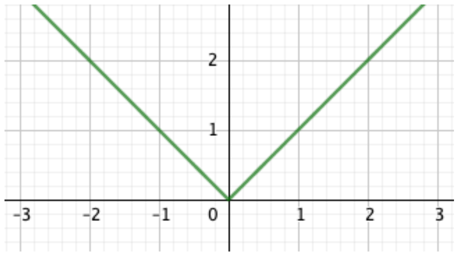
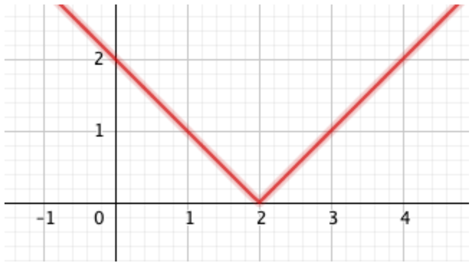
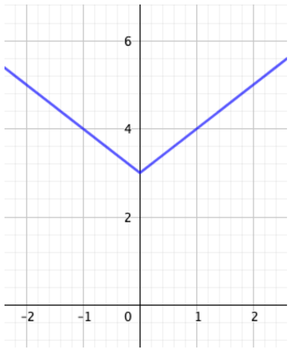
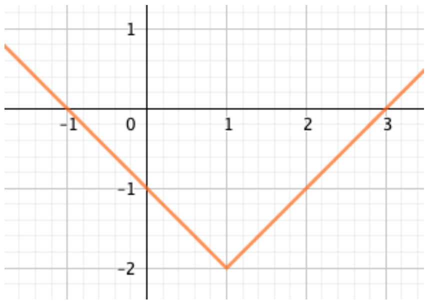
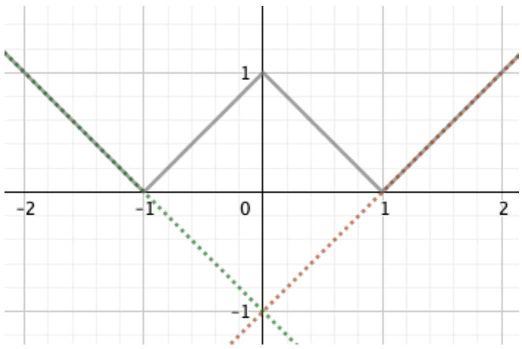
Gráficos de funções modulares, exemplos.
Prof. Simões

Princípio: $f(x) = |g(x)| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} g(x), se\ g(x) \geq 0 \\ -g(x), se\ g(x) < 0 \end{cases}$

1) $f(x) = \|x\| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$	
2) $f(x) = \|x - 2\|$ $f(x) = \begin{cases} x - 2, & se\ x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2), & se\ x - 2 < 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x - 2, & se\ x \geq 2 \\ -x + 2, & se\ x < 2 \end{cases}$	
3) $f(x) = \|x\| + 3$ $f(x) = \begin{cases} x + 3, & se\ x \geq 0 \\ -x + 3, & se\ x < 0 \end{cases}$	
4) $f(x) = \|x - 1\| - 2$ $f(x) = \begin{cases} (x - 1) - 2, & se\ x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) - 2, & se\ x - 1 < 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x - 3, & se\ x \geq 1 \\ -x - 1, & se\ x < 1 \end{cases}$	
5) $f(x) = \|\|x\| - 1\|$ $f(x) = \begin{cases} \|x - 1\|, & se\ x > 0 \\ \|-x - 1\|, & se\ x < 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} (x - 1), & se\ x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1), & se\ x - 1 < 0 \\ \\ (-x - 1), & se - x - 1 \geq 0 \\ -(-x - 1), & se - x - 1 < 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x - 1, & se\ x \geq 1 \\ -x + 1, & se\ x < 1 \\ \\ -x - 1, & se\ \ x \leq -1 \\ x + 1, & se\ \ x > -1 \end{cases}$	

