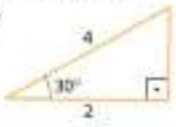
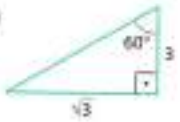
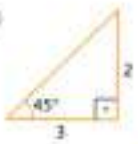
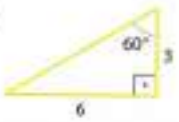
1. (Mack-SP) Determine qual é o triângulo retângulo cujos dados estão compatíveis.

a) 

b) 

c)

d) 

e) 

a) $\cos 30° = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{2}{4}$ (F)

b) $\operatorname{tg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sqrt{3} \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$ (F)

c) $\cos 60° = \frac{3}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ (V)

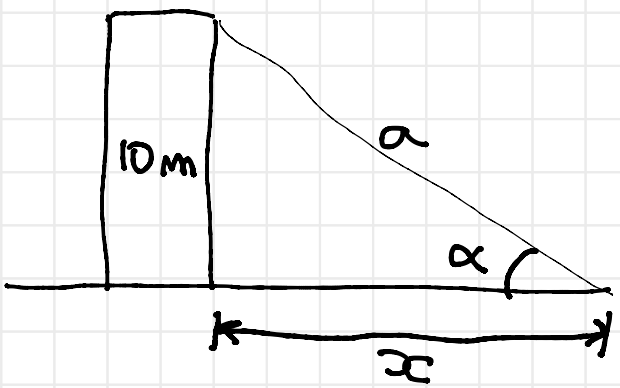
d) $\operatorname{tg} 45° = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{2}{3}$ (F)

e) $\operatorname{tg} 60° = \frac{6}{3} \Rightarrow \sqrt{3} \neq 2$ (F)

2. (UFS-SE) Se os raios solares formam um ângulo α com o solo, qual é, aproximadamente, o comprimento da sombra de um edifício com 10 m de altura?

(Dado: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$.)

a) 16,6 m
b) 15,5 m
c) 14,4 m
d) 13,3 m
e) 12,2 m



$\operatorname{sen} \alpha = \frac{10}{a} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{10}{a} \Rightarrow a = \frac{10 \times 5}{3} \Rightarrow a = \frac{50}{3}$

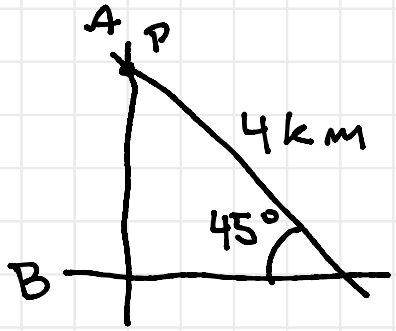
$a^2 = 10^2 + x^2 \Rightarrow \left(\frac{50}{3}\right)^2 = 10^2 + x^2 \Rightarrow \frac{2500}{9} - 100 = x^2$

$\frac{2500 - 900}{9} = x^2 \Rightarrow \frac{1600}{9} = x^2 \Rightarrow x = \frac{40}{3}$

3. (Vunesp) Duas rodovias **A** e **B** se cruzam formando um ângulo de 45°. Um posto de gasolina se encontra na rodovia **A**, a 4 km do cruzamento. Pelo posto passa uma rodovia retilínea **C**, perpendicular à rodovia **B**. A distância do posto de gasolina à rodovia **B**, indo através de **C**, em quilômetros, é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. e) $2\sqrt{2}$.

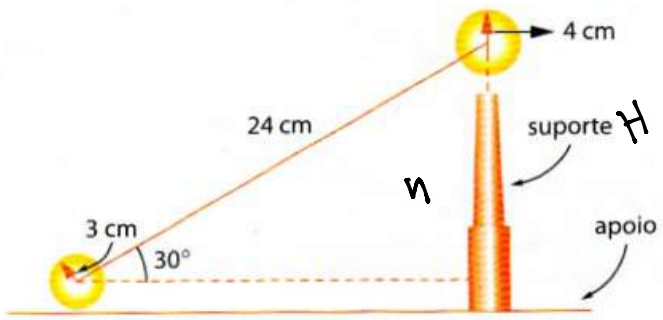
b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. d) $\sqrt{2}$.



