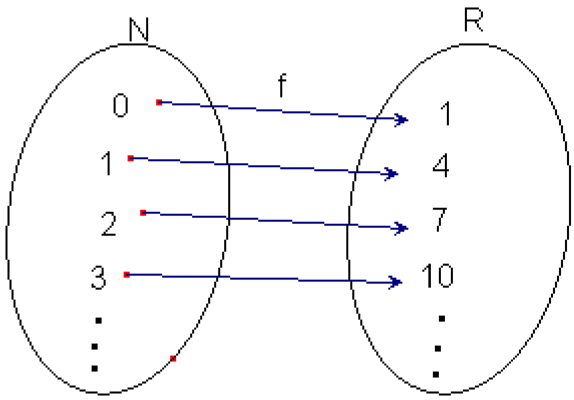
# Polinômio ou função polinomial ?

(Vincenzo Bongiovanni)

Na álgebra elementar, lidamos ora com polinômios ora com funções polinomiais. Quando procuramos as soluções reais de uma equação do tipo $x^3-4x=0$ estamos considerando $x^3-4x$ como uma função polinomial. Resolvemos a equação, usando a identidade $x^3-4x=x.(x-2).(x+2)$ e a seguir aplicamos a lei do anulamento do produto pois x, x-2 e x+2 são números reais. Concluímos que x=o ou x=2 ou x=-2. Ao dividir $3x^2+4x+6$ por x-2 obtendo o quociente 3x+10 e o resto 26 estamos considerando $3x^2+4x+6$ como um polinômio e não como uma função polinomial pois neste caso x não é um número real. Surge então a questão: o que é x nesse caso? E o que é $x^2$ ? Qual é o significado do sinal + no polinômio $3x^2+4x+6$ ? Mostraremos neste texto a diferença conceitual entre polinômio e função polinomial.

Uma seqüência é uma função cujo domínio é N.

Exemplo:




Notação: f={(0,1), (1,4), (2,7). (3,10), ...} ou f= ( 1, 4, 7, 10, ...)= $(a_n)_{n\in N}$
Onde $a_1$=1, $a_2$=4 , $a_3$=7, $a_4$=10, ....

Uma sequência ($a_1$, $a_2$, $a_3$, ...) sobre R recebe o nome de polinômio sobre R se existe um índice $p\in N$ tal que $a_q = 0$ para todo q>p.
Exemplo: (6,4,3,0,0,0,...) é um polinômio sobre R.

Adição de polinômios

Sejam P = ($a_1$, $a_2$, $a_3$, ...) e Q =($b_0$, $b_1$, $b_2$, ...) polinômios sobre R.
Chama-se soma de P com Q ao polinômio H=($c_0$, $c_1$ , $c_2$, ...) onde $c_j = a_j + b_j$ para todo $j \in N$.

Assim se P=(a,0,c,0,0,0,...) e Q=(0,b,d,0,0,0,0,...) então P+Q= (a+0,0+b,c+d,0,0,0,0,...)

Ao longo da história, a multiplicação entre duas expressões algébricas do tipo $(a_0+a_1x+a_2x^2).(b_0+b_1x+b_2x^2)$ era feita aplicando a propriedade distributiva. O resultado era a seguinte expressão algébrica
$a_0b_0+a_0b_1x+a_0b_2x^2+a_1b_0x+a_1b_1x^2+a_1b_2x^3+a_2b_0x^2+a_2b_1x^3+a_2b_2x^4 =$
$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x^3+a_2b_2x^4$.
Esse fato sugeriu como definir os coeficientes na multiplicação de dois polinômios.

