A axiomatização da geometria por Hilbert e Birkhoff

(Vincenzo Bongiovanni)

Uma formulação axiomática da geometria euclidiana

As inúmeras tentativas de provar o quinto postulado de Euclides mostraram que no sistema de postulados de Euclides havia muitos apelos à intuição. Euclides usava fatos que não eram postulados ou consequências de teoremas anteriormente provados. Por exemplo, as demonstrações por superposição não eram rigorosas. Usavam deslocamentos que não eram definidos. Para provar o caso de congruência LAL, Euclides começa por mover um dos triângulos de forma a fazê-lo coincidir com o outro, mas nenhum dos postulados lhe permitia esse movimento. Como garantir que o movimento não alterava a forma do triângulo? Faltava um postulado que garantisse que as propriedades das figuras (comprimentos e ângulos) permanecessem inalteradas durante seu deslocamento. Alguns geômetras sugeriram que fosse adotado o seguinte postulado: "as figuras geométricas podem deslocar-se sem modificar seu tamanho e forma". Esse postulado foi utilizado por vários geômetras gregos, mas sem que fosse enunciado explicitamente.

No fim do século XIX vários matemáticos começaram a se preocupar com os fundamentos da matemática e em especial com a axiomatização da geometria. O matemático Pasch percebeu que utilizando somente os postulados de Euclides não se podia provar que "se uma reta intersecta um lado de um triângulo então ela intersectará o outro lado do triângulo". Tal fato foi adotado como postulado nas suas demonstrações. Ele também observou, magistralmente, que a noção de "ordem" podia ser desenvolvida sem fazer referência à medida. Essa noção era praticamente desconhecida antes do século XIX. Em 1882, ele publica o livro *Lições de geometria moderna* que é considerado o primeiro desenvolvimento axiomático da geometria projetiva plana. Muitos desse axiomas foram importantes para as axiomatizações das geometrias euclidianas e não euclidianas. O sistema de Pasch foi gradualmente aperfeiçoado por Peano (1889) e Pieri. Mas a formulação axiomática da geometria de Hilbert (1862, 1943) foi a que mais se consolidou entre os matemáticos.

Hilbert apresentou o seu trabalho num curso dado por ele em 1898 e publicou-o em 1899 com o título de *Fundamentos da geometria*. Ele baseou a sua exposição em três conceitos primitivos (ponto, reta e plano), em três relações fundamentais (incidente, estar entre e congruente) e em cinco grupos de axiomas (axiomas da incidência, axiomas da ordem, axiomas da congruência, axiomas da continuidade e o axioma do paralelismo). Os axiomas estabelecem as ligações entre os conceitos primitivos e as relações fundamentais. A geometria **euclidiana** pode ser construída passo a passo partindo do primeiro grupo de axiomas até chegar no quinto grupo. A geometria da **incidência** é obtida a partir dos axiomas do primeiro grupo de Hilbert e das consequências deles decorrentes; a geometria **ordenada** a partir dos dois primeiros grupos de axiomas de Hilbert e de suas consequências; a geometria **absoluta** a partir dos quatro primeiros grupos de axiomas de Hilbert e de suas consequências; e a geometria **euclidiana** a partir dos cinco grupos de axiomas de Hilbert. O quinto grupo é constituído apenas pelo axioma das paralelas com o seguinte enunciado "por um ponto fora de uma reta passa no **máximo** uma reta paralela à reta dada". Há uma pequena sutileza na forma de apresentação desse postulado com o quinto postulado de Euclides na forma de Playfair. Hilbert ao usar a palavra **máximo**, permite também a não existência da reta paralela por um ponto. A negação do axioma de Hilbert apresenta a seguinte forma "por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada". Essa negação recebeu o nome de axioma de Bolyai-Lobatchevsky. A geometria que resulta dos 4 primeiros grupos de axiomas de Hilbert e do axioma de Bolyai-Lobatchevsky recebe o nome de **geometria hiperbólica**.

Uma nova formulação axiomática da geometria euclidiana

O geômetra George E.Martin, no seu livro *The foundations of geometry and the non-euclidean plane*, editora Springer, 1975, capítulo 14, página 155 diz:

> "Em 1832 apareceu um texto de geometria contendo um curto apêndice escrito por John Bolyai. Esse apêndice tem sido descrito por G.B.Halsted* como "as mais extraordinárias 24 páginas de toda a história do pensamento".