$\cos 45° = \frac{\overline{PB}}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{PB}}{4} \Rightarrow \overline{PB} = 2\sqrt{2}\,km$

4. (PUCC-SP) A figura a seguir é um corte vertical de uma peça usada em certo tipo de máquina. No corte aparecem dois círculos, com raios de 3 cm e 4 cm, um suporte vertical e um apoio horizontal.



A partir das medidas indicadas na figura, conclui-se que a altura do suporte é:

a) 7 cm. d) 14 cm.

b) 11 cm. e) 16 cm.

c) 12 cm.

$\operatorname{sen} 30° = \frac{h+4}{24}$

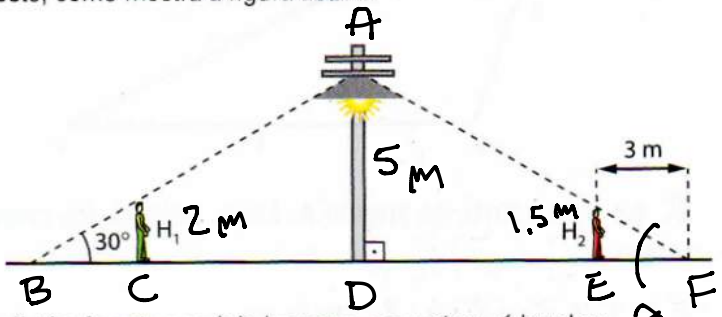
$\frac{1}{2} = \frac{h+4}{24}$

$h + 4 = 12$

$h = 8\ cm$

$H = 8 + 3 \Rightarrow H = 11\ cm$

5. (Unirio-RJ) Dois homens, H_1 e H_2, com 2 m e 1,5 m de altura, respectivamente, estão em pé numa calçada, em lados opostos de um poste de 5 m de comprimento, iluminados por uma lâmpada desse poste, como mostra a figura abaixo.



A distância entre os dois homens, em metros, é igual a:

a) $5\sqrt{3} + 10$.
c) $3\sqrt{3} + 7$.
e) $6\sqrt{3}$.
b) 14.
d) $8\sqrt{3} - 3$.

$$tg\,30° = \frac{2}{\overline{BC}}$$

$$\overline{BC} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\overline{BC} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{BC} = 2\sqrt{3}\ m$$

$$tg\,30° = \frac{5}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{15}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{BD} = 5\sqrt{3}\ m$$

$$\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC} \Rightarrow \overline{CD} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \Rightarrow \overline{CD} = 3\sqrt{3}\ m$$

$$tg\,\alpha = \frac{1,5}{3} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{5}{\overline{DF}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{\overline{DF}} \Rightarrow \overline{DF} = 10$$

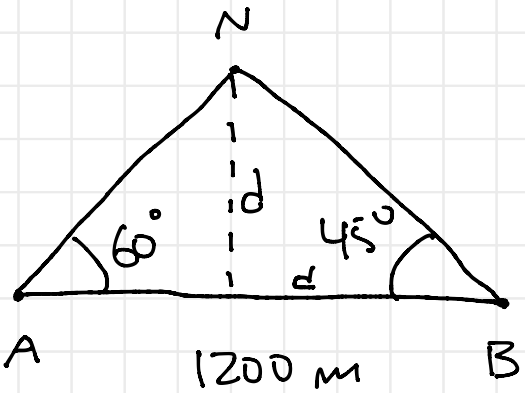
$$\overline{DE} = \overline{DF} - \overline{EF} \Rightarrow \overline{DE} = 10 - 3 \Rightarrow \overline{DE} = 7\ m$$

$$\overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} \Rightarrow \overline{CE} = 3\sqrt{3} + 7\ m$$