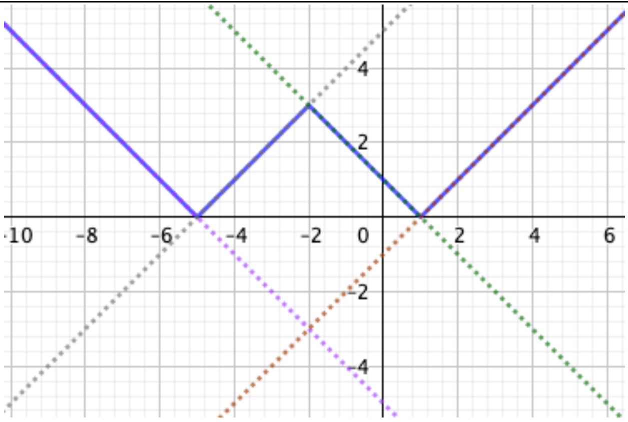
6) $f(x) = ||x+2|-3|$

$$f(x) = \begin{cases} |(x+2)-3|, & se\ x+2 \geq 0 \\ |-(x+2)-3|, & se\ x+2 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} |x-1|, & se\ x \geq -2 \\ |-x-5|, & se\ x < -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1), se\ x-1 \geq 0\ \ e\ x \geq -2 \\ -(x-1), se\ x-1 < 0\ e\ x \geq -2. \\ \\ (-x-5), se - x - 5 \geq 0\ e\ \ x < -2 \\ -(-x-5), se - x - 5 < 0\ e\ \ x < -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1, se\ x \geq 1 \\ -x+1, se - 2 \leq x < 1 \\ \\ -x-5, se\ x \leq -5 \\ x+5, se - 5 < x < -2 \end{cases}$$



7) $f(x) = |x-1| + |x+2| - 1$

$$|x-1| = \begin{cases} (x-1), se\ x-1 \geq 0 \\ -(x-1), se\ x-1 < 0 \end{cases}$$

$$|\boldsymbol{x}-\mathbf{1}| = \begin{cases} (\boldsymbol{x}-\mathbf{1}), \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{1} & (\mathbf{1}) \\ -(\boldsymbol{x}-\mathbf{1}), \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} < \mathbf{1} & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

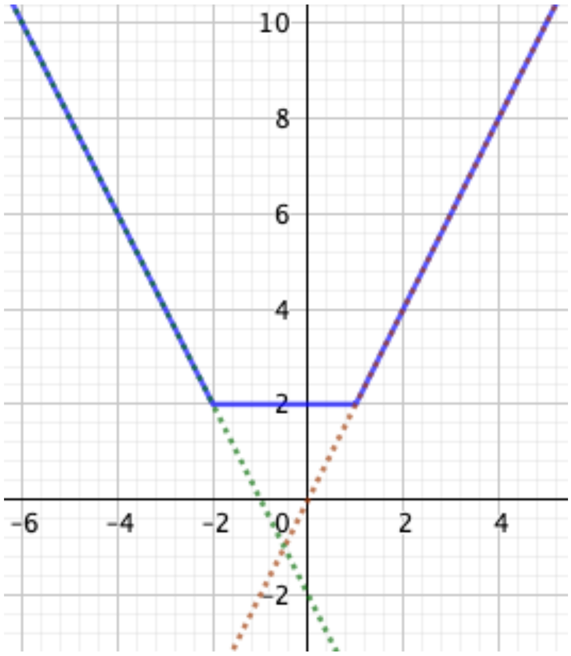
$$|x+2| = \begin{cases} (x+2), se\ x+2 \geq 0 \\ -(x+2), se\ x+2 < 0 \end{cases}$$

$$|\boldsymbol{x}+\mathbf{2}| = \begin{cases} (\boldsymbol{x}+\mathbf{2}), \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} \geq -\mathbf{2} & (\mathbf{3}) \\ -(\boldsymbol{x}+\mathbf{2}), \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} < -\mathbf{2} & (\mathbf{4}) \end{cases}$$

Para $x < -2$, casos 2 e 4.
$f(x) = -(x-1) - (x+2) - 1$
$f(x) = -x + 1 - x - 2 - 1 \Rightarrow f(x) = -2x - 2$

Para $-2 \leq x < 1$, casos 2 e 3
$f(x) = -(x-1) + (x+2) - 1$
$f(x) = -x + 1 + x + 2 - 1 \Rightarrow f(x) = 2$

