral no qual ele se enuncia com a maior generalidade e quase sempre se demonstra com mais facilidade. O teorema de Pascal sobre o hexágono inscrito se enuncia numa circunferência e não é difícil demonstrá-lo utilizando o teorema do ângulo inscrito. Nesse caso ele aparece como um teorema euclidiano.

Teorema de Pascal

Sejam $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ seis pontos de uma circunferência.
Se $A_1A_2 \cap A_4A_5 = \{P\}$, $A_2A_3 \cap A_5A_6 = \{Q\}$ e $A_3A_4 \cap A_1A_6 = \{R\}$ então os pontos P, Q e R são alinhados. A reta que contém os três pontos é chamada **reta de Pascal**.

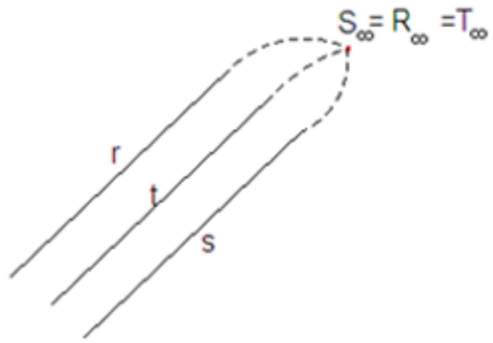


Mas esse teorema não está enunciado na sua maior generalidade. Podemos enunciá-lo para uma elipse. Nesse caso ele se torna um teorema afim. Pode-se enfim enunciá-lo para uma parábola ou uma hipérbole e se torna então um teorema projetivo. É nesse quadro que ele é mais fácil de provar. Pascal generaliza o teorema de Pappus para cônicas.

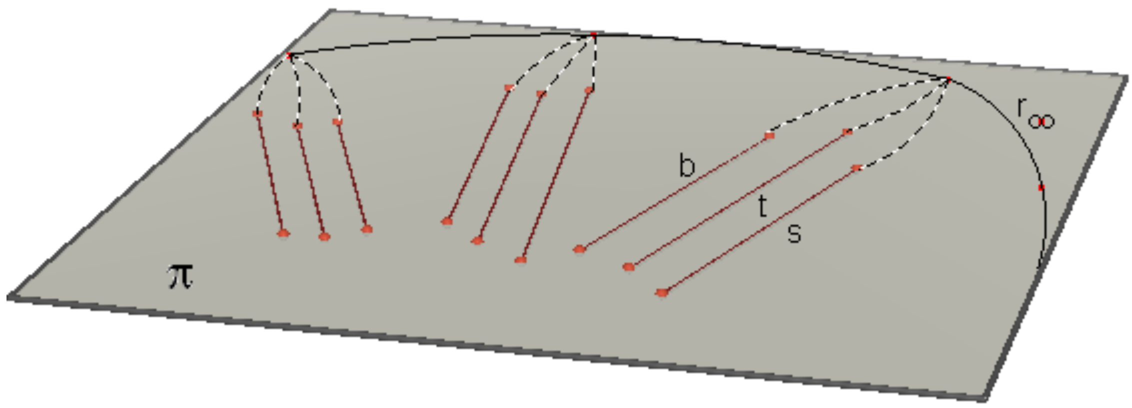


Na geometria euclidiana os trilhos de trem são paralelos. No entanto não é assim que eles se apresentam à nossa visão quando vistos de longe. É a geometria projetiva que regula a nossa visão. Uma importante inovação na geometria projetiva foi a introdução de elementos ideais denominados hoje de **pontos do infinito**, **retas do infinito** e **plano do infinito**.

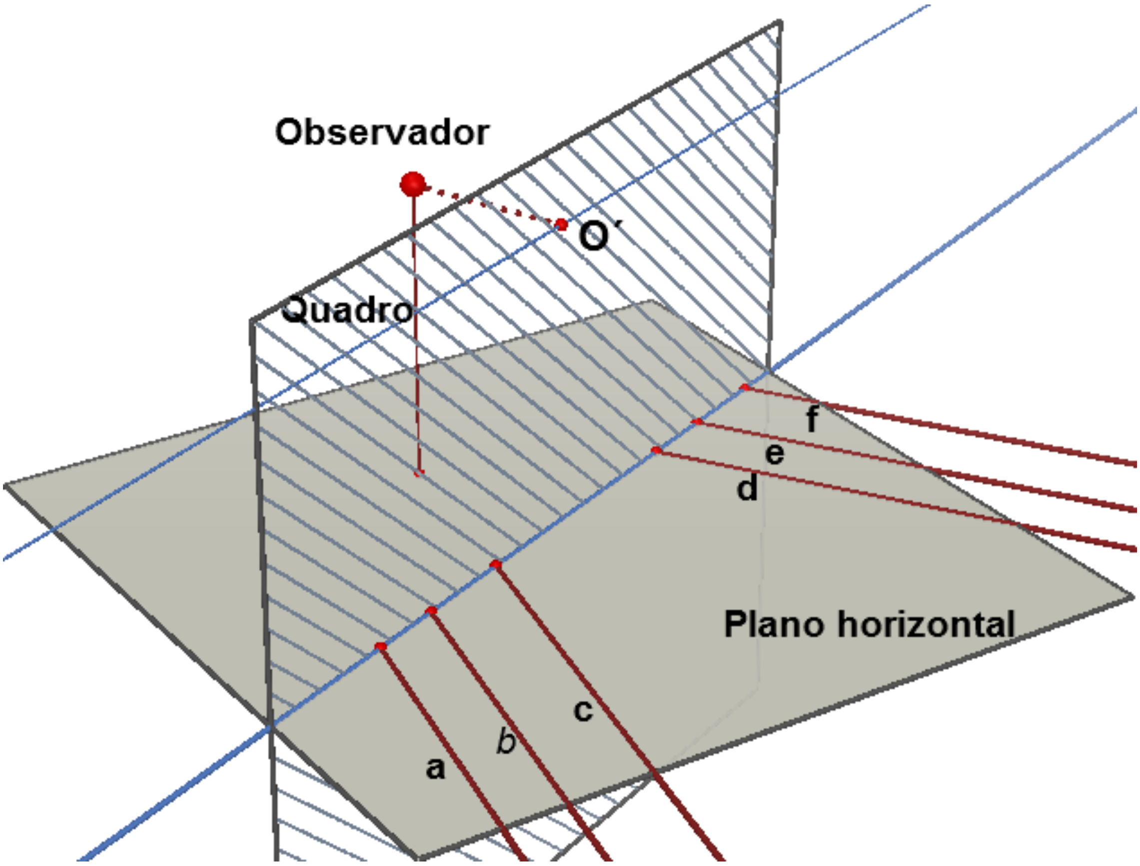
Os pontos do infinito (chamados também de pontos impróprios ou pontos ideais) são classes de equivalência de retas paralelas. Eles podem ser interpretados como as direções das retas. Num plano, a cada direção de uma reta corresponde um único ponto do infinito. Toda reta tem um único ponto do infinito. Retas paralelas entre si têm pontos do infinito coincidentes. Duas retas tendo o mesmo ponto no infinito são paralelas.



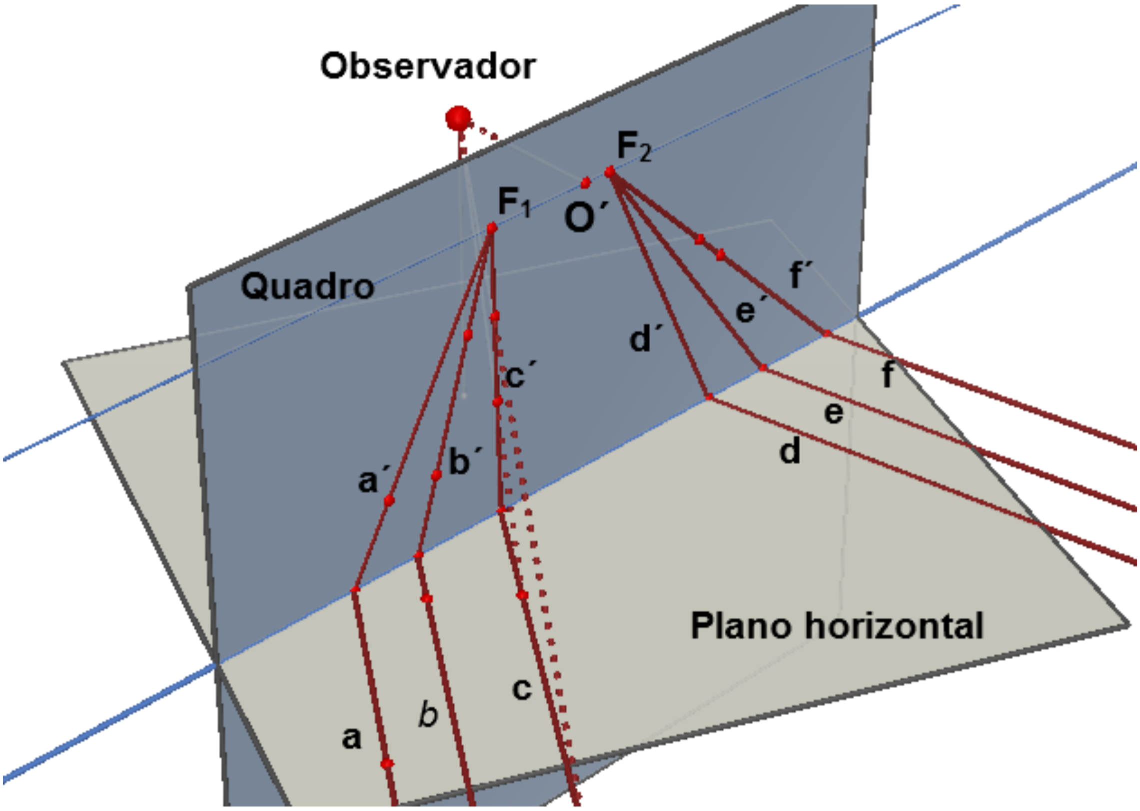
O conjunto de todos os pontos do infinito de um plano constituem **a reta do infinito** (ou também chamada de reta imprópria ou reta ideal). Em cada plano existe uma única reta do infinito. A reta do infinito é constituída exclusivamente por pontos do infinito.