Bolyai e Lobachevsky são reconhecidos como os fundadores das geometrias não euclidianas. Nós pularemos um século até 1932. Esse ano viu a publicação de *A set of postulates for plane geometry based on scale and protractor* (O conjunto dos postulados da geometria plana baseados na régua graduada e no transferidor) escrita por George David Birkhoff . Embora ninguém tenha sugerido, esse artigo é tão importante quanto o apêndice de Bolyai.

Birkhoff (1884-1944) introduz um sistema de axiomas equivalente ao de Hilbert que incorpora o conjunto dos números reais. Os axiomas de Birkhoff, ao contrário dos de Hilbert, introduzem a ideia de medida desde o início. Os segmentos e os ângulos são medidos com os números reais. Faremos uma breve descrição da evolução das ideias de Birkhoff apoiados no artigo O *ensino da geometria e a solução de Birkhoff* de COSTA, H.C.A.

Em 1925 Birkhoff escreve um livro de divulgação científica intitulado *The origin, Nature and influence of Relativity*, tentando explicar fatos geométricos básicos de forma acessível. Desenvolve as primeiras idéias da geometria euclidiana a partir de propriedades sugeridas pela régua graduada e pelo transferidor. Em 1930 Birkhoff escreve um artigo em parceria com o professor Ralph Beatley onde apresenta 5 princípios intuitivos sobre medidas de segmentos e de ângulos e utiliza o sistema numérico dos reais para o seu desenvolvimento. Em 1932 Birkhoff reapresenta as suas idéias numa axiomática formada por 4 postulados:

- Postulado 1: os pontos A, B, ... de qualquer reta podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números reais x tal que $d(A,B) = |x_A - x_B|$ para todos os pontos A e B;
- Postulado 2: existe uma única reta passando por dois pontos dados;
- Postulado 3: as semirretas m e n por um ponto O podem ser colocadas em correspondência biunívoca com os números reais tal que, se A e B são pontos de m e n diferentes de O, a diferença $|a_m - a_n|$ é a medida do ângulo $A\hat{O}B$;
- Postulado 4: o caso LAL de semelhança de triângulos. Essa formulação se mostrou inadequada ao ensino elementar pois o postulado de semelhança de triângulos substitui o postulado de paralelismo de Euclides. Em 1940 Birkhoff, novamente com o professor Beatley, publica o livro Basic Geometry para o ensino secundário. O livro apresenta cinco postulados e deduz um conjunto de teoremas. Os postulados são os quatro postulados da versão de 1932 acrescido de um outro que diz: todos os ângulos rasos são iguais entre si e medem 180º. A seguir são apresentados sete teoremas chamados de **teoremas básicos**. São eles em ordem:
    - O caso AA de semelhança;
    - Se um triângulo é isósceles então os ângulos da base são congruentes e reciprocamente;
    - O caso LLL de semelhança;
    - A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é igual a 180º ;

- Todo ponto e nenhum outro da mediatriz equidista das extremidades de um segmento;
- Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta perpendicular à reta dada;
- O teorema de Pitágoras.

E finalmente apresenta a teoria do paralelismo demonstrando o postulado das paralelas.

Entendemos ser muito difícil para um professor acostumado a iniciar o seu curso de geometria com a teoria do paralelismo e terminar com a teoria da semelhança, inverter a sua sequência didática para se submeter ao novo formato apresentado por Birkhoff. Daí a sua não aceitação pelos professores do secundário.

Em 1959 MacLane aponta as vantagens do método de Birkhoff e apresenta uma variante mais satisfatória e compreensível. Mas continua sendo pouco indicada à sala de aula.

Somente quando a organização educacional norte americana SMSG (*School Mathematics Study Group*) apresenta em 1960 uma outra variante da axiomática de Birkhoff, com uma formulação dedutiva também para a geometria espacial é que o tratamento métrico começa a ter aceitação nos Estados Unidos, país onde se desenrola toda a história desta axiomática. Entre os geômetras que adaptaram com sucesso o sistema de Birkhoff para o ensino citamos E.E Moise (1962) e A.V.Pogorélov (1974). No Brasil essa axiomática é utilizada como referência na maioria dos livros didáticos.

A organização do ensino da geometria nos livros didáticos após 1960

Em 1962 o matemático E.E.Moise que participou do grupo SMSG apresenta uma obra intitulada: *Elementary geometry from na advanced standpoint*. Nesse livro, escrito para o ensino superior, ele diz que o esquema de apresentação para a geometria não é o clássico e que foi proposto em 1930 por G. Birkhoff e que agora está se popularizando. Em 1964 E.E Moise em parceria com o professor F. Downs publicam uma versão inglesa para o ensino elementar. Essa obra, em dois volumes, foi traduzida para o português em 1971.