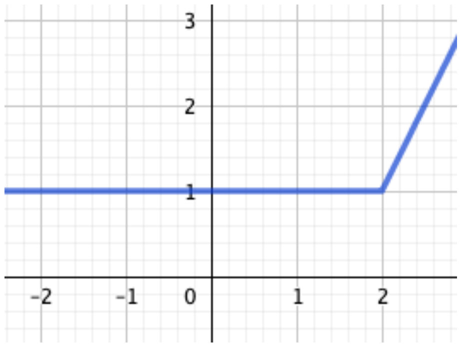
Para $x \geq 1$, casos 1 e 3
$f(x) = (x-1) + (x+2) - 1$
$f(x) = x - 1 + x + 2 - 1 \Rightarrow f(x) = 2x$



8) $f(x) = |x-2| + x - 1$

$$f(x) = \begin{cases} (x-2) + x - 1, & se\ x - 2 \geq 0 \\ -(x-2) + x - 1, & se\ x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & se\ x \geq 2 \\ 1 & se\ x < 2. \end{cases}$$

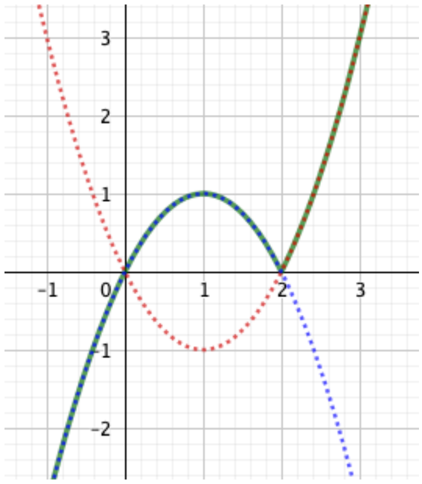


9) $f(x) = x|x-2|$

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2), & se\ x - 2 \geq 0. \\ x[-(x-2)], & se\ x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x \Rightarrow x' = 0, x'' = 2;\ a > 0 \\ -x^2 + 2x \Rightarrow x' = 0, x'' = 2;\ a < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & se\ x \geq 2. \\ -x^2 + 2x, & se\ x < 2. \end{cases}$$

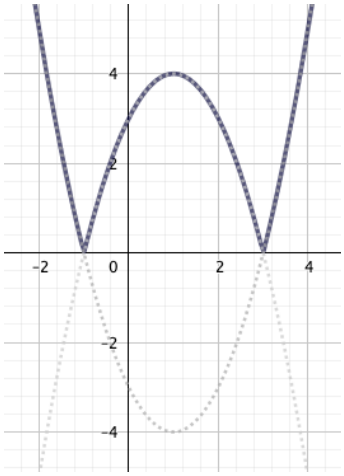


10) $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & se\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ -(x^2 - 2x - 3), & se\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x' = -1, x'' = 3;\ a > 0 \\ -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x' = -1, x'' = 3;\ a < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & se\ x \leq -1\ ou\ x \geq 3 \\ -x^2 + 2x + 3, & se - 1 < x < 3. \end{cases}$$



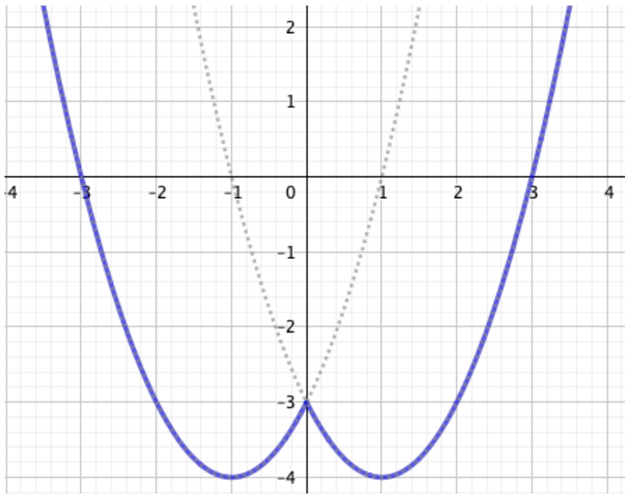
11) $f(x) = |x|^2 - 2|x| - 3$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & se\ x \geq 0 \\ (-x)^2 - 2(-x) - 3, & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & se\ x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3, & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x' = -1, x'' = 3;\ a > 0 \\ x^2 + 2x - 3 \Rightarrow x' = -3, x'' = 1;\ a > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & se\ x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3, & sex < 0 \end{cases}$$