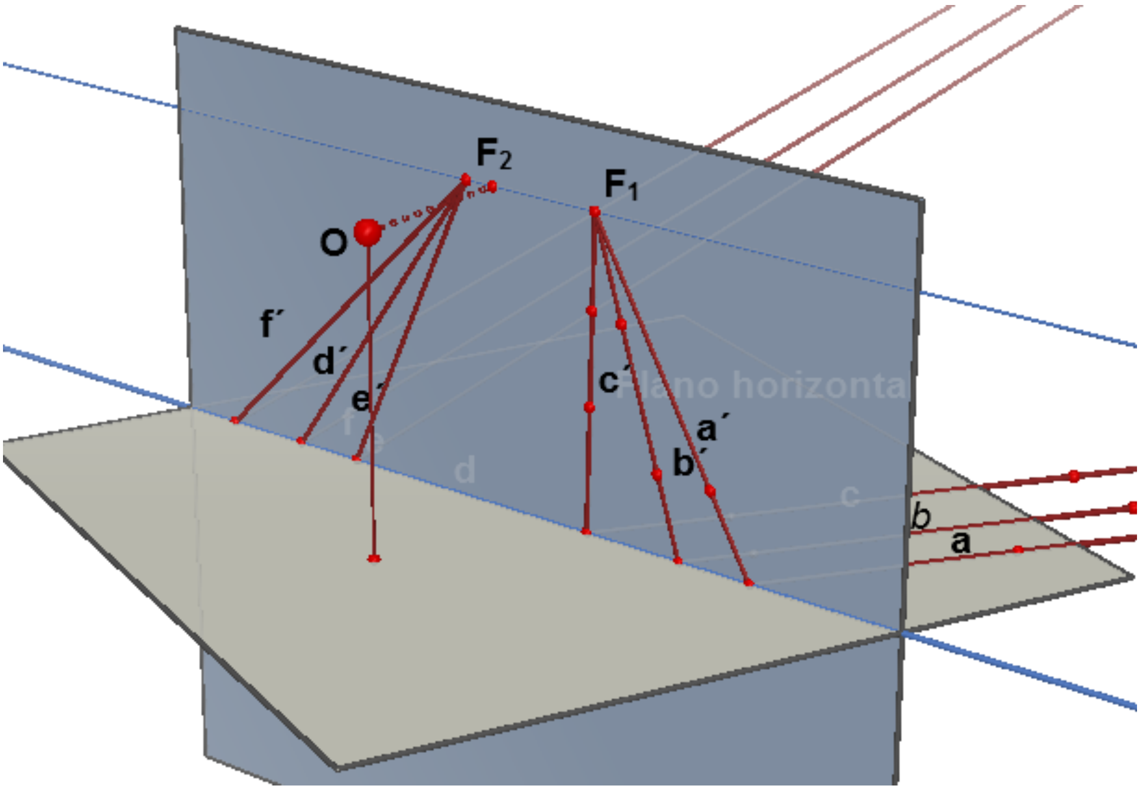
Na figura abaixo temos o olho de um observador indicado pelo ponto O. A projeção ortogonal do ponto O no plano vertical é o ponto O´. O observador se prepara para desenhar no quadro (plano vertical) as retas a,b,c,d,e,f que estão contidas no plano horizontal. As retas a,b e c sendo paralelas têm um único ponto do infinito. Da mesma forma as retas d,e,f terão um único ponto do infinito distinto do das retas a,b e c.



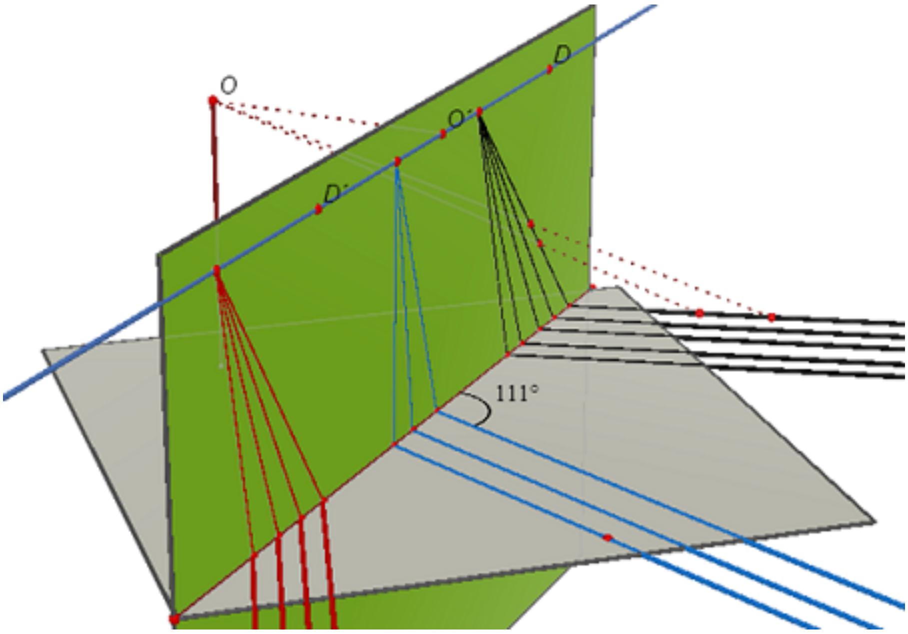
O observador olha para os feixes de retas paralelas situados no plano horizontal e as desenha no plano vertical. Elas serão concorrentes nos pontos F_1 e F_2 que são chamados pontos de fuga. Esses pontos são as imagens dos pontos do infinito das retas paralelas que estão no plano horizontal. Num desenho em perspectiva podemos visualizar pontos do infinito olhando para as suas imagens que são pontos de fuga. Todos os pontos de fuga estão numa reta chamada linha do horizonte. Podemos imaginar uma reta do infinito visualizando a sua imagem que é a linha do horizonte. A intersecção do quadro com o plano horizontal chama-se linha de terra. A linha do horizonte é uma reta do quadro paralela à linha de terra passando pela projeção ortogonal O´ do ponto O.



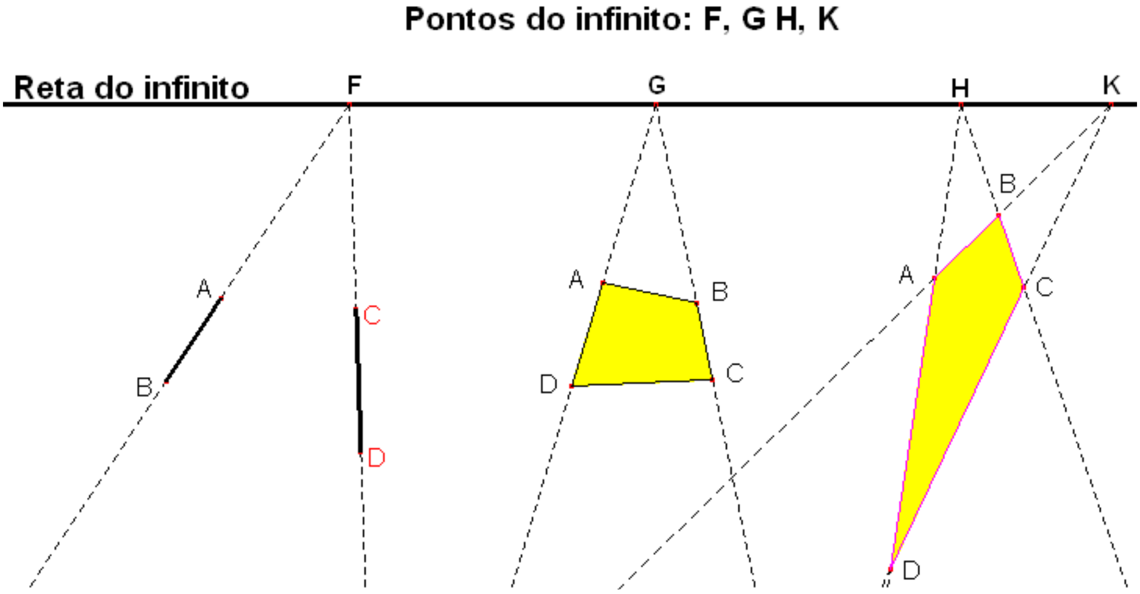
Na figura abaixo estamos olhando do lado onde o observador desenha as retas. Estamos imaginando o quadro como um vidro transparente (a janela do Alberti).



Três feixes de retas paralelas no plano horizontal sendo vistos por um observador do outro lado do plano vertical. O que estamos visualizando são apenas as imagens dos três pontos do infinito que são os três pontos de fuga situados no plano vertical e a imagem da reta do infinito que é a linha do horizonte. Na figura abaixo temos três feixes de retas paralelas no plano horizontal e as suas respectivas imagens no plano vertical bem como os seus pontos de fuga..



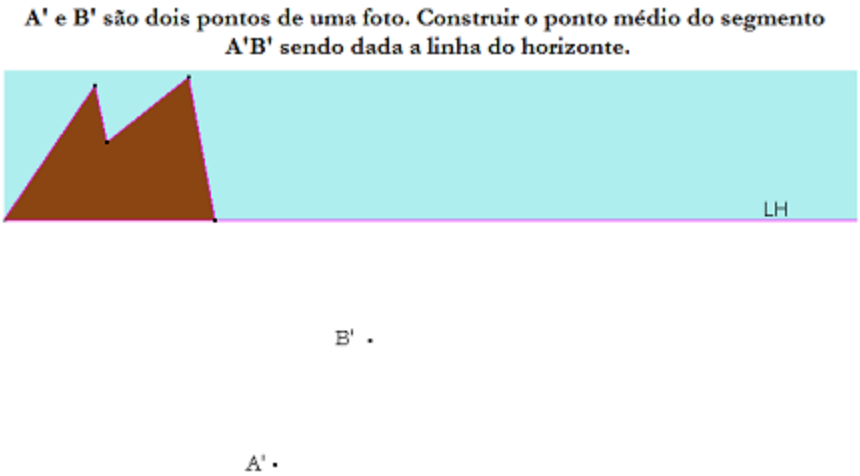
Considere a reta do infinito desenhada no plano da folha. Todos os pontos dessa reta são pontos do infinito.