6. (Unicamp-SP) Caminhando em linha reta ao longo de uma praia, um banhista vai de um ponto **A** a um ponto **B**, cobrindo a distância AB = 1 200 m. Quando em **A**, ele avista um navio parado em **N** de tal maneira que o ângulo $N\hat{A}B$ é de 60°; quando em **B**, verifica que o ângulo $N\hat{B}A$ é de 45°.

a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.

b) Calcule a distância a que se encontra o navio da praia.



$$tg\,60° = \frac{d}{1200-d} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{d}{1200-d} \Rightarrow \sqrt{3}(1600-d) = d$$

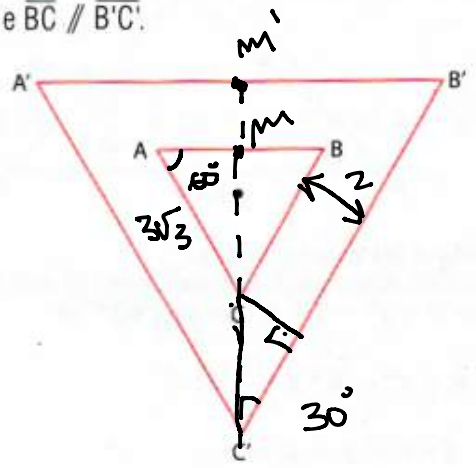
$$1200\sqrt{3} - d\sqrt{3} = d \Rightarrow 1200\sqrt{3} = d + d\sqrt{3}$$

$$1200\sqrt{3} = d(1+\sqrt{3}) \Rightarrow d = \frac{1200\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$d = \frac{1200\sqrt{3} - 4800}{1-3} \Rightarrow d = \frac{1200(\sqrt{3}-3)}{2}$$

$$d = 600(\sqrt{3}-3) \Rightarrow d = 780\ m$$

7. (UFC-CE) Na figura abaixo, temos dois triângulos equiláteros ABC e A'B'C' que possuem o mesmo baricentro, tais que $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$.



Se a medida dos lados de ABC é igual a $3\sqrt{3}$ m e a distância entre os lados paralelos mede 2 m, então a medida das alturas de A'B'C' é igual a:

a) 11,5 m.
b) 10,5 m.
c) 9,5 m.
d) 8,5 m.
e) 7,5 m.

$\overline{M'M} = 2\ m$

$\operatorname{sen} 30° = \dfrac{2}{\overline{CC'}}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{CC'}$

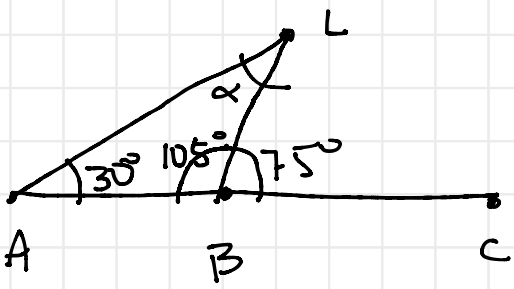
$CC' = 4\ m$

$\operatorname{sen} 60° = \dfrac{MC}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{MC}{3\sqrt{3}} \Rightarrow MC = \dfrac{9}{2}$

$\overline{M'C'} = \overline{M'M} + \overline{MC} + \overline{CC'} \Rightarrow M'C' = 2 + 4 + \dfrac{9}{2} \Rightarrow M'C' = 10{,}5\ m$

8. (ITA-SP) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos **A**, **B** e **C**. O comandante, quando o navio está em **A**, observa um farol **L** e calcula o ângulo $L\hat{A}C = 30°$. Após navegar 4 milhas até **B**, verifica o ângulo $L\hat{B}C = 75°$. Quantas milhas separam o farol do ponto **B**?

