UC Medição em ciências e representação gráfica

Análise dimensional - exercícios

Prof. Simões

1 Uma das principais equações da Mecânica quântica permite calcular a energia **E** associada a um fóton de luz em função da frequência **f** da respectiva onda eletromagnética:

$$\boxed{E = hf}$$

Nessa equação, **h** é a constante de Planck. Adotando como fundamentais as grandezas **M** (massa), **L** (comprimento) e **T** (tempo), determine a expressão dimensional de **h**.

$[E] = M L^2 T^{-2}$; $[f] = T^{-1}$

$M L^2 T^{-2} = M^x L^y T^z \cdot T^{-1}$

$M L^2 T^{-2} = M^x L^y T^{z-1}$ $\quad$ $[h] = M L^2 T^{-1}$

$x = 1$; $y = 2$;

$z - 1 = -2 \Rightarrow z = -1$

2 Conforme as teorias de Newton, dois astros de massas respectivamente iguais a **M** e **m**, com centros de massa separados por uma distância **d**, atraem-se gravitacionalmente trocando forças de intensidade **F**, dadas por:

$$\boxed{F = G\frac{Mm}{d^2}}$$

em que **G** é a constante da Gravitação. Em relação às dimensões mecânicas fundamentais – comprimento (**L**), massa (**M**) e tempo (**T**) –, determine a equação dimensional, bem como a unidade SI de **G**.

$[F] = M\ L\ T^{-2}$

$M\ L\ T^{-2} = M^x\ L^y\ T^z \cdot \frac{M \cdot M}{L^2} = M^x \cdot L^y \cdot T^z \cdot M^2 \cdot L^{-2}$

$M L T^{-2} = M^{x+2}\ L^{y-2}\ T^z$

$x+2=1 \Rightarrow x=-1$ $\qquad z=-2$ $\qquad [G] = M^{-1}\ L^3\ T^{-2}$

$y-2=1 \Rightarrow y=3$ $\qquad G \Rightarrow m^3/kg \cdot s^2$

3 A pressão **p** de um número de mols **n** de gás perfeito que ocupa um volume **V** a uma temperatura absoluta **τ** pode ser calculada pela equação de Clapeyron:

$$\boxed{pV = nR\tau}$$

em que **R** é uma constante, denominada constante universal dos gases perfeitos. Adotando como fundamentais as grandezas **F** (força), **L** (comprimento), **T** (tempo) e **θ** (temperatura), determine a expressão dimensional de **R**.

$[p] = F \cdot L^{-2}$; $[V] = L^3$; $[n] = 1$; $[\tau] = \theta$

$$F \cdot L^{-2} \cdot L^3 \cdot \theta^0 \cdot T^0 = \underbrace{F^x \cdot L^y \, T^z \, \theta^k}_{[R]} \cdot \theta$$

$$F^1 \cdot L^1 \cdot T^0 \cdot \theta^0 = F^x \, L^y \, T^z \, \theta^{k+1} \Rightarrow x = 1 ; \; y = 1 ; \; z = 0$$

$k + 1 = 0 \quad k = -1$

$[R] = F \cdot L \cdot \theta^{-1}$

4 (Unirio-RJ) Para o movimento de um corpo sólido em contato com o ar foi verificado experimentalmente que a intensidade da força de resistência $\mathbf{F_r}$ é determinada pela expressão $F_r = k\,v^2$, na qual **v** é o módulo da velocidade do corpo em relação ao ar e **k**, uma constante. A unidade de **k**, no Sistema Internacional (SI), é dada por:

a) $kg \cdot m^{-1}$
b) $kg \cdot m$
c) $kg \cdot m \cdot s^{-1}$
d) $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
e) $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$