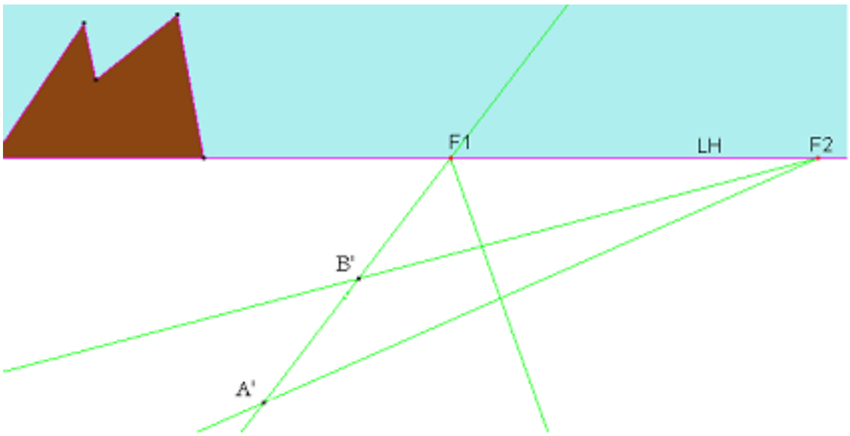
As retas AB e CD sendo paralelas, pois têm o mesmo ponto do infinito, têm como ponto do infinito o ponto F. Observe que os segmentos AB e CD estando contidos em retas paralelas são também paralelos. Observe que as retas que se encontram no ponto G também são paralelas. O quadrilátero ABCD é um trapézio pois tem dois lados paralelos. Na última figura temos um quadrilátero ABCD que é um paralelogramo pois que AB e CD são paralelos por estarem contidos nas retas paralelas que se encontram no ponto do infinito H e as retas BC e AD também são paralelas por estarem contidas em duas outras retas paralelas que se encontram no ponto do infinito K.

Enquanto a geometria euclidiana se utiliza de uma régua não graduada e de um compasso para a construção das suas figuras, a geometria projetiva se caracteriza pelo uso somente de uma régua não graduada para o traçado de figuras. Não se pode usar o compasso para transportar medidas iguais. Não há círculos, mediatrizes, bissetrizes, triângulos isósceles e ângulos retos.

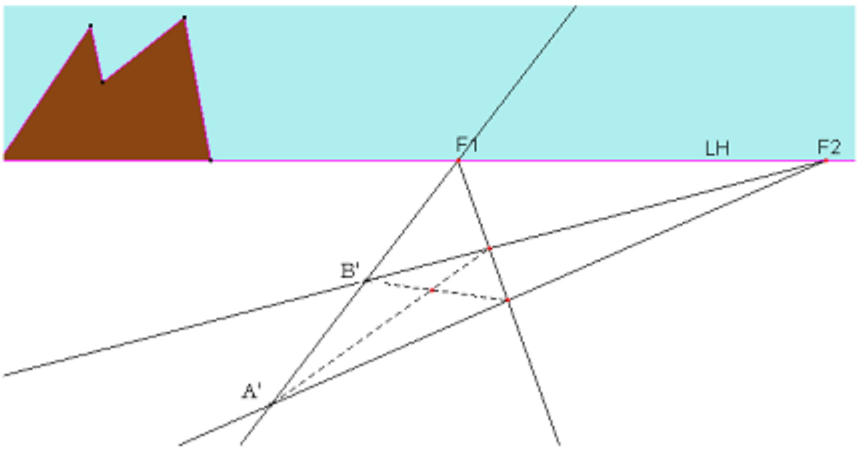
Como exemplo, vamos construir o ponto médio de um segmento AB que se encontra no plano horizontal e a sua projeção A´B´ é desenhada no plano vertical. A linha do horizonte é a reta do infinito



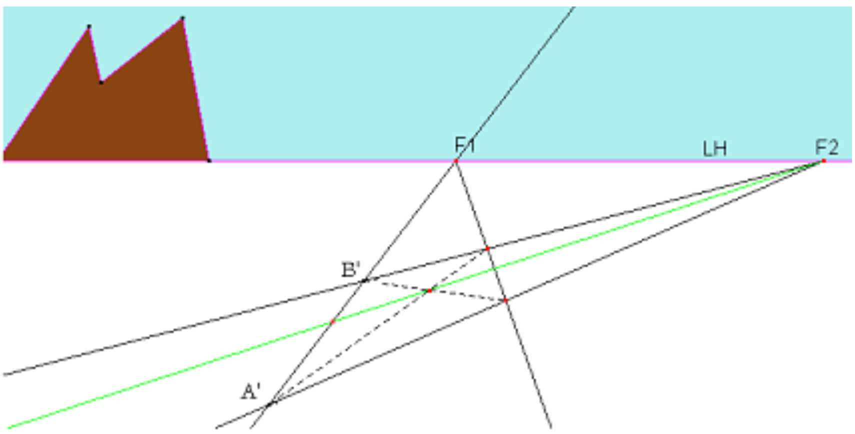
Escolhemos dois pontos F_1 e F_2 da reta do infinito e a partir delas traçamos um paralelogramo.



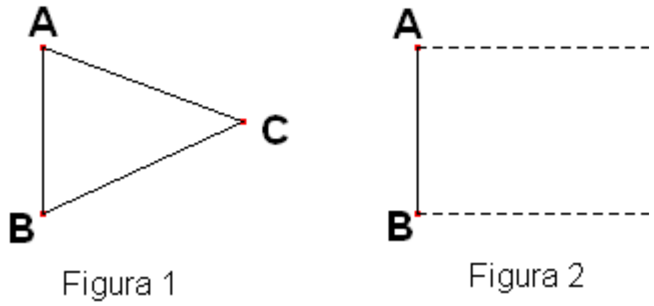
A intersecção de retas é uma propriedade projetiva. As diagonais do paralelogramo se intersectam num ponto.



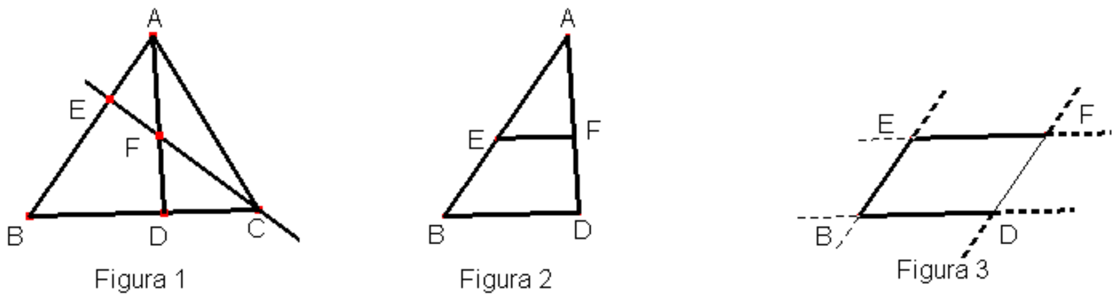
Pelo ponto de intersecção traçamos uma reta paralela ao lado A´B´, isto significa dizer que as três retas devem incidir no mesmo ponto do infinito F_2.



Na figura 1 temos um triângulo ABC. A figura 2 é a representação do triângulo ABC quando o ponto C é enviado ao infinito e se torna um ponto do infinito.

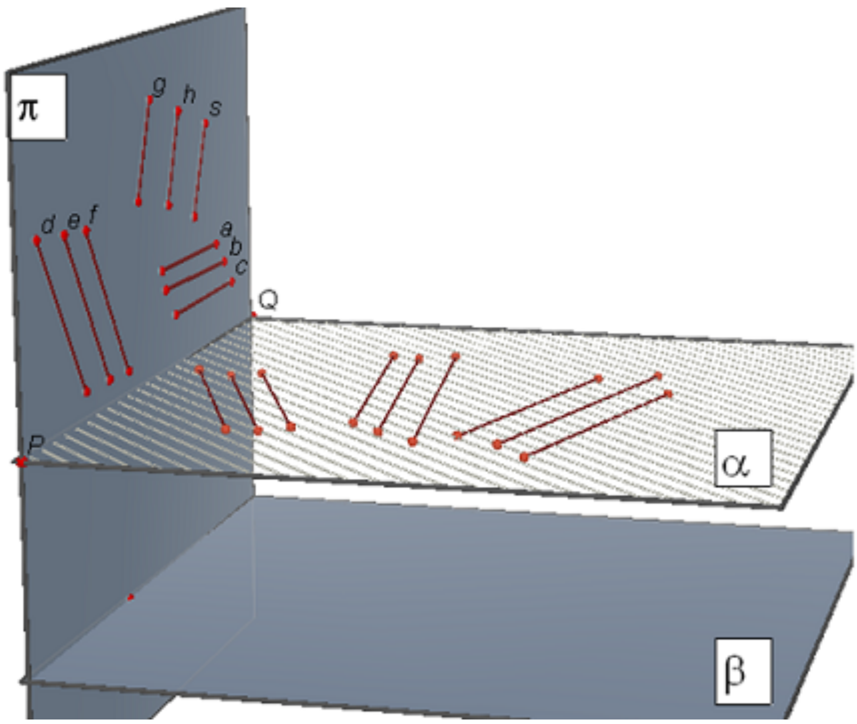


A figura 1 abaixo é constituída de um triângulo ABC e de duas retas AD e CE que se intersectam no ponto F. A figura 2 representa a figura 1 com o ponto C no infinito. A figura 3 representa a figura 1 com a reta AC do infinito..