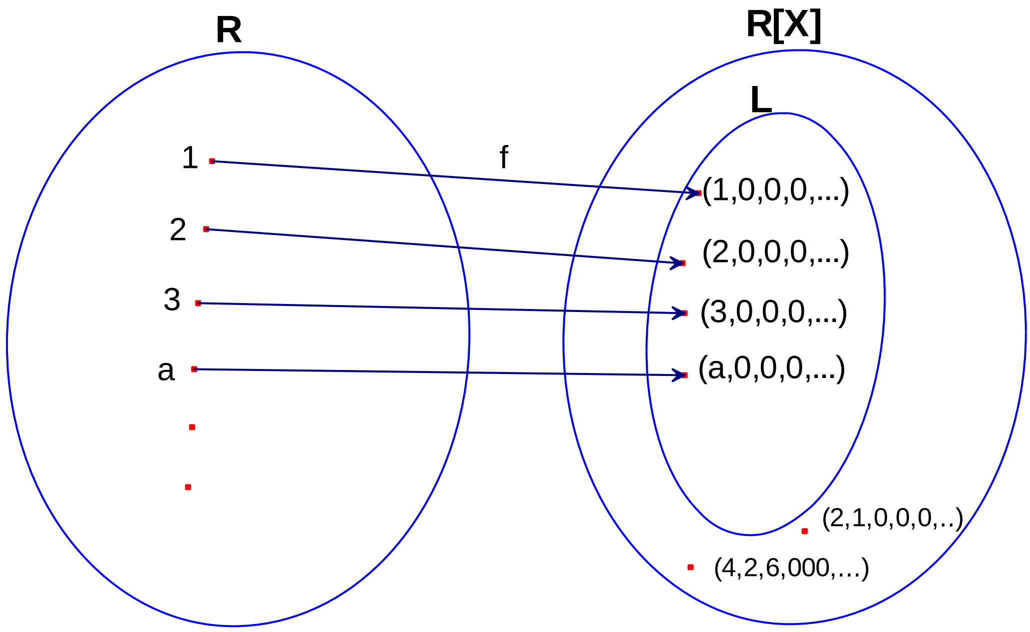
Multiplicação de polinômios

Sejam P = ($a_1$, $a_2$, $a_3$, ...) e Q =($b_0$, $b_1$, $b_2$, ...) polinômios sobre R.
Chama-se produto de P por Q ao polinômio H=($c_0$, $c_1$, $c_2$, ...), onde
$c_0=a_0.b_0$ , $c_1=a_0.b_1+a_1.b_0$ , $c_2=a_0.b_2+a_1.b_1+a_2.b_0$ ,
$c_3=a_0.b_3+a_1.b_2+a_2.b_1+a_3.b_0$ , etc...

Observe usando a definição de multiplicação de polinômios que:
(0,1,0, 0, 0, 0,...) . (0, 1,0, 0, 0, 0...) = (0, 0, 1, 0, 0, 0,....)
(0, 0, 1, 0, 0, 0,....) . (0, 1,0, 0, 0, 0...) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, ...)
(0, 0, 0, 1,0,0,0, ...). ( 0, 1,0, 0, 0, 0...) = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, ...)
(a, 0, 0, 0, 0,, ,...). ( 0, 1,0, 0, 0, 0...) = (0, a, 0, 0, 0, 0, ...)
(a, 0, 0 ,0, 0,...). (0, 0, 1, 0, 0, 0, ...) = (0, 0, a, 0, 0, 0, ...)

Indica-se o polinômio (0, 1, 0, 0, 0, ...) por X. Esse polinômio recebe o nome de Indeterminada sobre R. Neste caso efetuando os produtos teremos:
$X^2$=(0, 1, 0, 0, 0, ...). (0, 1, 0, 0, 0, ...) =(0, 0, 1, 0, 0, 0, ...)
$X^3= X^2$. X==(0, 0, 1, 0, 0, 0, ...).(0, 1, 0, 0, 0....) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, ...) e assim por diante.

O conjunto de todos os polinômios sobre R é indicado por R[X].
A partir de R[X] define-se o conjunto L= {(a,0,0,0,...)/ a $\in$R}