$[F_r] = M\,L\,T^{-2}$; $[v] = L.T^{-1}$

$$M.L.T^{-2} = M^x\,L^y\,T^z.(L.T^{-1})^2$$

$$M.L.T^{-2} = M^x\,L^{y+2}\,T^z.L^2.T^{-2}$$

$$M\,L\,T^{-2} = M^x\,L^{y+2}\,T^{z-2}$$

$x = 1$; $y + 2 = 1 \Rightarrow y = -1$

$z - 2 = -2 \Rightarrow z = 0$

$[k] = M\,L^{-1}$; kg/m

5 (Unicamp-SP – mod.) Quando um recipiente aberto contendo um líquido é sujeito a vibrações, observa-se um movimento ondulatório na superfície do líquido. Para pequenos comprimentos de onda $\boldsymbol{\lambda}$, a velocidade de propagação **v** de uma onda na superfície livre do líquido está relacionada à tensão superficial $\boldsymbol{\sigma}$, conforme a equação

$$v = \sqrt{\frac{2\pi\,\sigma}{\rho\,\lambda}}$$

em que $\boldsymbol{\rho}$ é a densidade do líquido. Esta equação pode ser utilizada para determinar a tensão superficial induzindo-se na superfície do líquido um movimento ondulatório com uma frequência **f** conhecida e medindo-se o comprimento de onda $\boldsymbol{\lambda}$.

Determine:

a) a equação dimensional da tensão superficial $\boldsymbol{\sigma}$ em relação à massa **M**, comprimento **L** e tempo **T**.

b) as unidades da tensão superficial $\boldsymbol{\sigma}$ no Sistema Internacional de Unidades.

a) $[v] = L \cdot T^{-1}$; $[2] = 1$; $[\pi] = 1$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow [\rho] = M \cdot L^{-3} \quad ; \quad [\lambda] = L$$

Isolando $\sigma \Rightarrow v^2 = \frac{2\pi\sigma}{\rho \cdot \lambda} \Rightarrow \sigma = \frac{v^2 \cdot \rho \cdot \lambda}{2\pi}$

$$[\sigma] = [L T^{-1}]^2 \cdot M \cdot L^{-3} \cdot L = L^2 T^{-2} M L^{-3} \cdot L$$

$$[\sigma] = M \cdot L^0 T^{-2}$$

b) Unidade de $\sigma \Rightarrow kg/s^2$

6 (Ufla-MG) No estudo de Fluidodinâmica, a intensidade da força viscosa pode ser dada pela equação $F = \eta\, d\, v$, sendo **η** o coeficiente de viscosidade, **d** a distância percorrida pelo fluido e **v** o módulo da sua velocidade de deslocamento. Considerando-se o Sistema Internacional, SI, o coeficiente de viscosidade **η** é dado pelas unidades:

a) $kg \cdot m \cdot s^{-1}$
b) $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
c) $kg \cdot m^{-1} \cdot s$
d) $kg \cdot m \cdot s$
e) $(kg)^{-1} \cdot m \cdot s^{-1}$

Isolando $\eta \Rightarrow$ $F = \eta \cdot d \cdot v \Rightarrow \eta = \dfrac{F}{d \cdot v}$

$$[\eta] = \frac{M \cdot \cancel{L} \cdot T^{-2}}{\cancel{L} \cdot L \cdot T^{-1}} \Rightarrow [\eta] = M L^{-1} T^{-1}$$

$$[\eta] = kg/ms$$

7 No Sistema Internacional (SI), as sete unidades de base são o **metro** (m), o **quilograma** (kg), o **segundo** (s), o **kelvin** (K), o **ampère** (**A**), a **candela** (**cd**) e o **mol** (**mol**). A Lei de Coulomb da Eletrostática permite calcular a intensidade (**F**) da força de interação (atração ou repulsão) trocada entre duas cargas puntiformes Q_1 e Q_2, separadas por uma distância **d**, por meio de uma expressão do tipo:

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1\,Q_2}{r^2}}$$

em que ε_0 é uma constante fundamental da Física. Em relação a ε_0, é **correto** afirmar que:

a) é uma grandeza adimensional.

b) no SI, é medida em $m^{-2}\,s^2\,A^2$.

c) no SI, é medida em $m^{-3}\,kg^{-1}\,A^2$.

d) no SI, é medida em $m^{-3}\,kg^{-1}\,s^4\,A^2$.

e) no SI, é medida em $m^{-3}\,s^4\,A^2$.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$\Delta Q = I \cdot \Delta t$$

corrente elétrica (fundamental)