Em 1822, Poncelet definiu rigorosamente o conceito de reta projetiva e de plano projetivo Ele chama de reta projetiva **à reta própria com o seu ponto impróprio**, ou seja, a reta projetiva de uma reta própria é o conjunto $s \cup \{ S_\infty\}$ onde S_∞ é o ponto impróprio da reta s. Chama-se plano projetivo **ao plano próprio com a sua reta imprópria**, ou seja, o plano projetivo de um plano próprio π é o conjunto $\pi \cup r_\infty$ onde r_∞ é a reta imprópria do plano π

Cada plano tem uma única reta imprópria. Mas planos paralelos têm a mesma reta imprópria. O conjunto de todas as retas impróprias determina o **plano do infinito** (chamado também de plano impróprio).



Na figura acima, os planos α e β são paralelos e têm a mesma reta do infinito. As retas d,e,f do plano π tem um ponto do infinito que não pertence à reta do infinito do plano α. O ponto do infinito da reta PQ pertence aos planos α e π e também ao plano β. Portanto os planos α, β e π têm um ponto em comum que é o ponto impróprio da reta PQ.

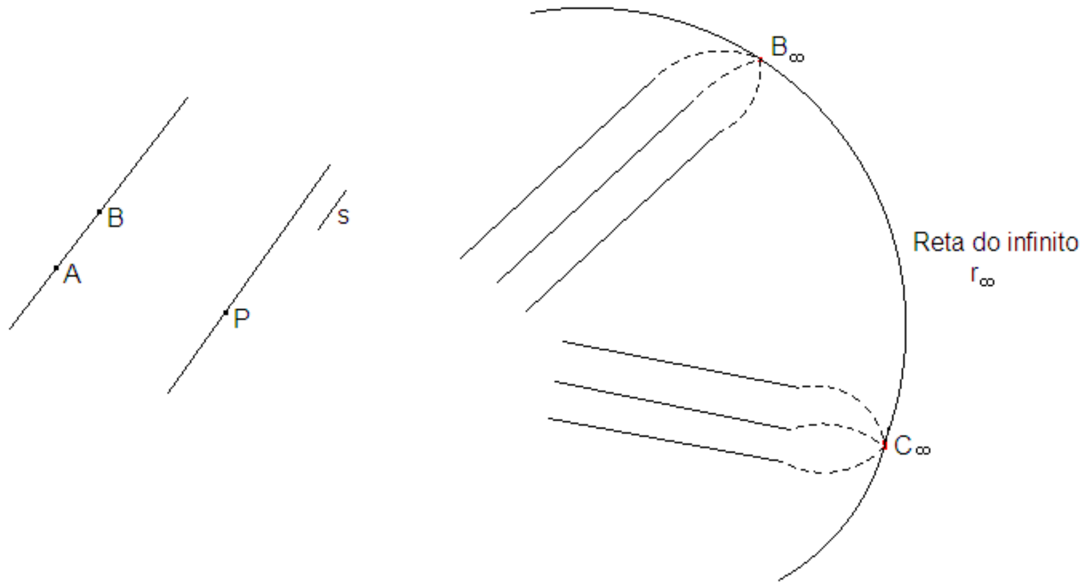
No plano projetivo **por dois pontos distintos passa uma única reta**.

Podemos ter 3 casos.

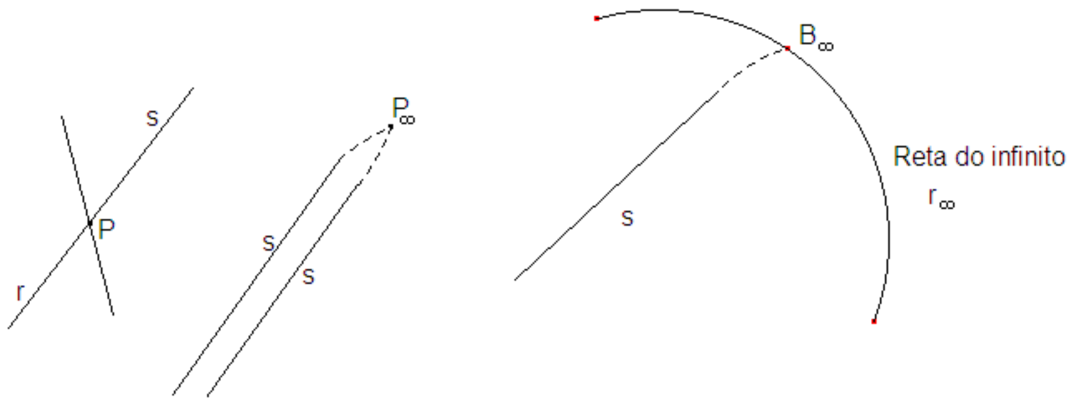
Primeiro caso: dois pontos próprios

Segundo caso: um ponto próprio e um ponto impróprio

Terceiro caso: dois pontos impróprios



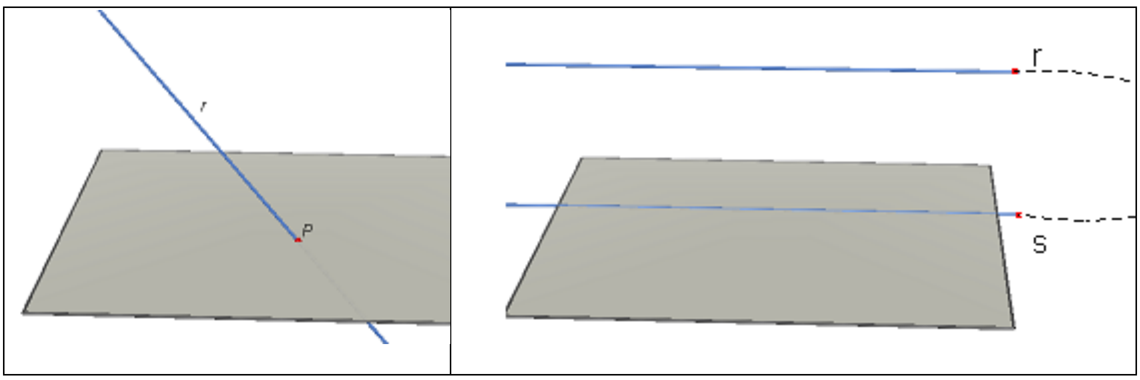
No plano projetivo, **duas retas distintas coplanares têm um único ponto comum**. Primeiro caso: duas retas próprias concorrentes num ponto próprio. Segundo caso: duas retas paralelas próprias que se encontram num ponto impróprio. Terceiro caso: uma reta própria e uma reta do infinito.



No espaço projetivo, um plano e uma reta não contida nele são sempre secantes.

Primeiro caso: a reta é secante ao plano.

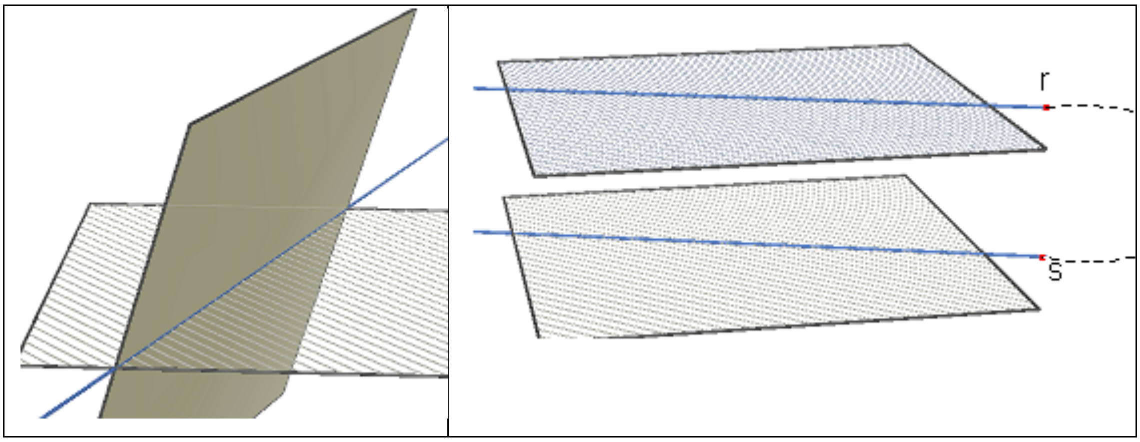
Segundo caso: a reta é paralela ao plano



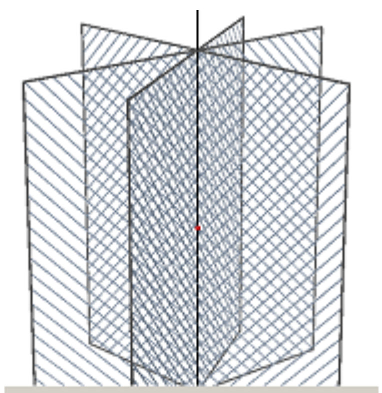
No espaço projetivo, dois planos distintos são sempre secantes.

Primeiro caso: os planos são secantes.

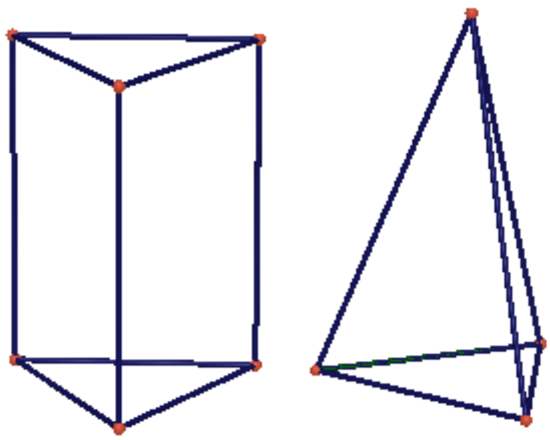
Segundo caso: os planos são paralelos. Cada direção de retas paralelas determina um ponto do infinito. Como são infinitas as direções teremos infinitos pontos do infinito que constituem a reta do infinito



No espaço projetivo, se três planos que não contém a mesma reta, se intersectam segundo três retas distintas então existe um e um só ponto que pertence aos 3 planos.

