UC Medição em ciências e representação gráfica

Análise dimensional

Prof. Simões

$$[G] = M^{-1}L^{3}T^{-2}$$

$$[c] = LT^{-1}$$

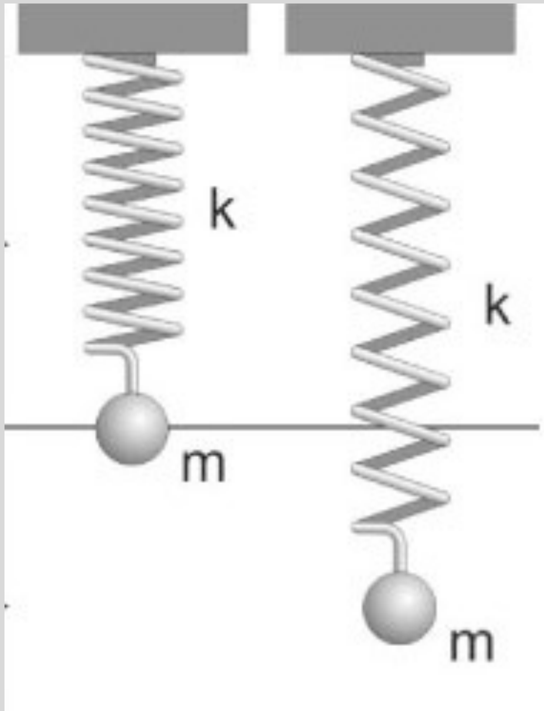
$$[\hbar] = ML^{2}T^{-1}\,.$$

Objetivos dessa aula

- Ao final dessa aula, você deverá ser capaz de:
  - Diferenciar grandeza, dimensão e unidade
  - Definir dimensão
  - Saber representar uma dimensão simples ou composta
  - Determinar as fórmulas dimensionais de qualquer grandeza
  - Usar a homogeneidade para constar a correção de uma fórmula
  - Usar a homogeneidade para definir a dimensão de uma constante
  - Entender o teorema de Brindgman e usá-lo para prever fórmulas que descrevem fenômenos

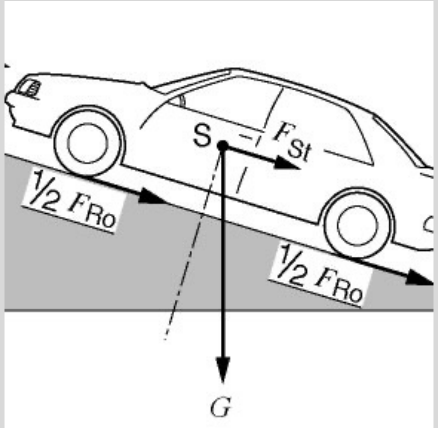
Problema típico

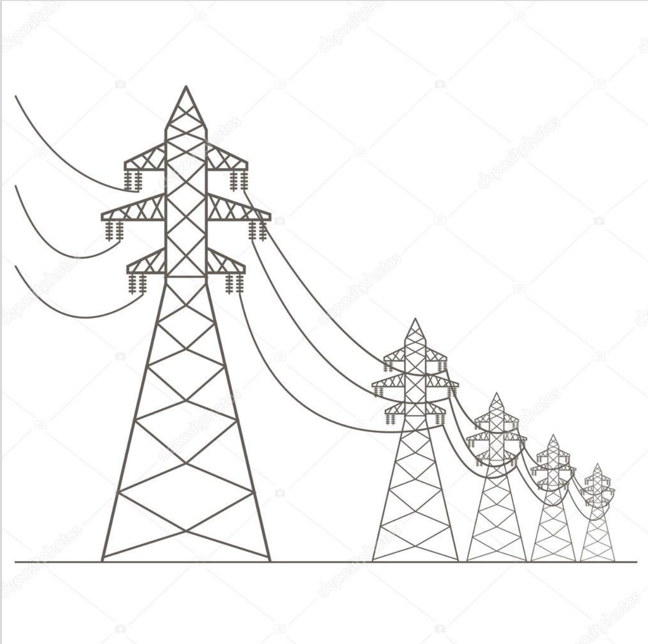
- Numa experiência, verifica-se que o período T de oscilação de um sistema massa-mola depende somente da massa m do corpo e da constante elástica k_{el} da mola e de um fator de proporcionalidade adimensional. Determine uma fórmula para o período de oscilação da mola.