Questões de vestibular comentadas

(FGV-SP) Relativamente à função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x| + |x - 1|$, é correto afirmar que

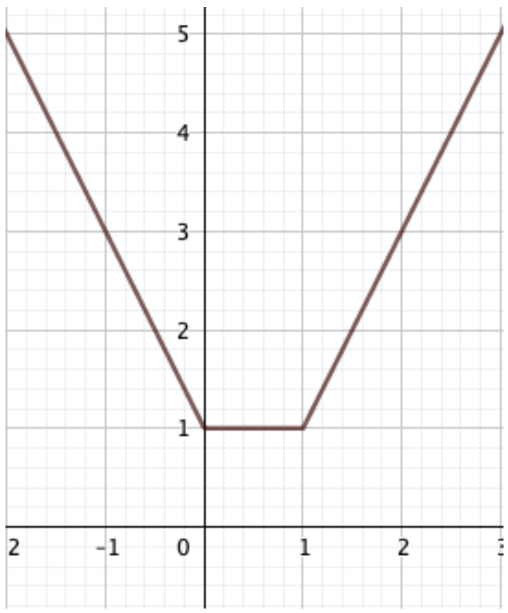
A) o gráfico de **f** é a reunião de duas semirretas.

B) o conjunto imagem de **f** é o intervalo $[1, +\infty[$.

C) **f** é crescente para todo $x \in \mathbb{R}$.

D) **f** é decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$.

E) o valor mínimo de **f** é 0.



Conforme exemplo 7:

$$f(x) = |x| + |x - 1|$$

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \quad (1) \\ -x, & se\ x < 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} (x - 1), se\ x \geq 1 & (3) \\ -(x - 1), se\ x < 1 & (4) \end{cases}$$

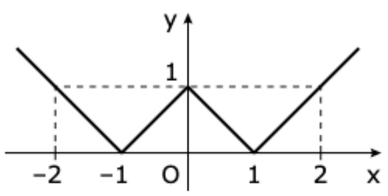
Para $x < 0$, casos 2 e 4.
$f(x) = -x - (x - 1)$
$f(x) = -x - x + 1 \Rightarrow f(x) = -2x + 1$

Para $0 \leq x < 1$, casos 1 e 4
$f(x) = x - (x - 1)$
$f(x) = x - x + 1 \Rightarrow f(x) = 1$

Para $x \geq 1$, casos 1 e 3
$f(x) = x + (x - 1)$
$f(x) = x + x - 1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$

Portanto o gráfico seria o representado ao lado, e alternativa correta é a B.

(UFES)



O gráfico anterior representa a função:

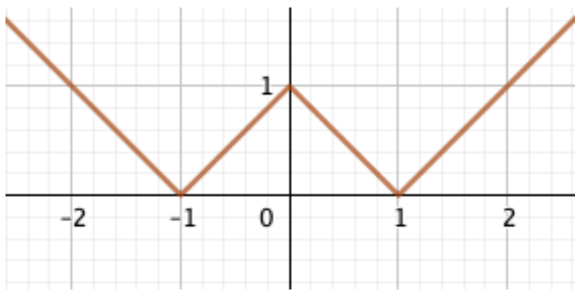
A) $f(x) = ||x| - 1|$

B) $f(x) = |x - 1| + |x + 1| - 2$

C) $f(x) = ||x| + 2| - 3$

D) $f(x) = |x - 1|$

E) $f(x) = ||x| + 1| - 2$



Desenvolvidos os gráficos de cada alternativa, teremos:

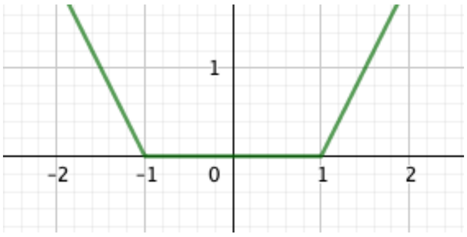
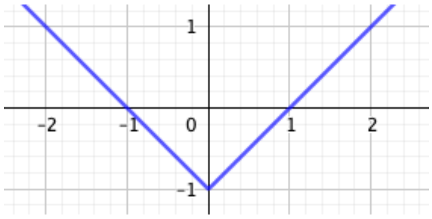
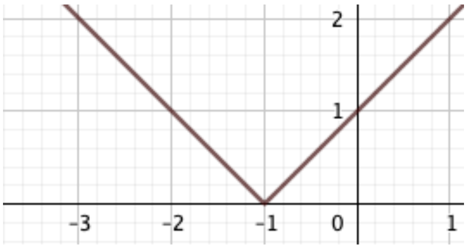
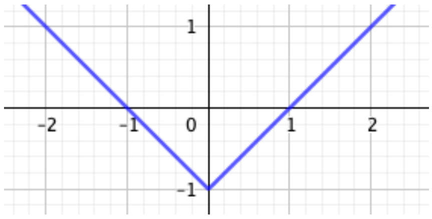
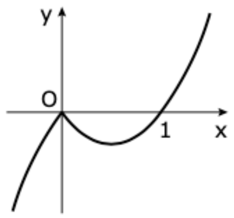
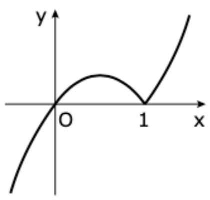
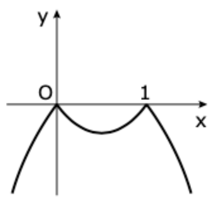
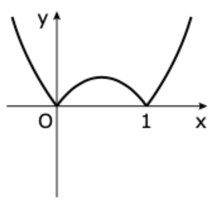
A)$f(x) = ||x| - 1|$

$$f(x) = \begin{cases} |x - 1|, & se\ x \geq 0 \\ |-x - 1|, & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1), & se\ x - 1 \geq 0\ e\ se\ x \geq 0 \\ -(x - 1), & se\ x - 1 < 0\ e\ se\ x \geq 0 \\ \\ (-x - 1), & se - x - 1 \geq 0\ e\ se\ x < 0 \\ -(-x - 1), & se - x - 1 < 0\ e\ se\ x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1), & se\ x \geq 1\ e\ se\ x \geq 0 \\ -(x - 1), & se\ x < 1\ e\ se\ x \geq 0 \\ \\ (-x - 1), & se\ \ x \leq -1\ e\ se\ x < 0 \\ -(-x - 1), & se\ \ x > -1\ e\ se\ x < 0 \end{cases}$$

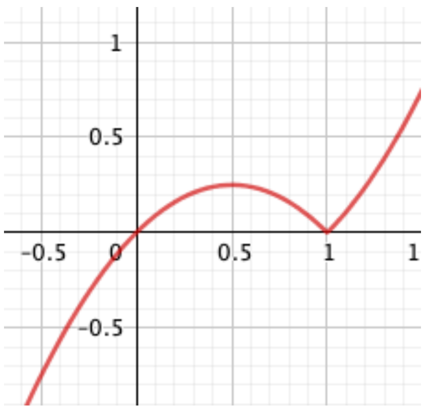
Cujo gráfico está ao lado e corresponde à alternativa correta. Os demais gráficos são:

<table>
<tr>
<td>B) $f(x) = |x-1| + |x+1| - 2$, conforme exemplo 7:
</td>
<td>C) $f(x) = ||x| + 2| - 3$, conforme exemplo 6:

Obs.: só duas condições serão possíveis no final</td>
</tr>
<tr>
<td>D) $f(x) = |x+1|$, conforme exemplo 2:
</td>
<td>E) $f(x) = ||x| + 1| - 2$, conforme exemplo 5:

Obs.: só duas condições serão possíveis no final</td>
</tr>
<tr>
<td>(UFMG) Considere a função f(x) = x|1 − x|. Assinale a alternativa em que o gráfico dessa função está correto.
A)

B)

C)

D)
</td>
<td>$f(x) = x|1-x|$

$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & se\ 1-x \geq 0. \\ x[-(1-x)], & se\ 1-x < 0 \end{cases}$

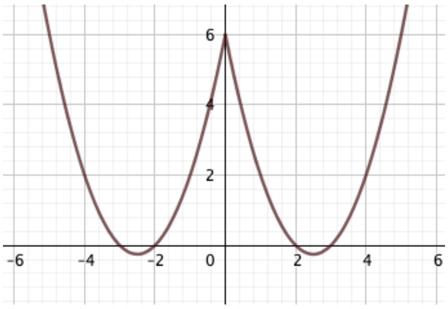
$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x \Rightarrow x' = 0, x'' = 1;\ a < 0 \\ \quad x^2 - x \Rightarrow x' = 0, x'' = 1;\ a > 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & se\ x \leq 1. \\ x^2 - x, & se\ x > 1. \end{cases}$