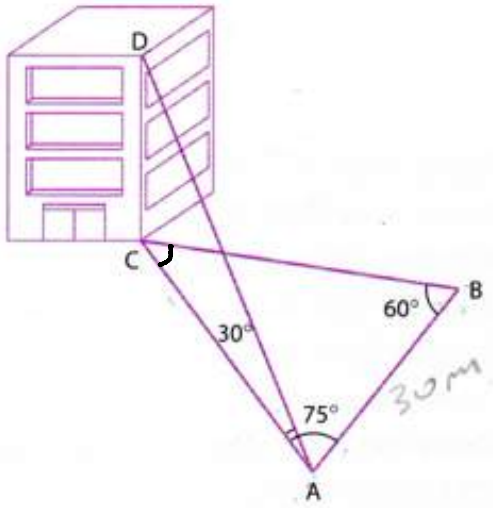
a) 4
b) $2\sqrt{2}$
c) $\dfrac{8}{3}$
d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
e) 1



$\alpha = 180 - (105 + 30) = 45°$

$\dfrac{LB}{\operatorname{sen} 30°} = \dfrac{4}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow \dfrac{LB}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow LB = 2\sqrt{2}\ \text{milhas}$

9. (UnB-DF) Um observador, situado no ponto **A**, distante 30 m do ponto **B**, vê um edifício sob um ângulo de 30°, conforme a figura. Baseado nos dados da figura, determine a altura do edifício em metros e divida o resultado por $\sqrt{2}$.
(Dados: AB = 30 m; med $(C\hat{A}D) = 30°$;
med $(C\hat{A}B) = 75°$; med $(A\hat{B}C) = 60°$;
med $(D\hat{C}A) = 90°$.)



a) 10 m b) 11 m c) 12 m d) 14 m e) 15 m

$\hat{C} = 180 - (60 + 75)$

$\hat{C} = 45°$

$\frac{30}{\text{sen}45°} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen}60°}$

$\frac{30}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\overline{AC} = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{30\sqrt{6}}{2}$

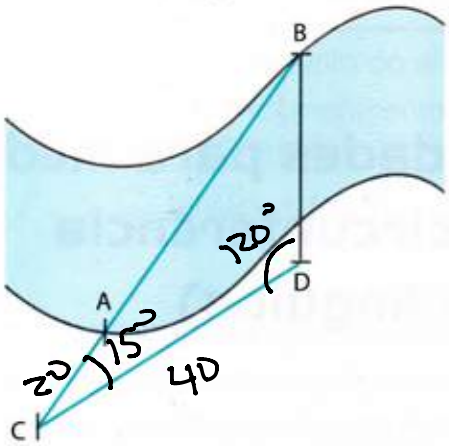
$\overline{AC} = 15\sqrt{6}$ m

$tg\,30° = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{DC}}{15\sqrt{6}} \Rightarrow \overline{DC} = \frac{15\sqrt{6}\sqrt{3}}{3}$

$\overline{DC} = 5\sqrt{18} \Rightarrow \overline{DC} = 5\sqrt{2\,3^2} \Rightarrow \overline{DC} = 15\sqrt{2}$ m

$\frac{\overline{DC}}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 15$

10. (Vunesp) Para calcular a distância entre duas árvores situadas nas margens opostas de um rio, nos pontos **A** e **B**, um observador que se encontra junto a **A** afasta-se 20 m da margem, na direção da reta AB, até o ponto **C** e depois caminha em linha reta até o ponto **D**, a 40 m de **C**, do qual ainda pode ver as árvores.
Tendo verificado que os ângulos $D\hat{C}B$ e $B\hat{D}C$ medem, respectivamente, cerca de 15° e 120°, que valor ele encontrou para a distância entre as árvores, se usou a aproximação $\sqrt{6} \simeq 2{,}4$?