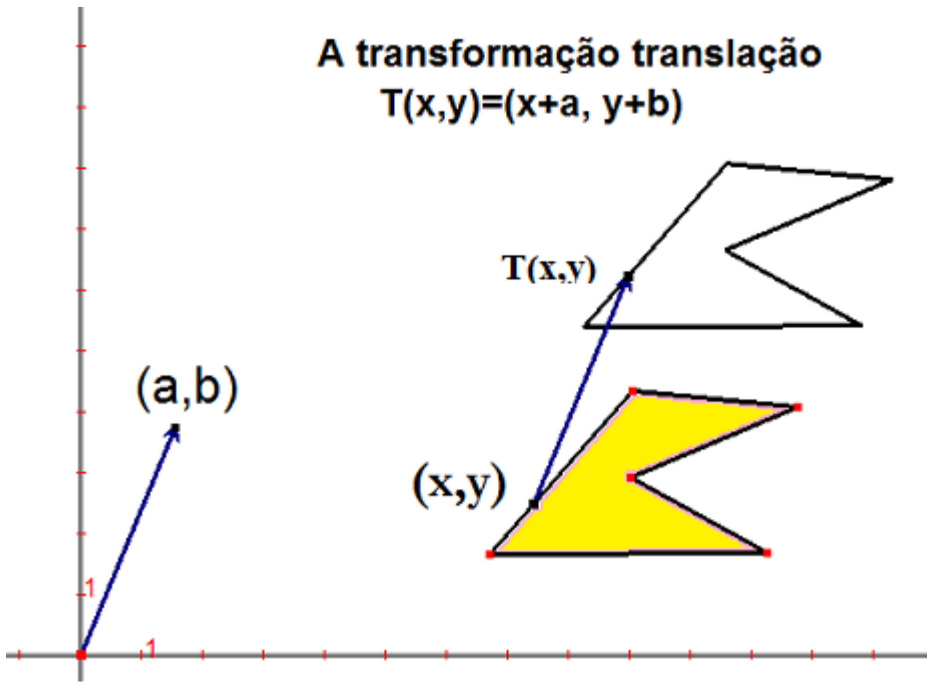


Planos que contém uma reta em comum

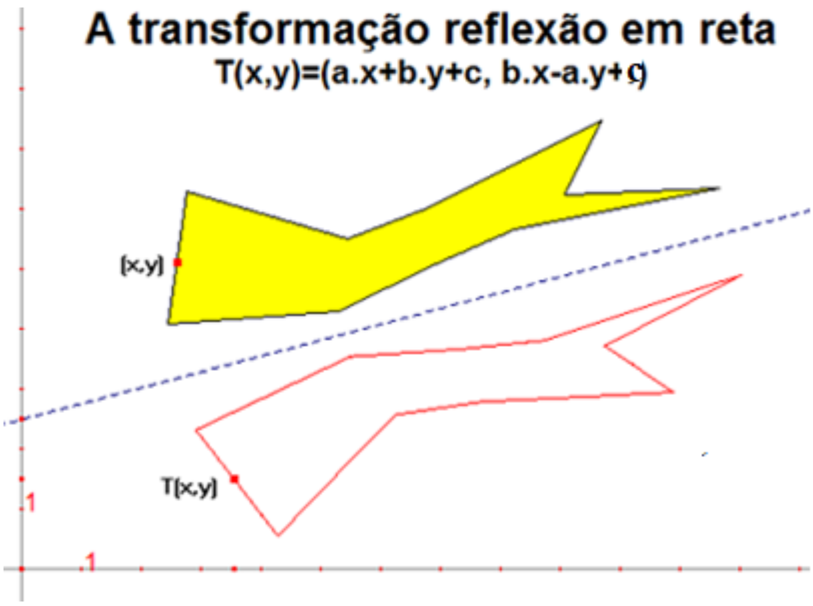


Planos que não contém uma reta em comum

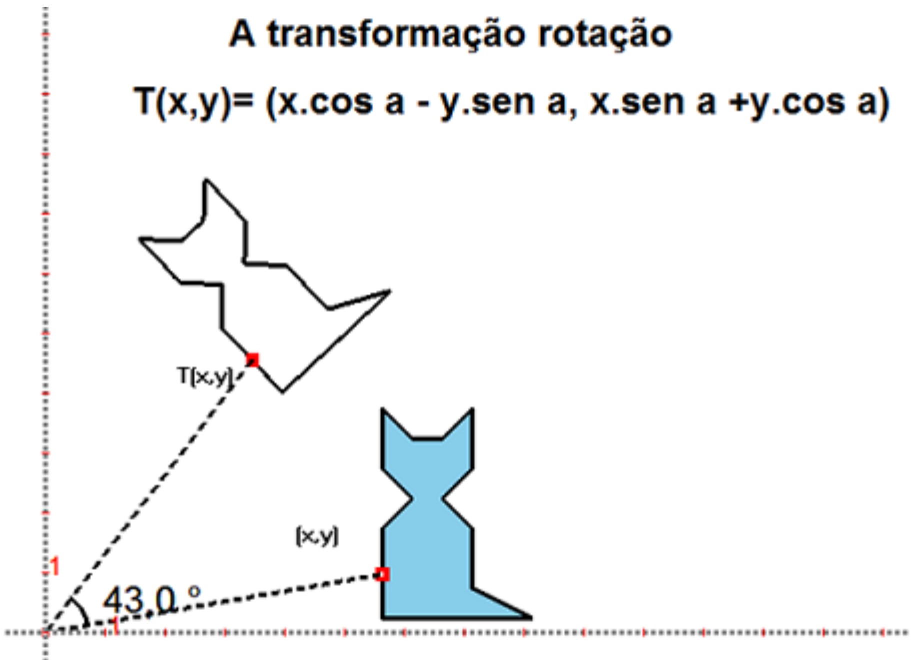
Em 1872 Félix Klein apresentou um trabalho intitulado "Considerações comparativas sobre recentes investigações geométricas" que ficou conhecido como Programa de Erlangen. Nesse trabalho, Klein relaciona a geometria euclidiana, a geometria projetiva e as geometrias não euclidianas a partir das transformações geométricas e por meio da teoria dos grupos. Para caracterizar essas geometrias Klein adota um ponto de vista algébrico. No seu livro de geometria “Matemática elementar sob um ponto de vista superior”, publicado em 1908, Klein amplia essas ideias e apresenta fórmulas para as transformações geométricas no plano e no espaço. Ele caracteriza as geometrias adotando um ponto de vista analítico. Apresentamos algumas de suas transformações no plano. A transformação geométrica translação é definida pela fórmula T(x,y)=(x+a,y+b). Isto significa que qualquer ponto (x,y) de uma figura é deslocado segundo o vetor (a,b). Observa-se que essa transformação leva uma figura num outra congruente à primeira e os elementos invariantes segundo essa transformação são as distâncias e as medidas dos ângulos, ou seja, quando se translada uma figura, a distância entre dois pontos da primeira figura e os correspondentes da segunda figura permanecem iguais.



A transformação geométrica "reflexão segundo uma reta" é definida ,pela fórmula T(x,y) = (a.x+b.y+c, b.x-a.y+c). Essa transformação leva uma figura num outra congruente à primeira. Os elementos invariantes são também as distâncias e as medidas dos ângulos.

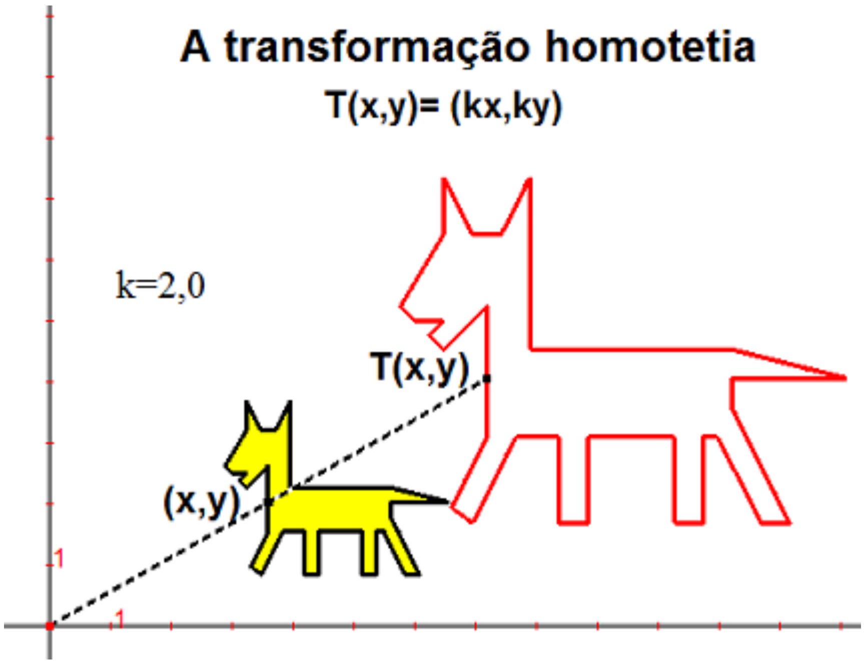


A transformação geométrica "rotação" em torno da origem e segundo um ângulo de medida a é definida pela fórmula T(x,y)=(x.cosa-y.sena,x.sena+y.cosa) e leva uma figura num outra congruente à primeira. Os elementos invariantes continuam sendo as distâncias e as medidas dos ângulos.