Definições

- Grandezas físicas: são propriedades dos fenômenos que podem ser quantificadas
  - Comprimento
  - Velocidade
  - Vazão
  - Tensão elétrica





- Dimensões: são símbolos ou expressões algébricas, associados a essas grandezas
  - Comprimento: L
  - Tempo: T
  - Velocidade: LT^{-1}

Definições

- As **grandezas** básicas e os símbolos de suas **dimensões** convencionados:

Grandeza de Base	Símbolo da dimensão
Massa	M
Comprimento	L
Tempo	T
Corrente elétrica	I
Temperatura termodinâmica	Θ
Quantidade de substância (moles)	N
Intensidade luminosa	J

Grandezas adimensionais

- Os números puros que aparecem nas fórmulas, assim como π, e, arcos, seno, cossenos, tangente, são adimensionais.

- Também são adimensionais certas grandezas físicas como: coeficiente de atrito, índice de refração, rendimento, número de Reynolds, entre outras.

- Nas fórmulas dimensionais, que veremos adiante, elas aparecem como iguais a “1”.

Representação

- Para indicar que nos referimos à **dimensão** de uma grandeza, colocamos o símbolo dessa grandeza entre **colchetes**.

$m \Rightarrow \text{massa}$

$[m] \Rightarrow \text{dimensão da massa} = M$

$\Delta x \Rightarrow \text{deslocamento}$

$[\Delta x] \Rightarrow \text{dimensão do deslocamento} = L$

$T \Rightarrow$ período (tempo que um pêndulo leva para completar uma oscilação completa)

$[T] \Rightarrow \text{dimensão do período} = T$

Fórmulas dimensionais

- Todas as grandezas físicas podem ser expressas matematicamente em função das grandezas físicas fundamentais por meio de uma **fórmula dimensional**.
- Por exemplo, seja uma grandeza mecânica qualquer X, que depende da massa, do comprimento e do tempo. Sua fórmula dimensional será:

$$[X] = M^a \cdot L^b \cdot T^c$$

Onde:
M, L e T são as dimensões fundamentais
a, b e c são as respectivas potências das dimensões

Fórmulas dimensionais

- Por exempo: determinar a **fórmula dimensional** da velocidade escalar média v_m de um corpo.
- A definição da velocidade média é:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- Expressando dimensionalmente, teremos:

$$[v_m] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]}$$

$$[v_m] = \frac{L}{T} \Rightarrow [v] = L^1 \cdot T^{-1}$$

$$[v_m] = M^0 L^1 T^{-1}$$

Fórmulas dimensionais

- Existem tabelas que apresentam fórmulas dimensionais já calculadas:

Grandeza	Dimensão
Velocidade	LT^{-1}
Aceleração	LT^{-2}
Força	MLT^{-2}
Trabalho	$ML^{2}T^{-2}$
Energia	$ML^{2}T^{-2}$
Torque	$ML^{2}T^{-2}$
Potência	$ML^{2}T^{-3}$
Pressão	$ML^{-1}T^{-2}$
Massa específica	ML^{-3}
Peso específico	$ML^{-2}T^{-2}$