$\hat{B} = 180 - (120 + 15°)$

$\hat{B} = 45°$

$\frac{40}{\text{sen}45°} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen}120°}$

$\rightarrow \text{sen}120° = \text{sen}60°$

$\frac{40}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

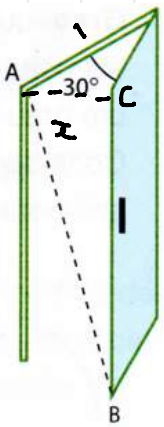
$\overline{BC} = \frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{6}$

$\overline{AB} = \overline{BC} - \overline{AC} \Rightarrow \overline{AB} = 20\sqrt{6} - 20 \Rightarrow \overline{AB} = 20(\sqrt{6} - 1)$

$\overline{AB} = 20(2{,}4 - 1) \Rightarrow \overline{AB} = 20 \times 1{,}4 \Rightarrow \overline{AB} = 28\ m$

11. (PUC-MG) Uma porta retangular de 2 m de altura por 1 m de largura gira 30°, conforme a figura.
A distância entre os pontos **A** e **B**, em metros, é:

a) $\sqrt{5}$.
b) $\sqrt{3}$.
c) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.
d) $\sqrt{4 + \sqrt{3}}$.
e) $\sqrt{6 - \sqrt{3}}$.



$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 30°$

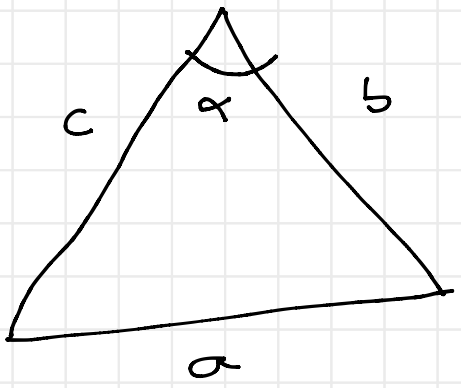
$x^2 = 2 - x\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2 = 2 - \sqrt{3}$

$\overline{AB}^2 = 2^2 + x^2 \Rightarrow \overline{AB}^2 = 4 + 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{6 - \sqrt{3}}$

12. (ITA-SP) Os lados de um triângulo medem **a**, **b** e **c** centímetros. Qual o valor do ângulo interno desse triângulo, oposto ao lado que mede **a** centímetros, se forem satisfeitas as relações: $3a = 7c$ e $3b = 8c$?

a) 30° **b)** 60° **c)** 45° **d)** 120° **e)** 135°



$3a = 7c \Rightarrow a = \frac{7c}{3}$

$3b = 8c \Rightarrow b = \frac{8c}{3}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha \Rightarrow$

$\left(\frac{7c}{3}\right)^2 = \left(\frac{8c}{3}\right)^2 + c^2 - 2.\frac{8c}{3}.c.\cos\alpha$

$\frac{49c^2}{9} = \frac{64c^2}{9} + c^2 - \frac{16c^2}{3}.\cos\alpha \qquad (\div c^2)$

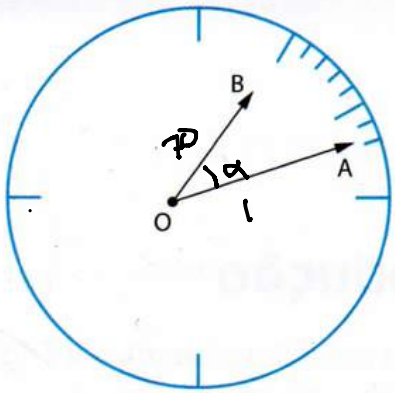
$\frac{49}{9} = \frac{64}{9} + 1 - \frac{16}{3}.\cos\alpha$

$\frac{49}{9} = \frac{64}{9} + \frac{9}{9} - \frac{48}{9}.\cos\alpha$

$49 - 64 - 9 = -48.\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{-24}{-48} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$

13. (UFG-GO) O mostrador do relógio de uma torre é dividido em 12 partes iguais (horas), cada uma das quais é subdividida em outras 5 partes iguais (minutos). Se o ponteiro das horas (OB) mede 70 cm e o ponteiro dos minutos (OA) mede 1 m, qual será a distância AB, em função do ângulo entre os ponteiros, quando o relógio marcar 1 hora e 12 minutos?