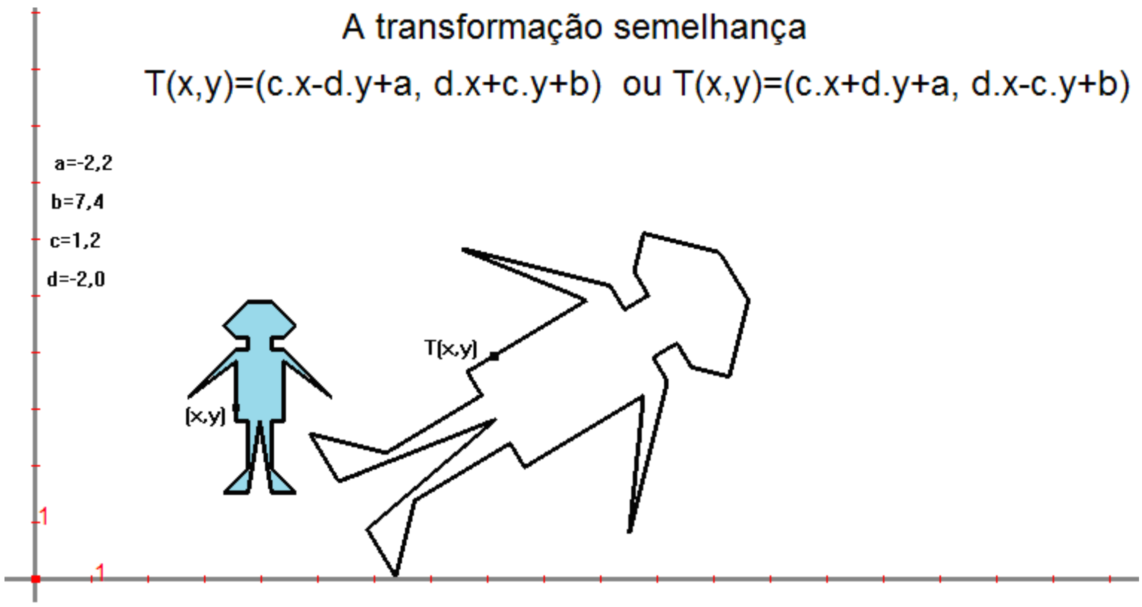


As rotações, as translações, as reflexões em retas e as suas composições formam um conjunto de transformações geométricas denominado **isometrias**. Tais transformações geométricas estão associadas à congruência de figuras.

A transformação geométrica homotetia é definida pela fórmula T(x,y)=(kx,ky) e é associada a ampliação e redução de figuras. Essa transformação leva uma figura num outra semelhante à primeira e os seus elementos invariantes são os ângulos e as razões entre dois segmentos correspondentes. Além disso os segmentos correspondentes são paralelos entre si e os pontos correspondentes incidem num ponto chamado centro da homotetia.

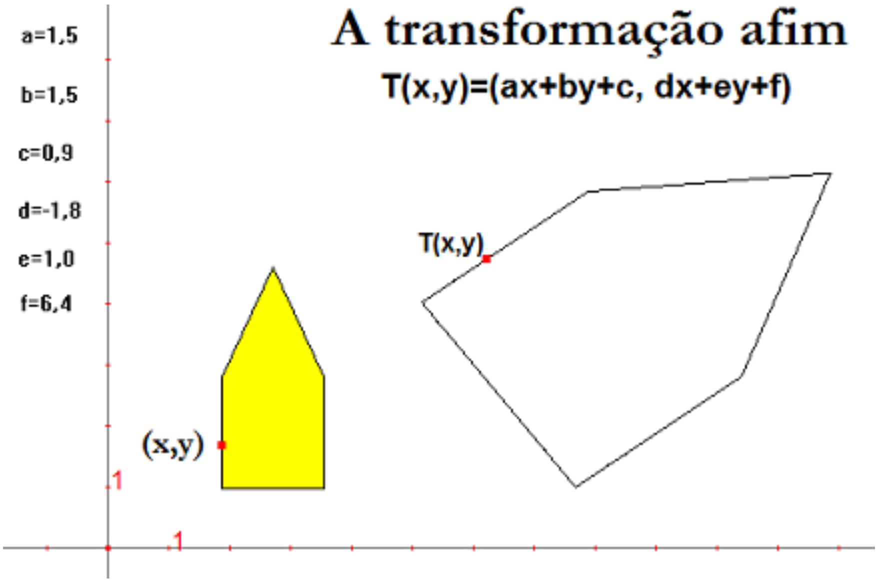


A transformação geométrica semelhança é apresentada pela fórmula T(x,y)=(cx-dy+a, dx+cy+b) ou T(x,y)= (cx+dy+a, dx-cy+b) onde $c^2+d^2=k$ e leva uma figura num outra semelhante à primeira. Os elementos invariantes segundo esta transformação são os ângulos e as razões entre dois segmentos correspondentes.

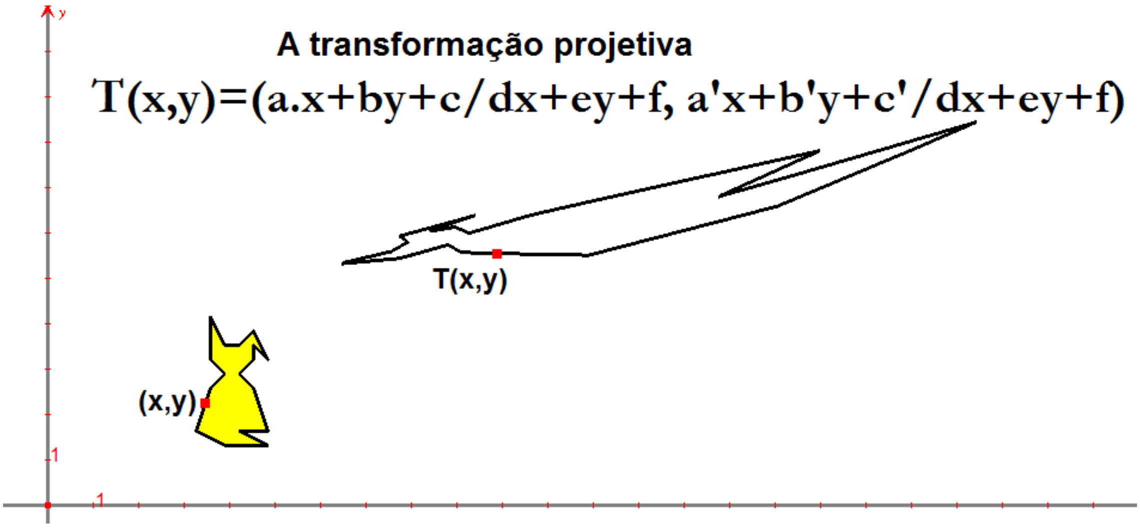


Podemos observar que a transformação semelhança inclui as rotações, as translações, as reflexões em retas, as homotetias e suas composições.

Além dessas transformações Klein define a transformação geométrica afim pela fórmula T(x,y)=(a.x+b.y+c, dx+e.y+f). Os elementos invariantes dessa transformação são o paralelismo entre segmentos correspondentes, a conservação da razão entre dois segmentos de uma mesma reta ou de retas paralelas, a conservação do ponto médio de um segmento, a conservação do baricentro de uma figura, a conservação da razão entre as áreas de uma figura e de sua transformada.



Uma outra transformação geométrica é a projetiva que é definida por T(x,y) =($\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}$, $\frac{a\acute{}x+b\acute{}y+c\acute{}}{dx+ey+f}$). É uma transformação que projeta figuras contidas em um plano, num outro plano, a partir de um ponto. Alguns elementos invariantes dessa transformação são a pertinência de um ponto sobre uma curva, a colinearidade de pontos, a ordem dos pontos, os pontos de intersecção,...



Observando as fórmulas percebe-se que **a transformação afim é um caso particular da transformação projetiva** (basta fazer d =0, e = 0 e f = 1), **a transformação semelhança é um caso particular da transformação afim**, **as isometrias são casos particulares da transformação de semelhança.** Além disso, o conjunto formado pelas isometrias forma um grupo em relação à operação composição. Analogamente, as transformações de semelhança formam o grupo de semelhança, as transformações afins formam o grupo afim as transformações projetivas formam o grupo projetivo. Portanto valem as propriedades associativa, a existência do elemento neutro e a existência do elemento inverso. Desse modo, as transformações geométricas fazem o papel de elo entre duas configurações. Elas permitem passar de uma figura a outra transportando as propriedades da figura. O estudo das figuras é substituído pelo estudo das propriedades das transformações.

Vamos resolver alguns problemas geométricos que ilustram bem esses conceitos. Dado um triângulo escaleno, construir a elipse de Steiner.

Dizemos que uma elipse é de Steiner quando ela está inscrita num triângulo e os pontos médios dos lados do triângulo são pontos de tangência.

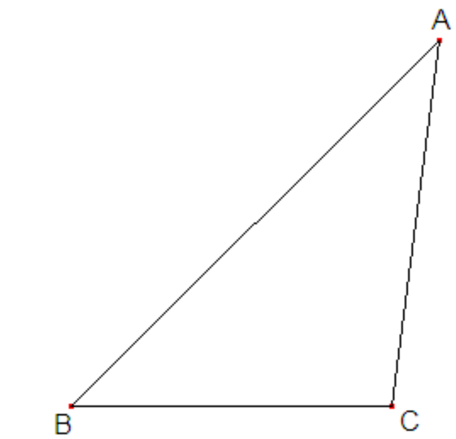


Fig 12

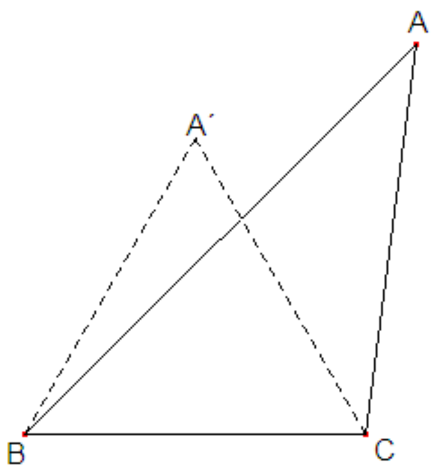
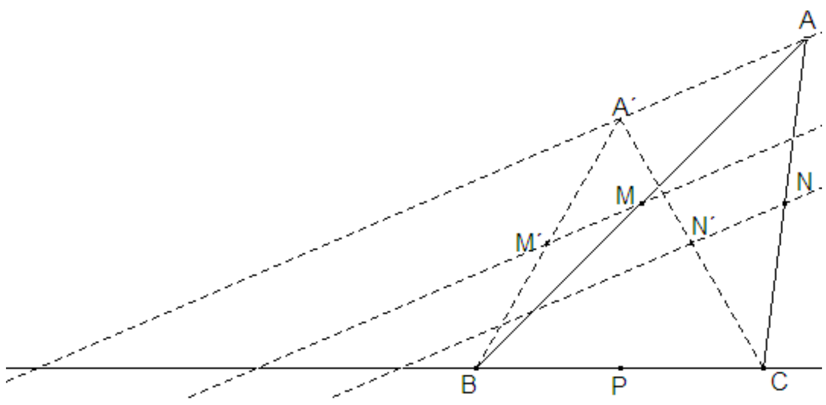