Determinação das fórmulas dimensionais

- **Soma de dimensões**: resultam um uma única dimensão
  - Exemplo: soma D das distâncias D_A, D_B e D_C:

$$[D] = [D_A] + [D_B] + [D_C]$$

$$[D] = L + L + L$$

$$[D] = L$$

- **Produto de dimensões**: resultam no produto das dimensões
  - Exemplo: área A de um triângulo de base B e altura h:

$$[A] = \frac{[B] \cdot [h]}{[2]}$$

$$[\mathrm{A}] = \frac{L \cdot L}{1} \Rightarrow [A] = L^2$$

Exercícios de aplicação

- Elabore a fórmula dimensional das seguintes equações

a) Perímetro da circunferência: $P = \pi \cdot d$

b) Área do círculo: $A = \dfrac{\pi \cdot d^2}{4}$

c) Aceleração linear: $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

d) Energia cinética: $E_c = \dfrac{m \cdot v^2}{2}$

e) Força: $F = m \cdot a$

f) Trabalho: $\tau = F \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha$

g) Constante elástica da mola: $k = \dfrac{F}{\Delta x}$

h) Pressão: $P = \dfrac{F}{A}$

Homogeneidade dimensional

- A equação de uma lei física é **obrigatoriamente homogênea**, isto é, dimensionamente igual em ambos os termos
- Por exempo:
  - A energia total de um fluido em movimento por unidade de peso é chamada de carga H, cuja fórmula está abaixo. No SI ela é medida em metros, e, portanto, sua dimensão é L. Demonstre a homogeneidade da fórmula

$$H = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z$$

Onde:
$p \Rightarrow$ pressão
$\gamma \Rightarrow$ peso específico
$v \Rightarrow$ velocidade
$z \Rightarrow$ altura
$g \Rightarrow$ aceleração normal da gravidade

Homogeneidade dimensional

- Resolução
  - Temos que:

$$H = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z$$

$$[H] = L$$
$$[p] = ML^{-1}T^{-2}$$
$$[\gamma] = ML^{-2}T^{-2}$$
$$[v] = LT^{-1}$$
$$[g] = LT^{-2}$$
$$[z] = L$$

  - Assim:

$$[H] = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-2}T^{-2}} + \frac{(LT^{-1})^2}{1 \cdot (LT^{-2})} + L$$

$$[H] = L + L + L$$

$$[H] = L$$

Homogeneidade dimensional

- Com a homogeneidade dimensional, é possível determinar a dimensão de constantes físicas.
- Por exemplo, a lei de Newton da atração gravitacional, estabelece que:

$$F = G\frac{M \cdot m}{d^2}$$

- Determine a dimensão da constante gravitacional G.

Resolução

- Temos que:

$$F = G\frac{M \cdot m}{d^2}$$

$[F] = \mathrm{MLT}^{-2}$
$[M] = M$
$[m] = M$
$[d] = L$

$[G] = M^x L^y T^z$

- Igualando os termos, vem:

$$M^1L^1T^{-2} = M^xL^yT^z.\frac{M \cdot M}{L^2} \Rightarrow M^1L^1T^{-2} = M^{x+2}L^{y-2}T^z$$

- Assim:

$$x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$$
$$y - 2 = 1 \Rightarrow y = 3$$
$$z = -2$$

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

De fato, seu valor, com unidades do SI é $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

Exercícios propostos

- Verifique a homogeneidade das fórmulas abaixo

a) $s_2 = s_1 + v \cdot \Delta t$

b) $s_2 = s_1 + v_1 \Delta t + \dfrac{a \Delta t^2}{2}$

c) $v_2 = v_1 + a \cdot \Delta t$

d) $v_2^2 = v_1^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$

e) $E = m \cdot \mathrm{c}^2$

Exercícios propostos

- O comportamento de um fluido em movimento pode ser descrito pela lei de Newton da viscosidade pela equação:

$$\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dy}$$

Onde:

$\tau \Rightarrow$ tensão de cizalhamento (mesma dimensão da pressão)

$\frac{dv}{dy} \Rightarrow$ variação da velocidade em relação à

espessura da camada de líquido

$\mu \Rightarrow$ viscosidade dinâmica

Determine a dimensão da viscosidade dinâmica μ.

Teorema de Bridgman

- Com esse teorema, é possível determinar qual a fórmula que rege um fenômeno a partir das variáveis que o afetam.
- Ele diz que se for constatado experimentalmente que uma determinada grandeza física X depende das grandezas A, B, C, etc, independentes entre si, então a grandeza X pode ser expressa da seguinte forma:

$$X = K \cdot A^a \cdot B^b \cdot C^c \dots .$$

onde K é um fator numérico, cujo valor é determinado mediante experiências.