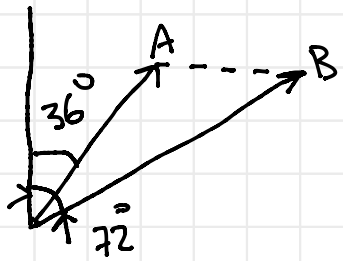
Ponteiro horas:

$\frac{360}{12} = 30^\circ$ (1 hora)

1h 12 min = 72 min

60 min — 30°
72 min — x

$x = \frac{30 \times 72}{60} = 36^\circ$



Ponteiro minutos:

60 min — 360°
12 min — y

$y = \frac{12 \times 360}{60} \Rightarrow y = 72$

$\alpha = y - x$

$\alpha = 72 - 36 \Rightarrow \alpha = 36^\circ$

$\overline{AB}^2 = 0{,}7^2 + 1^2 - 2 \times 0{,}7 \times 1 \times \cos 36^\circ$

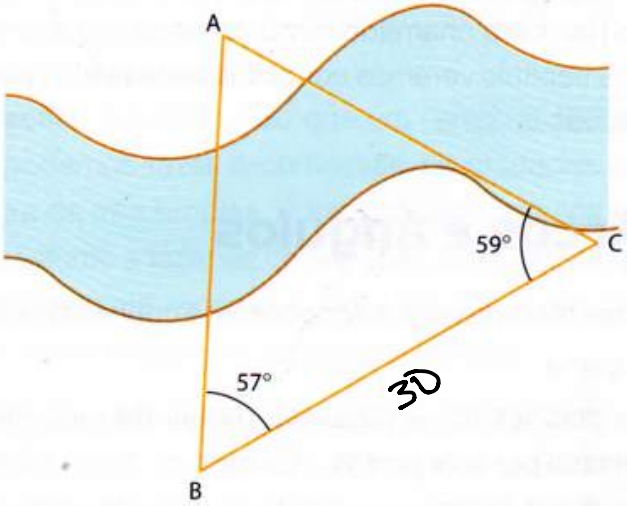
$\overline{AB}^2 = 1{,}49 - 1{,}4 \times 0{,}8$

$\overline{AB}^2 = 1{,}49 - 1{,}12$

$\overline{AB}^2 = 0{,}37$

$\overline{AB} = \sqrt{0{,}37} \Rightarrow \overline{AB} \cong 0{,}6\ m$

14. (UFPE) Uma ponte deve ser construída sobre um rio, unindo os pontos **A** e **B**, como ilustrado na figura abaixo. Para calcular o comprimento AB, escolhe-se um ponto **C**, na mesma margem em que **B** está, e medem-se os ângulos CBA = 57° e ACB = 59°. Sabendo que BC mede 30 m, indique, em metros, a distância AB. (Dado: use as aproximações sen 59° ≈ 0,87 e sen 64° ≈ 0,90.)



$\hat{A} = 180 - (57 + 59)$

$\hat{A} = 180 - 116$

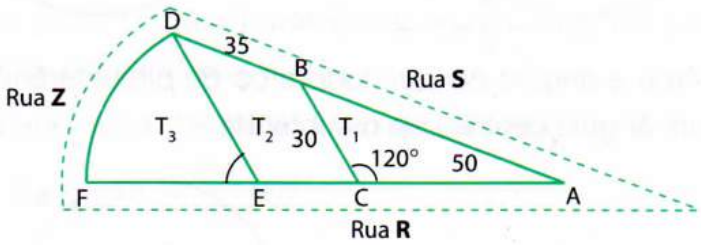
$\hat{A} = 64°$

$$\frac{30}{\operatorname{sen} 64°} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} 59°}$$

$$\overline{AB} = \frac{\operatorname{sen} 59 \times 30}{\operatorname{sen} 64°}$$

$$\overline{AB} = \frac{0{,}87 \times 30}{0{,}9} \Rightarrow \overline{AB} = 29 \text{ m}$$