É possível mostrar que a aplicação f de R em L definida por f(x)=(x,0,0,0,...) é um isomorfismo de R em L. Para isso devemos mostrar que f é bijetora e que para todo a e b em R, f(a + b) = f(a) + f(b) e f(a.b) = f(a).f(b).
De fato, f(a+b))=(a,0,0,0,...) + (b,0,0,0,...)= (a+b, 0,0,0,...)=f(a+b) e f(a).f(b)=(a,0,0,0,...).(b,0,0,0,...)= (a.b,0,0,0,...) =f(a.b). A função f é injetora pois para dois elementos quaisquer distintos de R correspondem dois elementos distintos de L e para todo elemento (a,0,0,0,...) de L está associado o real a de R, portanto f é bijetora. Esse isomorfismo permite escrever que R = L e como L$\subset R[X]$ podemos "aceitar dizer" que R é subconjunto de R[X]. A partir daí identificam-se os elementos de R com os elementos de L e escreve-se 1= (1,0,0,0,...), 2=(2,0,0,0,...), etc... Observe que o número real 1 não é igual ao polinômio (1,0,0,0,...), mas por abuso de linguagem escrevemos 1$\in$R[X] e dizemos que 1 é o polinômio constante. Seja o polinômio f=($a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$ , 0, 0, 0, ...) temos que:
f=($a_0$, 0, 0, 0, ...)+(0, $a_1$, 0, 0, 0, ...)+(0, 0,$a_2$ , 0, 0, 0,...)+ ...+(0,0...,0,$a_n$, 0,0,..)
Mas ( 0, $a_1$, 0, 0, 0, ...)= ($a_1$, 0, 0, 0, ...). (0, 1, 0, 0, 0, ...)=$a_1$X
(0, 0, $a_2$ , 0, 0, 0, ...) = ($a_2$ , 0, 0, 0, ...). (0, 0, 1, 0, 0, ...)=$a_2X^2$

$(0, 0, 0, a_3, 0, 0, \ldots) = (a_3, 0, 0, 0, \ldots).(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots) = a_3X^3$
$(0, 0, \ldots, 0, a_n, 0, 0, 0, \ldots) = (a_n, 0, 0, 0, \ldots).(0,0,0,0,\ldots,0,1,0,0,0,\ldots) = a_nX^n$

Portanto
$f=(a_0, 0, 0, 0, \ldots)+(0, a_1, 0, 0, 0, \ldots)+(0, 0, a_2, 0, 0, 0, \ldots)+\ldots+(0,0\ldots,0,a_n, 0,0,\ldots)=$
$=a_0+a_1X+a_2X^2+ a_3X^3+\ldots+ a_nX^n$

Denota-se um polinômio por $f=a_0+a_1X+a_2X^2+ a_3X^3+\ldots+ a_nX^n$ ou por
$f(X)= a_0+a_1X+a_2X^2+ a_3X^3+\ldots+ a_nX^n$
A partir de agora, o mistério que envolvia X desaparece. O X do polinômio não é um número real mas sim a sequência (0,1,0,0,0,...) de números reais. Portanto temos agora um significado preciso para o símbolo X no polinômio $3X^2+4X+6$. Precisamente $3X^2+4X+6=(6,4,3,0,0,0,\ldots)$. E os sinais + que eram símbolos sem qualquer significado exato, agora representam a operação de adição em R[X]. Em sala de aula, freqüentemente falamos de “expressões algébricas” do tipo $ax^2+bx+c$ onde a,b e c são reais. Essas palavras vagas “expressões algébricas” agora revestem-se de consistência: são os polinômios (c,b,a,0,0,0,...) sobre R.

**A partir da definição de polinômio sobre R pode-se definir a função polinomial.**

Chama-se função polinomial associada ao polinômio
$f(X)= a_0+a_1X+a_2X^2+ a_3X^3+\ldots+ a_nX^n$ sobre R a uma função f de R em R que associa a cada valor real x, o número real $a_0+a_1 x+a_2 x^2+ a_3 x^3+\ldots+ a_n x^n$
Observe que a indeterminada X do polinômio é representada com a letra maiúscula e o número real x da função polinomial é representado com a letra minúscula. Indica-se a função polinomial por
$f(x) = a_0+a_1 x+a_2 x^2+ a_3 x^3+\ldots+a_nx^n$ .Observe também que nesse caso x representa um elemento qualquer de R e f(x) é o número real obtido substituindo a indeterminada X do polinômio f(X) pelo número real x.

**Bibliografia**

Monteiro, Jacy L. H. *Polinômios-Divisibilidade*

Gonçalves, Adilson *Introdução à álgebra*

Lequain, Ives e Garcia, Arnaldo *Álgebra: uma introdução*