Em 1963, Sangiorgi escreve a coleção *Matemática: curso moderno* (para os ginásios) onde, no volume 3, utiliza as idéias de E.E.Moise

Em 1955, Benedito Castrucci publica uma obra intitulada *Lições de geometria plana* com sucessivas edições (a 6ª edição foi publicada em 1976) onde adota o ponto de vista de Hilbert. Nesses 21 anos de publicação, nada muda nos seus livros.

Em 1974, Pogorelov escreve uma obra em russo traduzida em espanhol com o título G*eometría elemental,* onde introduze a ideia de medida no seu conjunto de axiomas. Os segmentos e os ângulos são medidos com os números reais. No prefácio da obra nada é dito a respeito da origem do seu sistema de axiomas, podendo ter sido ou não uma adaptação das ideias de Birkhoff.

Barbosa, em 1995, no seu livro intitulado *Geometria euclidiana plana* editado pela Sociedade Brasileira de Matemática diz que os axiomas adotados neste livro são aqueles selecionados por A.V. Pogorelov

Ventura, em 1997, na sua obra *Curso de geometria* publicado pela editora Gradiva afirma que “cada novo autor de um texto introdutório de geometria deve decidir quais são os seus axiomas. Os deste livro são a versão do Moise da axiomática de Birkhoff ".

Uma formulação axiomática da geometria euclidiana via álgebra linear

Em 1964, Jean Dieudonné publica o livro *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* com uma nova apresentação da geometria euclidiana. Define o plano (ou o espaço) como um espaço vetorial sobre R, de duas (ou três) dimensões munido de um produto escalar. Portanto, substitui os postulados da geometria euclidiana pelos axiomas do espaço vetorial.

No Brasil, essas idéias foram levadas adiante pelo professor Alexandre Augusto Martins Rodrigues. No prefácio do seu livro *álgebra linear e geometria euclidiana,* Alexandre diz que o conteúdo do livro foi desenvolvido em 1959 na escola Politécnica e que os fundamentos da geometria euclidiana são desenvolvidos com os métodos da álgebra linear. Era exatamente o que apregoava Dieudonné. Na introdução do seu livro ele diz:

> A geometria euclidiana pode ser apresentada axiomaticamente no ensino universitário, quer através dos postulados que remontam a Euclides, sob a formulação devida a Hilbert, quer através da geometria projetiva ou da álgebra linear. Entretanto, o único método realmente viável, nos primeiros anos universitários, é o da álgebra linear.

A seguir ele sugere ao leitor que deseja ampliar seus conhecimentos, principalmente sob o aspecto algébrico da teoria, a leitura do livro de J. Dieudonné. A obra do Alexandre foi referência bibliográfica numa disciplina optativa de geometria no curso de bacharelado em matemática do IME/USP durante muitos anos.

Analisando os livros didáticos atuais de matemática, vemos que a abordagem da geometria euclidiana via álgebra linear, não encontrou eco no nosso sistema de ensino.

Bibliografia

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

CASTRUCCI, B. *Lições de geometria plana*, livraria Nobel S.A, 1976

CHOQUET,G. *L'enseignement de la géométrie*, Hermann,Paris,1964

COSTA, H.C.A *O ensino da geometria e a solução de Birkhoff*, Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática, 1985

EUCLIDES, *Les Éléments*, volume 1,2,3,4, PUF,1994 Tradução Bernard Vitrac

GREENBERG, M. *Euclidean and non Euclidean Geometries: development and history*. New York: Freeman and Company, 1994.

HILBERT, D. *Les fondements de la géométrie*, Éditions Jacques Gabay, 1971

MOISE, E.E *geometria elemental desde um punto de vista avanzado*, C.E.C.S.A, 1976

MOISE & DOWNS *geometria moderna*, Editora Edgard Blucher Ltda, 1971

POGORELOV, A.V *Geometria Elemental*, Ed.Mir,Moscou,1974.

PROCLUS de Lycie *les Commentaires sur le premier livre des Éléments d´Euclides*, IREM de Lille, 1948.

SANGIORGI, O. *Matemática Curso Moderno*, 3 volumes para os ginásios, São Paulo Editora S.A, 1967

VENTURA, P.V *Curso de geometria*, Gradiva, 2002