universitas Ensino Médio	Prova: ☐ Mensal ☐ de recuperação ■ Bimestral ☐ de faltoso 3º bimestre	Disciplina: MATEMÁTICA		
Data: /09/2018	Professor: SIMÕES	Aluno:	Núm.:	Classe: 1ª

Instruções:
1. Esta folha ■ deve ser devolvida ☐ não deve ser devolvida Nota:
2. Nesta prova, você ☐ pode usar calculadora ■ não pode usar calculadora

Instruções: Os cálculos podem ser a lápis e **respostas a caneta no local indicado**. A curva pode ser a lápis e os pontos devem ser a caneta, com as coordenadas indicadas também a caneta. Valor da prova: 10 pontos. Valor das questões: indicado.

1. (1,0 ponto) (UERJ 2016) Seja a função $f(x)$ definida por $f(x) = x^2 - 2kx + 29$ com k pertencente ao conjunto dos números reais. O valor mínimo da função $f(x)$ é 4. Assim, o valor positivo do

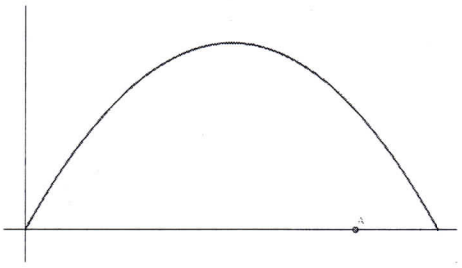
$k = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow 4 = -\frac{(-2k)^2 - 4.1.29}{4.1} \Rightarrow 4 = -\frac{4k^2 - 116}{4}$

$16 = -4k^2 + 116 \Rightarrow 4k^2 = 116 - 16 \Rightarrow k^2 = \frac{100}{4}$

$k^2 = 25 \Rightarrow k = 5$

Resposta: $k = 5$

2. a) (1,5 ponto) Um jogador chuta uma bola em direção ao gol, de modo que ela descreve uma parábola com função $h(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$, onde h é a altura e x a posição horizontal da bola a partir do jogador. A base da trave está situada a 8 metros do jogador, no ponto A, e tem uma altura de 2,44 m. Calcule a altura máxima alcançada pela bola, (b) determine se a bola passará acima ou abaixo da trave e (c) em que posição a bola tocará novamente o chão.



(a) $k = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow k = -\frac{4+0}{-4/5} \Rightarrow k = \frac{4 \times 5}{4} \Rightarrow k = 5$ m

(b) $h(8) = -\frac{1}{5}.8^2 + 2.8 \Rightarrow h(8) = -\frac{64}{5} + \frac{16}{1} \Rightarrow h(8) = \frac{-64+80}{5}$

$h(8) = \frac{16}{5} \Rightarrow h(8) > 3$ ∴ acima da trave

(c) $-\frac{1}{5}x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{1}{5}x + 2\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}x = 2 \Rightarrow x = 10$ m

Resposta: $h_{max} = 5.0$ m; acima; $x = 10$ m

2. b) (1,5 ponto) Uma antena parabólica está construída de acordo com a equação $f(x) = \frac{1}{4}(x - 3)(x - 5)$. Um engenheiro calcula o foco dessa parábola, no qual será colocado o componente receptor. (a) Qual o ponto determinado por ele? (b) Qual a diretriz dessa parábola?

$f(x) = \frac{1}{4}(x-3)(x-5) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 5x - 3x + 15)$

$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 8x + 15) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + \frac{15}{4}$

$k = -\frac{4 - \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{15}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} \Rightarrow k = -\frac{4 - \frac{15}{4}}{1} \Rightarrow k = -\frac{\frac{16-15}{4}}{1}$

$k = -\frac{1}{4}$; $p = \frac{1}{4 \cdot a} \Rightarrow p = \frac{1}{4 \cdot 1/4} \Rightarrow p = 1$

$x_F = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1/4} = 4$; $y_F = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$; $y_d = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$

Resposta: (a) $(4, 3/4)$

Resposta: (b) $y_d = -5/4$

3) (1,0 ponto) (UFSCAR 2003) O par ordenado (x, y) solução do sistema $\begin{cases} 4^{x+y} = 32 \\ 3^{y-x} = \sqrt{3} \end{cases}$ é:

(1) $4^{x+y} = 32 \Rightarrow 2^{2(x+y)} = 2^5 \Rightarrow 2x + 2y = 5$

(2) $3^{y-x} = \sqrt{3} \Rightarrow 3^{y-x} = 3^{1/2} \Rightarrow y - x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} + x$

(2) em (1) $\Rightarrow 2x + 2\left(\frac{1}{2} + x\right) = 5 \Rightarrow 2x + 1 + 2x = 5$