Tempo

$$[I] = I$$

$$[\Delta t] = T$$

$[F] = M.L.T^{-2}$; $[Q] = I.T$; $[r] = L$

$[4\pi] = 1$

$$M.L.T^{-2} = \frac{1}{\underbrace{M^{x} L^{y} T^{z} I^{k}}_{[\varepsilon_0]}} \cdot \frac{(I\,T)^2}{L^2}$$

$$M\,L\,T^{-2} = M^{-x}\,L^{-y}\,T^{-z}\,I^{-k}\,I^{2}\,T^{2}\,L^{-2}$$

$$M\,L\,T^{-2}\,I^{0} = M^{-x}\,L^{-y-2}\,T^{-z+2}\,I^{-k+2}$$

$-x = 1 \Rightarrow x = -1$

$-y-2 = 1 \Rightarrow -y = 3 \Rightarrow y = -3$

$-z+2 = -2 \Rightarrow -z = -4 \Rightarrow z = 4$

$-k+2 = 0 \Rightarrow k = 2$

$[\varepsilon_0] = M^{-1}\,L^{-3}\,T^{4}\,I^{2}$

unidade $= \dfrac{s^4\,A^2}{kg.m^3}$

8 Adotando como fundamentais as grandezas **M** (massa), **L** (comprimento), **T** (tempo) e **I** (intensidade de corrente elétrica), determine as expressões dimensionais e as respectivas unidades SI das seguintes grandezas físicas:

a) carga elétrica;

b) capacitância eletrostática.

a) $i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta Q = i \cdot \Delta t \Rightarrow [\Delta Q] = I \cdot T$

Unidade: $A \cdot S = C$ (Coulomb)

b) $U = \frac{E}{Q} = \frac{M L^2 T^{-2}}{I T}$; $[U] = M L^2 T^{-3} I^{-1}$

$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow [C] = \frac{I \cdot T}{M . L^2 . T^{-3} . I^{-1}} = M^{-1} L^{-2} T^4 I^2$

Unidade: $\frac{s^4 . A^2}{kg . m^2}$ = farad (F)

9 (Mack-SP) Na equação dimensionalmente homogênea $x = at^2 - bt^3$, em que **x** tem dimensão de comprimento (**L**) e **t** tem dimensão de tempo (**T**), as dimensões de **a** e **b** são, respectivamente:

a) $L\,T$ e $L\,T^{-1}$

b) $L^2\,T^3$ e $L^{-2}\,T^{-3}$

c) $L\,T^{-2}$ e $L\,T^{-3}$

d) $L^{-2}\,T$ e T^{-3}

e) $L^2\,T^3$ e $L\,T^{-3}$

$$x = at^2 - bt^3$$

$$[x] = L \quad \therefore \quad [at^2] = L \quad e \quad [bt^3] = L$$

$$[a]\cdot[t^2] = L \Rightarrow [a]\cdot T^2 = L \Rightarrow [a] = L\,T^{-2}$$

$$[b]\cdot[t^3] = L \Rightarrow [b]\cdot T^3 = L \Rightarrow [b] = L\,T^{-3}$$

10 (ITA-SP) Os valores de **x**, **y** e **z** para que a equação:
(força)^x (massa)^y = (volume) (energia)^z seja dimensionalmente correta são, respectivamente:

a) (–3, 0, 3).
b) (–3, 0, –3).
c) (3, –1, –3).
d) (1, 2, –1).
e) (1, 0, 1).

$$(\text{força})^x \cdot (\text{massa})^y = \text{volume}\,(\text{energia})^z$$

$$(M\,L\,T^{-2})^x \cdot M^y = L^3 \cdot (M\,L^2\,T^{-2})^z$$

$$M^x\,L^x\,T^{-2x}\,M^y = L^3\,M^z\,L^{2z}\,T^{-2z}$$

$$M^{x+y}\,L^x\,T^{-2x} = M^z\,L^{3+2z}\,T^{-2z}$$

$$\begin{cases} x + y = z \\ x = 3 + 2z \\ -2x = -2z \Rightarrow x = z \end{cases}$$

$x = 3 + 2 \cdot x \Rightarrow x = -3 \quad \therefore \quad z = -3$

$x + y = x \Rightarrow y = 0$

$x = -3 \;, \quad y = 0 \;, \quad z = -3$