Fig 13

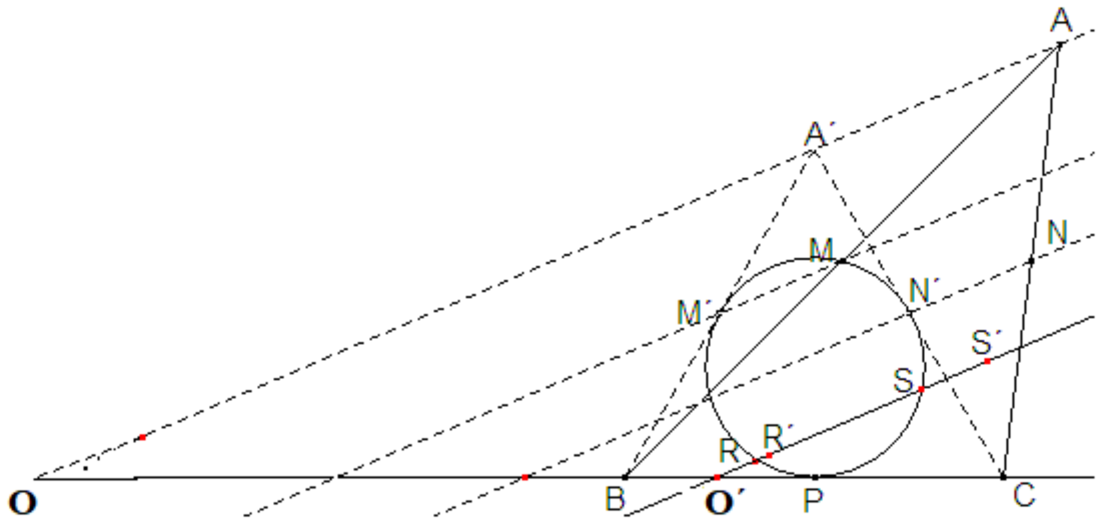
O problema trata de inscrever uma elipse num triângulo escaleno, o que não é trivial. Uma ideia é transformar a figura numa outra mais simples por meio de uma transformação conveniente, resolver o problema e pela transformação inversa voltar ao problema inicial. O fato de que na geometria afim, uma circunferência ser transformada numa elipse e os pontos médios e de tangência serem invariantes, nos sugere a adoção de transformações afins como ferramentas para resolvê-lo. Cria-se um triângulo equilátero e a seguir inscreve-se nele uma circunferência. Ela será tangente ao triângulo nos pontos médios dos lados. A seguir, por uma afinidade transforma-se a circunferência numa elipse.

Seja A´BC o triângulo equilátero. Existe uma afinidade de eixo BC e direção AA´ que transforma um triângulo ABC no triângulo equilátero A´BC.

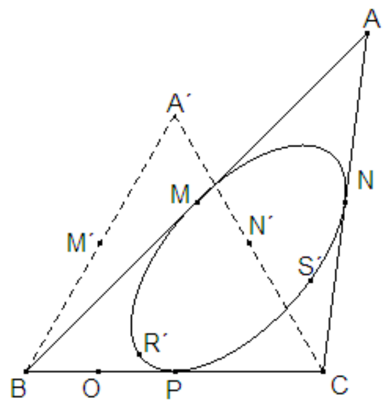


Os pontos médios M,N e P do triângulo ABC são transformados nos pontos médios M´, N´e P do triângulo A´BC. Os pontos M´, N´e P pertencem à circunferência inscrita no triângulo equilátero A´BC. Logo M,N e P são pontos da elipse inscrita no triângulo ABC. Como a elipse é determinada por cinco pontos, faltam determinar outros dois pontos. Escolhem-se dois pontos R e S da circunferência obtendo-se os correspondentes pontos

R´e S´por uma afinidade de eixo BC e direção AA´ e razão O´R´=k.O´R e OS´=k.O´S.onde k=$\frac{OA}{OA'}$

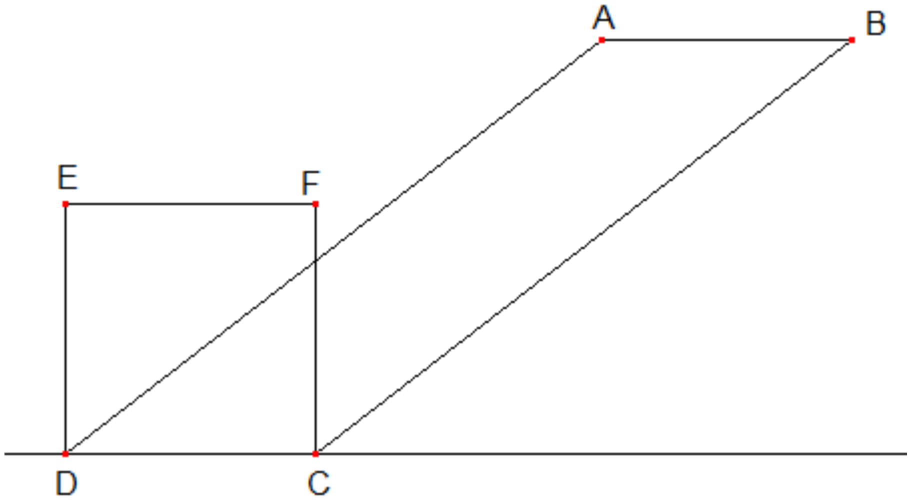


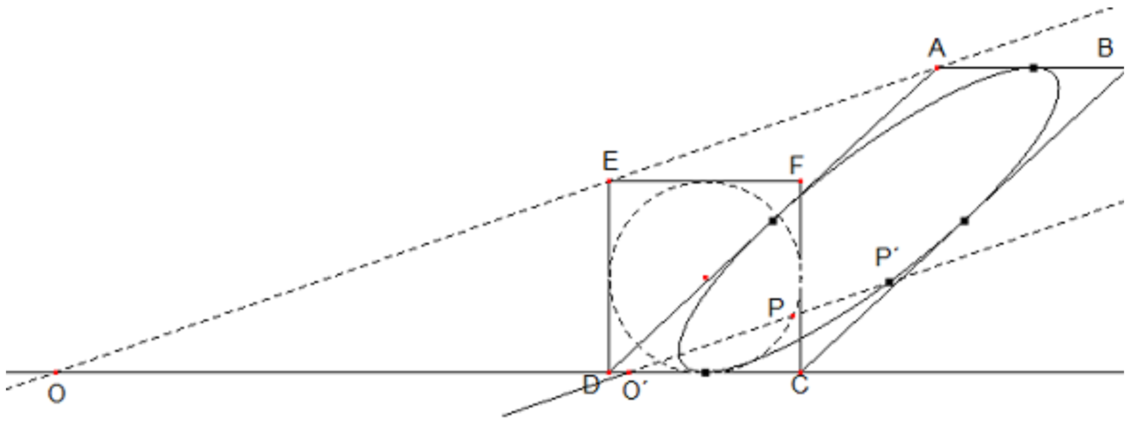
Ligando os cinco pontos M, N, P, R´e S´ com um software de geometria dinâmica, obtém-se a elipse de Steiner.



Um segundo exemplo: Inscrever uma elipse em um paralelogramo.

O problema é análogo ao anterior. Vamos transformar o paralelogramo num quadrado por meio de uma afinidade, inscrever uma circunferência no quadrado e pela transformação inversa voltar ao problema inicial, que é inscrever a elipse no paralelogramo.

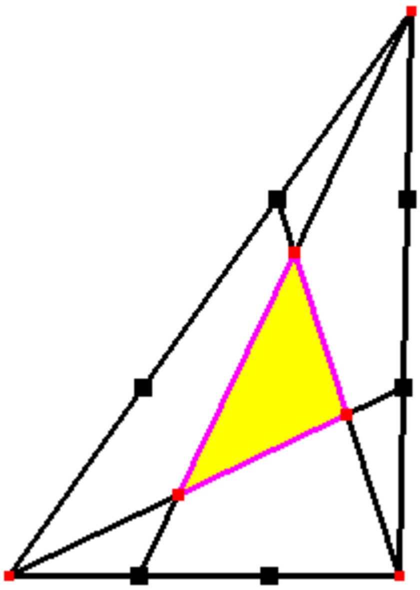




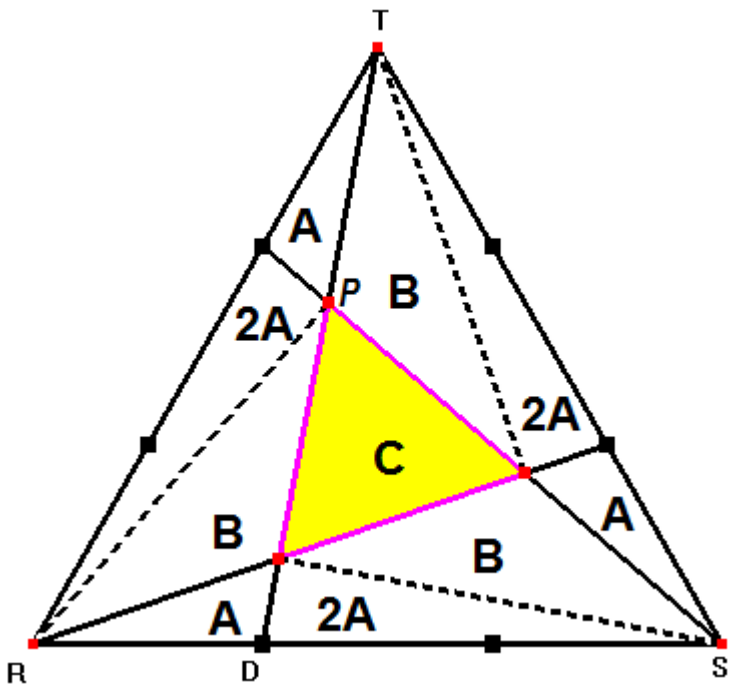
Seja ABCD o paralelogramo e EFDC o quadrado. Existe uma afinidade de eixo DC e direção AE que transforma o paralelogramo ABCD no quadrado EFCD. A razão k é o quociente entre as medidas OA e OE. Além dos 4 pontos médios, necessita-se de mais um ponto para construir a elipse. Escolhe-se um ponto P da circunferência e pela afinidade de direção EA e razão k constrói-se o ponto P´, ou seja, $\overrightarrow{O'P'}$=k. $\overrightarrow{OP}$ onde O´ é a intersecção do eixo DC com a reta paralela a EA pelo ponto P.