$4x = 5 - 1 \Rightarrow x = 1$

$y = \frac{1}{2} + x \Rightarrow y = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow y = \frac{1+2}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

Resposta: $(1, 3/2)$

4) (1,0 ponto) (FUNESP-2004) Determine os valores de x para os quais a equação seguinte é verdadeira: $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$

$3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0 \Rightarrow 3^{2x} \cdot 3^1 - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$

fazendo $3^x = y \Rightarrow 3 \cdot y^2 - 4y + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 12 = 4$

$y = \dfrac{4 \pm 2}{6}$

$y' = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$

$y'' = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$

Resposta: $S = \{0, -1\}$

5)(1,0 ponto) (VUNESP-2003) Resolva a equação exponencial determinando o valor de x que a torna verdadeira: $7^{(x-3)} + 7^{(x-2)} + 7^{(x-1)} = 57$

$7^x \cdot 7^{-3} + 7^x \cdot 7^{-2} + 7^x \cdot 7^{-1} = 57$

$7^x \left(\dfrac{1}{7^3} + \dfrac{1}{7^2} + \dfrac{1}{7} \right) = 57$

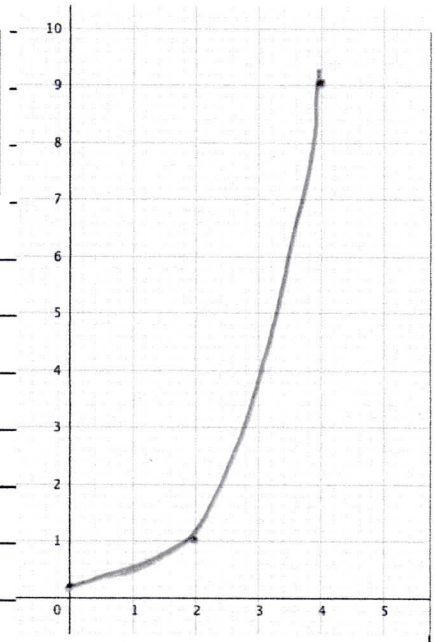
$7^x \dfrac{1 + 7 + 7^2}{7^3} = 57 \Rightarrow 7^x \cdot \dfrac{57}{7^3} = 57$

$7^x = \dfrac{\cancel{57}}{\cancel{57}} \cdot 7^3 \Rightarrow 7^x = 7^3 \Rightarrow x = 3$

Resposta: $x = 3$

6. (2,0) pontos (URFJ-2005, adaptada) A população de uma bactéria é descrita na forma $N(t) = N_0 \cdot a^t$, onde N representa a população em milhares de espécimes e t o tempo em horas. A população de bactérias, no instante t=2 h, era de 1 mil bactérias e no instante t=4 h, 9 mil bactérias. Determine (a) a função exponencial que descreve esse crescimento, (b) trace o gráfico da curva correspondente usando os pontos indicados.

t	$N_B(t)$
0	1/9
2	1
4	9



$N(t) = N_0 \cdot a^t$

$1 = N_0 \cdot a^2 \Rightarrow N_0 = \frac{1}{a^2}$

$9 = N_0 \cdot a^4 \Rightarrow N_0 = \frac{9}{a^4}$

$\frac{1}{a^2} = \frac{9}{a^4} \Rightarrow \frac{a^4}{a^2} = 9 \Rightarrow a^2 = 3^2 \Rightarrow a = 3$

$N_0 = \frac{1}{3^2} \Rightarrow N_0 = \frac{1}{9}$; $N(t) = \frac{1}{9} \cdot 3^t$

$N(0) = \frac{1}{9} \cdot 3^0 = \frac{1}{9}$

$N(2) = \frac{1}{9} \cdot 3^2 = 1$

$N(4) = \frac{1}{9} \cdot 3^4 = 9$

Resposta: (a) $N(t) = 1/9 \cdot 3^t$

7) (Bônus, 2 pontos (sem meio-certo!)) (FUVEST-2004) Seja a função $f(x) = 2^{2x+1}$. Sabe-se que $f(a) = 4 \cdot f(b)$. Qual o valor de $a - b$?

$f(a) = 2^{2a+1}$; $f(b) = 2^{2b+1}$

$f(a) = 4 \cdot f(b)$

$2^{2a+1} = 4 \cdot 2^{2b+1} \Rightarrow 2^{2a+1} = 2^2 \cdot 2^{2b+1}$

$2^{2a+1} = 2^{2b+3} \Rightarrow 2a+1 = 2b+3 \Rightarrow 2a - 2b = 2$

$a - b = 1$

Resposta: $a - b = 1$