Teorema de Bridgman

- Sendo isso verdade, ou seja:

$$X = K \cdot A^a \cdot B^b \cdot C^c \ldots.$$

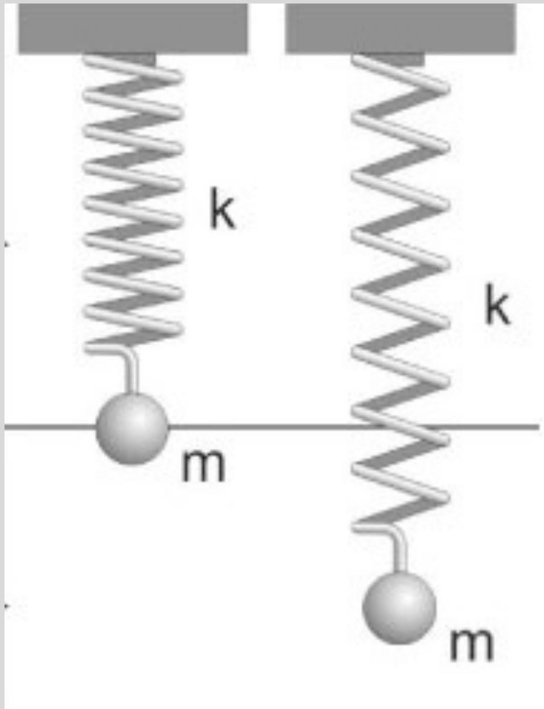
Pela regra da homogeneidade dimensional, a seguinte igualdade deverá ser verificada:

$$[X] = [K] \cdot [A]^a \cdot [B]^b \cdot [C]^c \ldots.$$

- Assim poderão ser calculados os valores a, b e c.

Teorema de Bridgman, exemplo

- Numa experiência, verifica-se que o período T de oscilação de um sistema massa-mola depende somente da massa m do corpo e da constante elástica k_{el} da mola e de um fator de proporcionalidade adimensional. Determine uma fórmula para o período de oscilação da mola.



Teorema de Bridgman, exemplo

- Pelo Teorema de Bridgman, temos:

$$X = K \cdot A^a \cdot B^b \cdot C^c \dots .$$

$$T = K \cdot m^a \cdot k_{el}^b$$

- Como a fórmula deve ser dimensionalmente homogênea, faremos

$$[T] = M^0 L^0 T^1$$

A constante elástica vem da Lei de Hooke: $k = \frac{F}{\Delta x}$. Assim:

$$[k_{el}] = \frac{\left(M \cdot \frac{L}{T^2}\right)}{L}$$

- Então

$$\left[K \cdot m^a \cdot k_{el}^b\right] = 1 \cdot M^{\,a} \cdot \left[\frac{\left(M \cdot \frac{L}{T^2}\right)}{L}\right]^b = M^a \cdot \left[M \cdot \frac{L}{T^2} \cdot \frac{1}{L}\right]^b = M^a \cdot M^b \cdot T^{-2b}$$

$$\left[K \cdot m^a \cdot k_{el}^b\right] = M^{a+b} \cdot T^{-2b}$$

Teorema de Bridgman, exemplo

- Igualando os termos:

$$M^0 \cdot L^0 \cdot T^1 = M^{a+b} \cdot L^0 \cdot T^{-2b}$$

- Calculando os expoentes:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2b = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \; e \; a = \frac{1}{2}$$

- Substituindo em $T = K \cdot m^a \cdot k_{el}^b$, vem:

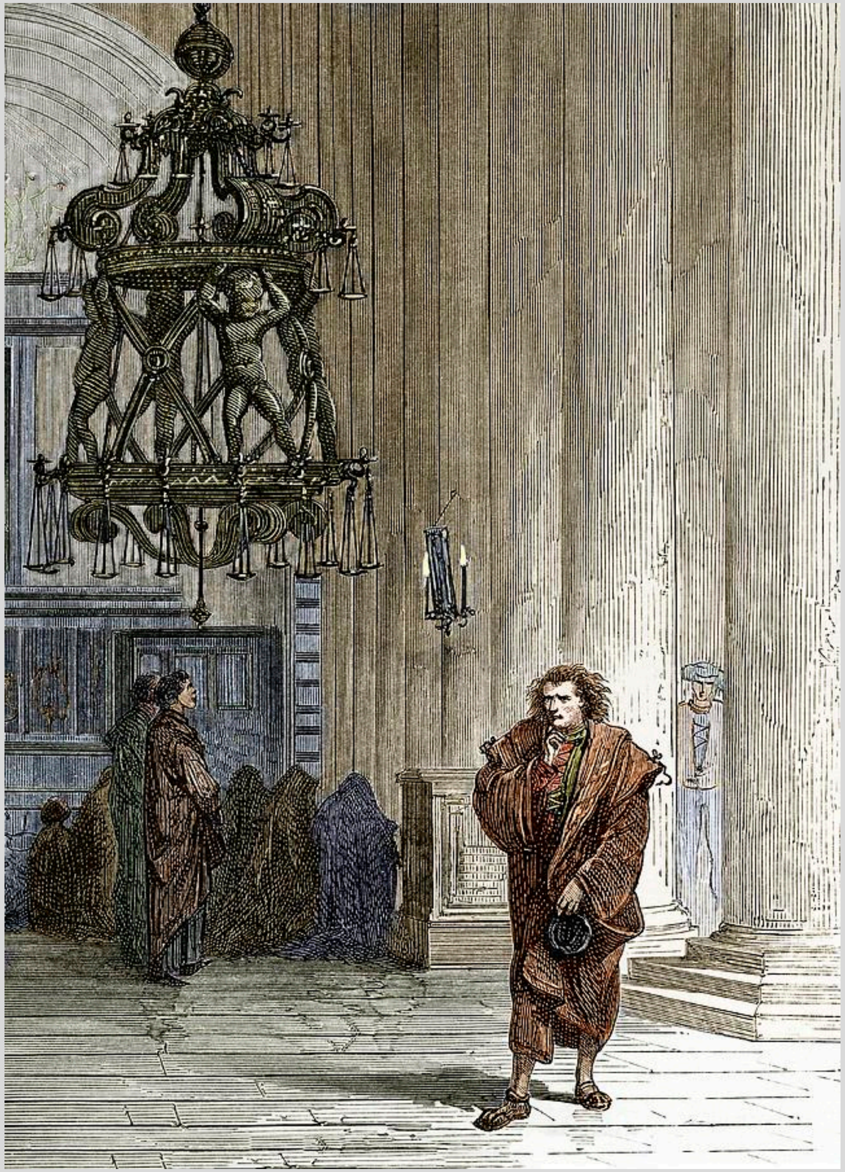
$$T = K \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot K_{el}^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow T = K \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{el}}}$$

- De fato, a fórmula do período de oscilação de um sistema massa-mola é:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{el}}}$$

Exercício proposto

- Conta-se que Galileu, em uma catedral em Pisa, ficou intrigado ao observar que o tempo de oscilação (ou período) de um candelabro (pêndulo) não variava com a força do vento. Ao ler essa ‘história’ um estudante supõe que as grandezas que influem o período de um pêndulo são: a massa do pêndulo, o comprimento da corda e a aceleração normal da gravidade, além de alguma constante de proporcionalidade adimensional. Determine uma fórmula que confirme ou refute a teoria do estudante.



Resumo

- Com as atividades dessa aula, você deve ser capaz de:
  - Diferenciar grandeza, dimensão e unidade
  - Definir dimensão
  - Saber representar uma dimensão simples ou composta
  - Determinar as fórmulas dimensionais de qualquer grandeza
  - Usar a homogeneidade para constar a correção de uma fórmula
  - Usar a homogeneidade para definir a dimensão de uma constante
  - Entender o teorema de Brindgman e usá-lo para prever fórmulas que descrevem fenômenos