Cujo gráfico é:

Correspondente à alternativa B</td>
</tr>
<tr>
<td>(UFLA-MG) Se y = |x|² − 5|x| + 6, a afirmativa correta é:
A) y se anula somente para quatro valores de x.
B) y possui apenas um ponto de mínimo.
C) y se anula somente para dois valores de x.
D) y não é uma função par.</td>
<td>$f(x) = |x|^2 - 5|x| + 6$, conforme demonstrando no exemplo 11, corresponderá a:

$f(x) = x^2 - 5x + 6,\ \ se\ x \geq 0$
$f(x) = x^2 + 5x + 6,\ \ se\ x < 0$

Cujo gráfico está ao lado.</td>
</tr>
</table>



Sua análise mostra que a alternativa correta é a letra A

(UFRGS-RS) Para $-1 < x < \frac{1}{2}$, o gráfico da função $y = |x + 1| + |2x - 1|$ coincide com o gráfico da função $y = ax + b$. Os valores de **a** e **b** são, respectivamente,

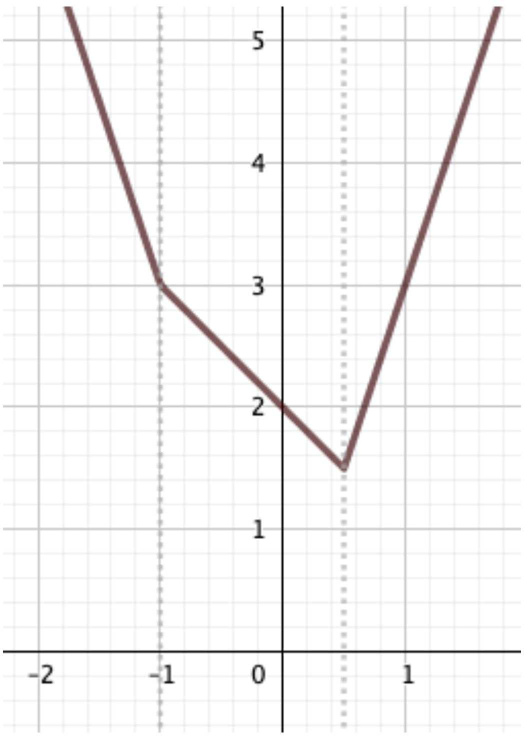
A) −1 e −1.

B) 2 e −1.

C) −1 e 2.

D) $\frac{1}{2}$ e −1.

E) $-\frac{1}{2}$ e 1.



Desenvolvendo o gráfico da função dada, conforme o exemplo 7, temos:

$$f(x) = |x + 1| + |2x - 1|$$

$$|x + 1| = \begin{cases} (x + 1), & se\ x \geq -1 \quad (1) \\ -(x + 1), & se\ x < -1 \quad (2) \end{cases}$$

$$|2x - 1| = \begin{cases} (2x - 1), & se\ x \geq \frac{1}{2} \quad (3) \\ -(2x - 1), & se\ x < \frac{1}{2} \quad (4) \end{cases}$$

Para $x < -1$, casos (2) e (4)
$f(x) = -(x + 1) - (2x - 1) = -x - 1 - 2x + 1$
$f(x) = -3x$

Para $-1 \leq x < \frac{1}{2}$, casos (1) e (4)
$f(x) = (x + 1) - (2x - 1) = x + 1 - 2x + 1$
$f(x) = x + 1 - 2x + 1 = -x + 2$

Para $x \geq \frac{1}{2}$, casos (1) e (3)
$f(x) = (x + 1) + (2x - 1) = x + 1 + 2x - 1$
$f(x) = 3x$

Cujo gráfico está ao lado. É possível observar que, no intervalo dado $-1 < x < \frac{1}{2}$, a intersecção com a reta $y = ax + b$, ocorre no intervalo definido por $f(x) = -x + 2$. Portanto:

$a = -1\ e\ b = 2$

Alternativa C