Demonstração das propriedades dos logaritmos, prof. Simões

Definição

$\log_b a = c \Rightarrow b^c = a$, com $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$

Consequência: $\log_b b^c = c$, pois $b^c = b^c$ (1)

Propriedade do produto

$\log_b(M \cdot N) = \log_b M + \log_b N$

Demonstração:

Fazendo $\log_b M = x$, vem que $b^x = M$

Fazendo $\log_b N = y$, vem que $b^y = N$

Então: $\log_b(M \cdot N) = \log_b(b^x \cdot b^y) = \log_b b^{x+y} = x + y$, por (1)

Mas $x = \log_b M$ e $y = \log_b N$

Assim $\log_b(M \cdot N) = \log_b M + \log_b N$, CQD

Propriedade do quociente

$\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$

Demonstração:

Fazendo $\log_b M = x$, vem que $b^x = M$

Fazendo $\log_b N = y$, vem que $b^y = N$

Então: $\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b \left(\frac{b^x}{b^y}\right) = \log_b b^{x-y} = x - y$, por (1)

Mas $x = \log_b M$ e $y = \log_b N$

Assim $\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$, CQD

Propriedade da potência do logaritmando

$\log_b M^p = p \cdot \log_b M$

Demonstração:

Fazendo $\log_b M = x$, vem que $b^x = M$

Então: $\log_b M^p = \log_b (b^x)^p = \log_b b^{xp} = x \cdot p$, por (1)

Mas $x = \log_b M$

Assim, $\log_b M^p = p \cdot \log_b M$, CQD

Propriedade da potência da base

$$\log_{b^p} M = \frac{1}{p} \cdot \log_b M$$

Pela definição, $\log_{b^p} M = c \Rightarrow (b^p)^c = M$

Desenvolvendo $(b^p)^c = (b^c)^p \Rightarrow b^c = M^{\frac{1}{p}}$

Novamente, pela definição: $b^c = M^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \log_b M^{\frac{1}{p}} = c$

Conforme demonstrado acima: $\log_b M^{\frac{1}{p}} = c \Rightarrow \frac{1}{p}\log_b M = c$

Logo: $\log_{b^p} M = \frac{1}{p}\log_b M$, CQD

Expoente logarítmico

$$b^{\log_b M} = M$$

Demonstração:

Pela definição, $b^{\log_b M} = M \Rightarrow \log_b M = \log_b M$, CQD

Mudança de base

$$\log_b M = \frac{\log_c M}{\log_c b}$$

Demonstração:

Fazendo $\log_b M = x$, vem que $b^x = M$

Aplicando o logaritmo dos dois lados: $\log_c b^x = \log_c M \Rightarrow x \cdot \log_c b = \log_c M \Rightarrow x = \frac{\log_c M}{\log_c b}$

Mas $x = \log_b M$

Assim, $\log_b M = \frac{\log_c M}{\log_c b}$, CQD