15. (Vunesp) Dois terrenos, T_1 e T_2, têm frentes para a rua **R** e fundos para a rua **S**, como mostra a figura. O lado BC do terreno T_1 mede 30 m e é paralelo ao lado DE do terreno T_2. A frente AC do terreno T_1 mede 50 m e o fundo BD do terreno T_2 mede 35 m. Ao lado do terreno T_2 há um outro terreno, T_3, com frente para a rua **Z**, na forma de um setor circular de centro **E** e raio ED.



Determine:

a) as medidas do fundo AB do terreno T_1 e da frente CE do terreno T_2.

b) a medida do lado DE do terreno T_2 e o perímetro do terreno T_3.

(a)

$$\overline{AB}^2 = 30^2 + 50^2 - 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \cos 120°$$

$$\overline{AB}^2 = 900 + 2500 - 3000 \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{AB}^2 = 3400 + 1500$$

$$\overline{AB}^2 = 4900$$

$$\overline{AB} = 70 \text{ m}$$

$$\frac{50}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{70}{\operatorname{sen} 120} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 120°}{70}$$

$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{14}$; $\hat{B} = \hat{D}$

$$\frac{70+35}{\operatorname{sen}120} = \frac{\overline{AE}}{\operatorname{sen}\hat{D}} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{(70+35)\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\overline{AE} = \frac{105\cdot 5\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{14}_{7}}\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt{3}}} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{525}{7}$$

$$\overline{CE} = \overline{AE} - 50 \Rightarrow \overline{CE} = \frac{525}{7} - 50$$

$$\overline{CE} = \frac{525-350}{7} \Rightarrow \overline{CE} = \frac{175}{7} \Rightarrow \overline{CE} = 25\ m$$

(b) Os triângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ADE}$ são semelhantes

$$\frac{\overline{DE}}{30} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{DE} = \frac{30\times 105}{70} \Rightarrow \overline{DE} = \frac{3150}{70}$$

$\overline{DE} = 45\ m$

315 | 7
35 | 45
0

Perímetro da curva (P_c)

$P = 2\times\pi\times r \Rightarrow P = 2\pi 45 \Rightarrow P = 90\pi$ (total do círc.)

$360^\circ - 90\pi$
$60^\circ - x$
$\Rightarrow x = \frac{60\times 90\pi}{360} = \frac{90\pi}{6} \Rightarrow P_c = 15\pi\ m$

$P = 15\pi + 45 + 45 \Rightarrow P = 90 + 15\pi \Rightarrow P = 15(6+\pi)\ m$

16. (Unifor-CE) Em um paralelogramo ABCD, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ medem, respectivamente, 4 cm e 7 cm, e θ é o ângulo agudo formado por esses lados. Se a diagonal maior mede $\sqrt{93}$ cm, então o ângulo θ é tal que:

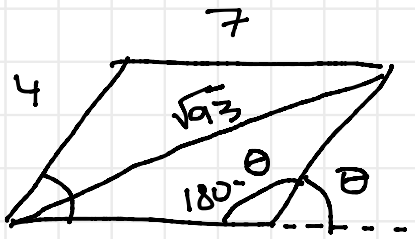
a) $\operatorname{tg}\theta = 2$.

b) $\operatorname{tg}\theta = 1$.

c) $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

d) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



$$(\sqrt{93})^2 = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos(180 - \theta)$$

$$93 = 49 + 16 - 56 \cdot \cos(180 - \theta)$$

$$93 - 49 - 16 = -56 \cdot \cos(180 - \theta)$$

$$28 = -56 \cdot \cos(180 - \theta)$$

$$\cos(180 - \theta) = \frac{28}{-56} = -\frac{1}{2}$$

Mas $\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$

$\therefore \quad \cos\theta = -\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$