Um terceiro exemplo do uso da transformação afim.

Determinar a razão entre a área do triângulo interno obtido pelas intersecções das três retas que partem do vértice e passam pelo ponto que divide o lado oposto em três partes iguais, conforme figura abaixo, e a área do triângulo dado.



Como se trata de um problema de razão entre áreas, o habitat desse problema é a geometria afim. pois a razão entre as áreas é um invariante. Podemos então transformar o triângulo dado em um triângulo equilátero, resolver o problema e voltar ao problema inicial pela transformação inversa.



Seja RST um triângulo equilátero. A razão entre segmentos contido na mesma reta é um invariante. Logo cada lado é dividido em três partes iguais. Vamos indicar por A, B e C as áreas indicadas na figura.

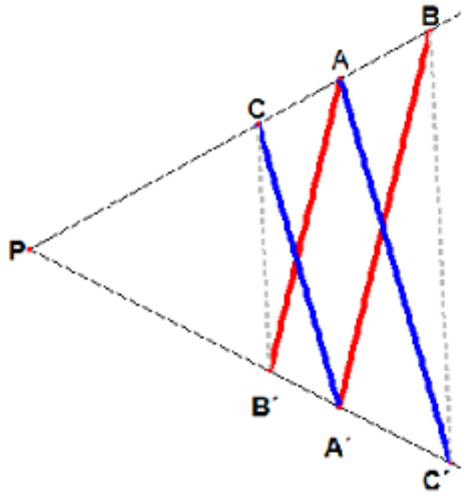
No triângulo RSP temos 2A+B+C=2.(A+B). Segue que B=C

No triângulo RTS temos: 5A+3B=2(4A+B) Segue que B=3A. Logo $\frac{C}{9A+3B+C} = \frac{1}{7}$

Portanto a razão entre as área pedidas é $\frac{1}{7}$

Um quarto exemplo fazendo a passagem da geometria afim para a geometria projetiva. Vamos demonstrar o teorema de Pappus que se apoia no seguinte resultado da geometria afim:

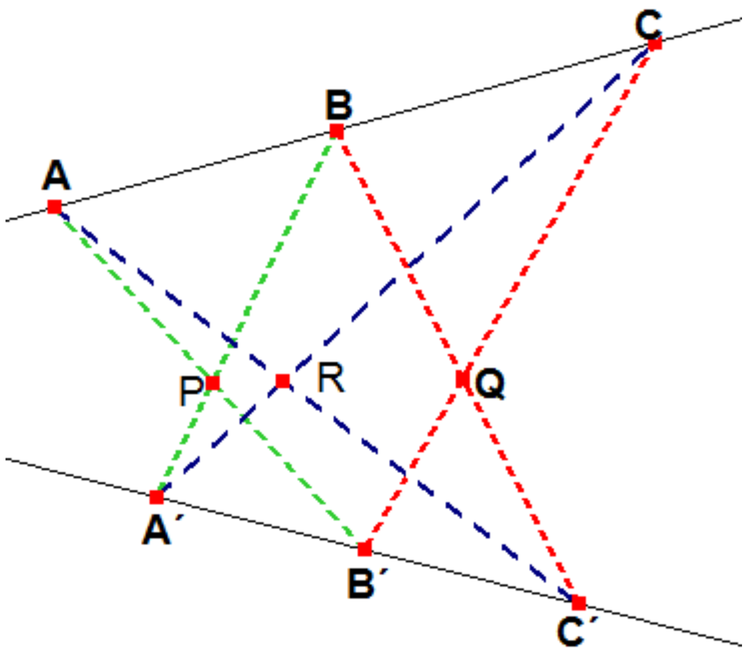
Se as ternas (A,B,C) e (A´,B´,C´) estão situados em duas retas distintas e se AB´//A´B e A´C//AC´ então B´C //C´B



De fato, $\frac{PB}{PA} = \frac{PA'}{PB'}$ e $\frac{PA}{PC} = \frac{PC'}{PA'}$ Segue que PB.PB´= PC. PC´ Donde $\frac{PB}{PC} = \frac{PC'}{PB'}$ e pelo recíproco do teorema de Tales vem que B´C//C´B

Demonstração do Teorema de Pappus no plano projetivo

Se as ternas (A,B,C) e (A´,B´,C´) estão situadas em duas retas distintas e se AB´ ∩ A´B={P} , A´C ∩ AC´ ={R} e B´C ∩ BC´={Q} então P, R e Q são alinhados.



Prova

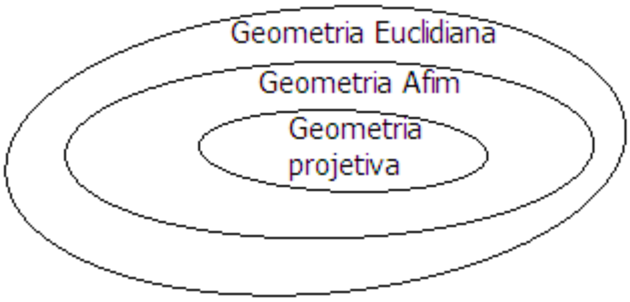
No plano projetivo não há distinção entre pontos próprios e impróprios. Vamos escolher dois pontos do plano projetivo. Sejam eles os pontos do infinito P e R. Nesse caso as retas BA´e AB´são paralelas pois se intersectam no ponto do infinito P e as retas AC´ e A´C também são paralelas pois se intersectam no ponto do infinito R .

Voltando ao plano afim, vamos aplicar o resultado do teorema provado acima. Como AB´//A´B e A´C//AC´então B´C//C´B.

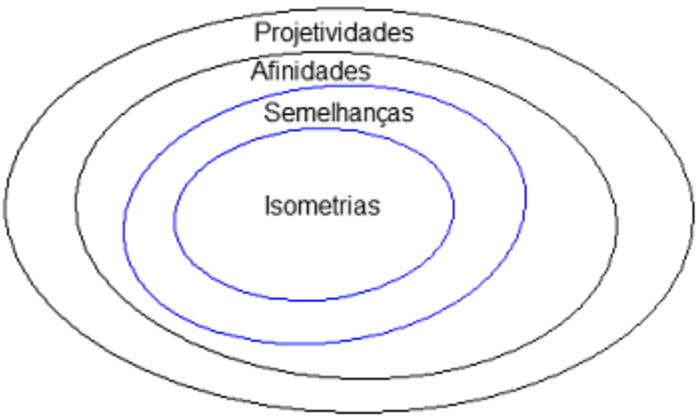
Voltamos no plano projetivo, como B´C//BC´então essas retas se encontram no ponto do infinito Q. Portanto a reta do infinito PR passa pelo ponto Q e os pontos P,Q e R são colineares

A partir dessas ideias as geometrias são redefinidas segundo o seu grupo de transformação. A **geometria euclidiana** é o estudo das propriedades das figuras que permanecem inalteradas quando os elementos dessa figura são submetidos às transformações do grupo das semelhanças. A **geometria afim** é o estudo das propriedades das figuras que permanecem inalteradas quando os elementos dessa figura são submetidos às transformações do grupo afim. A **geometria projetiva** é o estudo das propriedades das figuras que permanecem inalteradas quando os elementos dessa figura são submetidos às transformações do grupo projetivo.

Podemos dizer que do ponto de vista de uma apresentação axiomática e olhando para os invariantes que a geometria projetiva está contida na geometria afim e que a geometria afim está contida na geometria euclidiana.



Por outro lado, do ponto de vista analítico podemos dizer que a geometria projetiva é uma generalização da geometria afim. A fórmula T(x,y) =($\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}$, $\frac{a'x+b'y+c'}{dx+ey+f}$) engloba todas as outras. Podemos dizer que a geometria prrojetiva é mais abrangente que a geometria afim por ela se ocupar somente com as relações de incidência. A geometria afim por sua vez é mais abrangente que a geometria euclidiana pois ela se preocupa somente com as relações de paralelismo de figuras geométricas e com a razão entre segmentos contidos na mesma reta ou em retas paralelas (não se preocupando com distâncias, ângulos e circunferências). As isometrias, por sua vez, estão contidas nas semelhanças e essas estão contidas nas afinidades que por sua vez estão contidas nas projetividades.



Bibliografia

1) ALBERTI, L.B **Da Pintura**, Editora Unicamp, 1999

2) BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

3)CHOQUET,G. **L'enseignement de la géométrie**, Hermann,Paris,1964

4) EUCLIDES, **Les Éléments**, volumes 1,2,3,4, PUF,Tradução Bernard Vitrac, 1994.

5) HILBERT, D. **Les fondements de la géométrie**, Éditions Jacques Gabay, 1971

6) KLEIN,F. **Le programme d'Erlangen**, Gauthier-Villars Éditeur,1974

7) KLEIN, F **Elementary mathematics from an advanced standpoint,** Dover Publications, USA, 1939

8) MOISE, E.E **Geometria elemental desde um punto de vista avanzado**, C.E.C.S.A, 1976

9) POGORELOV, A.V, **Geometria Elemental**, Ed.Mir,Moscou,1974.