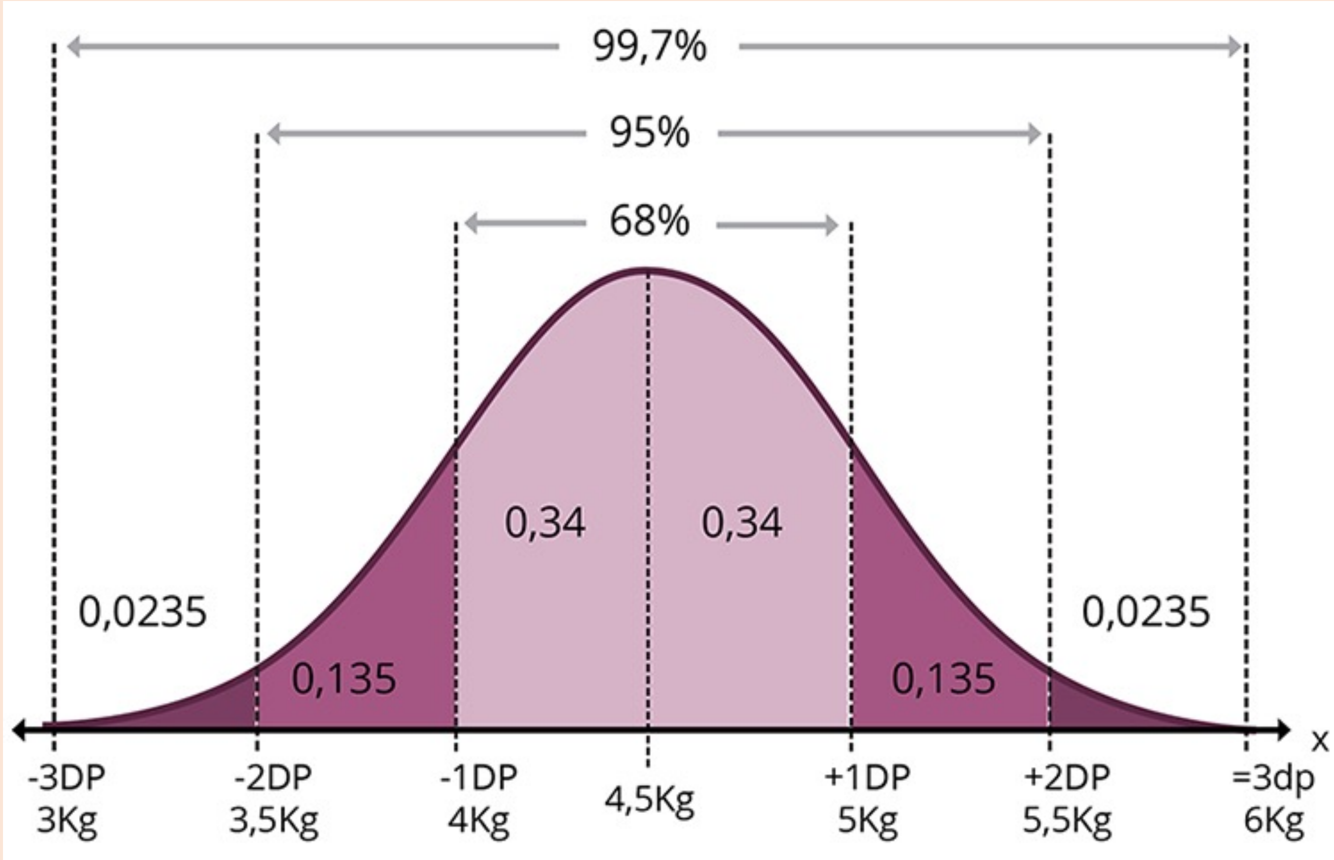
UC Medição em ciências e representação gráfica

Noções de estatística aplicada à medição

Parte II – Distribuição normal de probabilidades

Prof. Simões

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t\,x}}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\,\sigma^2)}\, d\,x$$

Objetivos dessa aula

Ao final dessa aula, você deverá ser capaz de:

- Explicar o que é uma distribuição de frequências.
- Entender o que é a distribuição normal de probabilidades.
- Entender o que é e calcular os valores padronizados para utilização da distribuição normal.
- Interpretar a curva de distribuição normal e seu significado
- Identificar os componentes da tabela de distribuição normal
- Utilizar o cálculo dos valores padronizados e a tabela para prever probabilidades normais

Problema típico

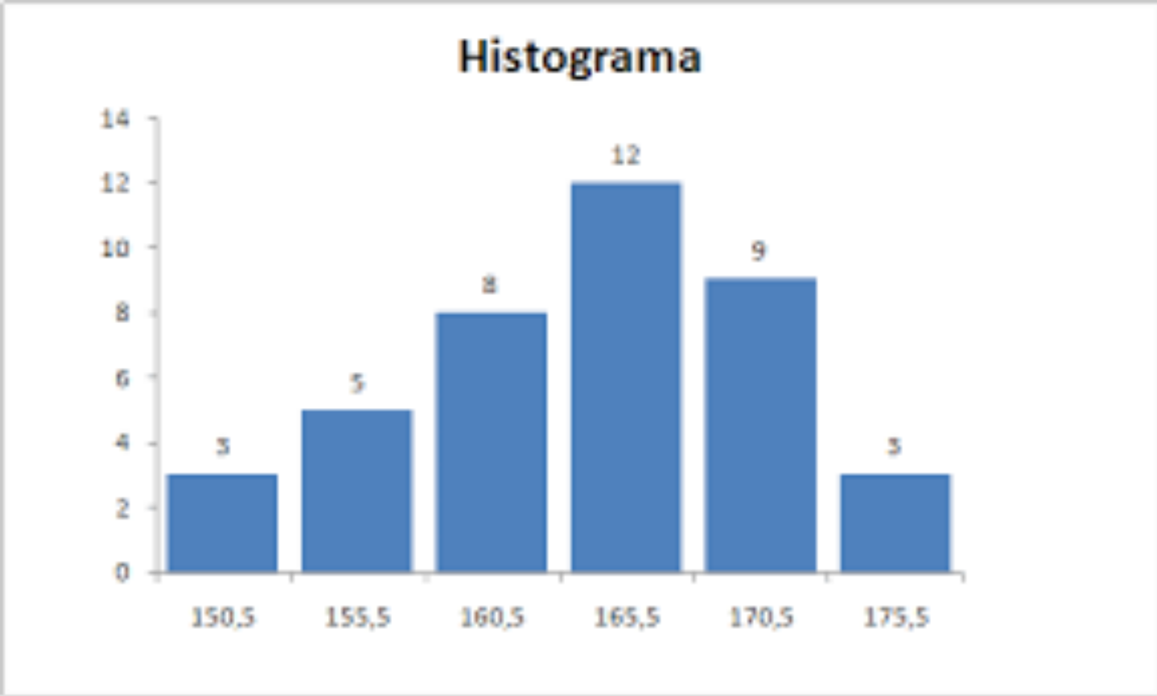
Uma máquina produz esferas com um diâmetro médio de 25,40 mm e desvio padrão de 0,10 mm. Se for escolhida uma esfera ao acaso, qual a probabilidade de esta ter entre 25,40 e 25,52 mm ?

Essa máquina produziu um lote de 1000 esferas. Provavelmente, quantas delas terão entre 25,30 e 25,35 mm de diâmetro?

Distribuição de frequência

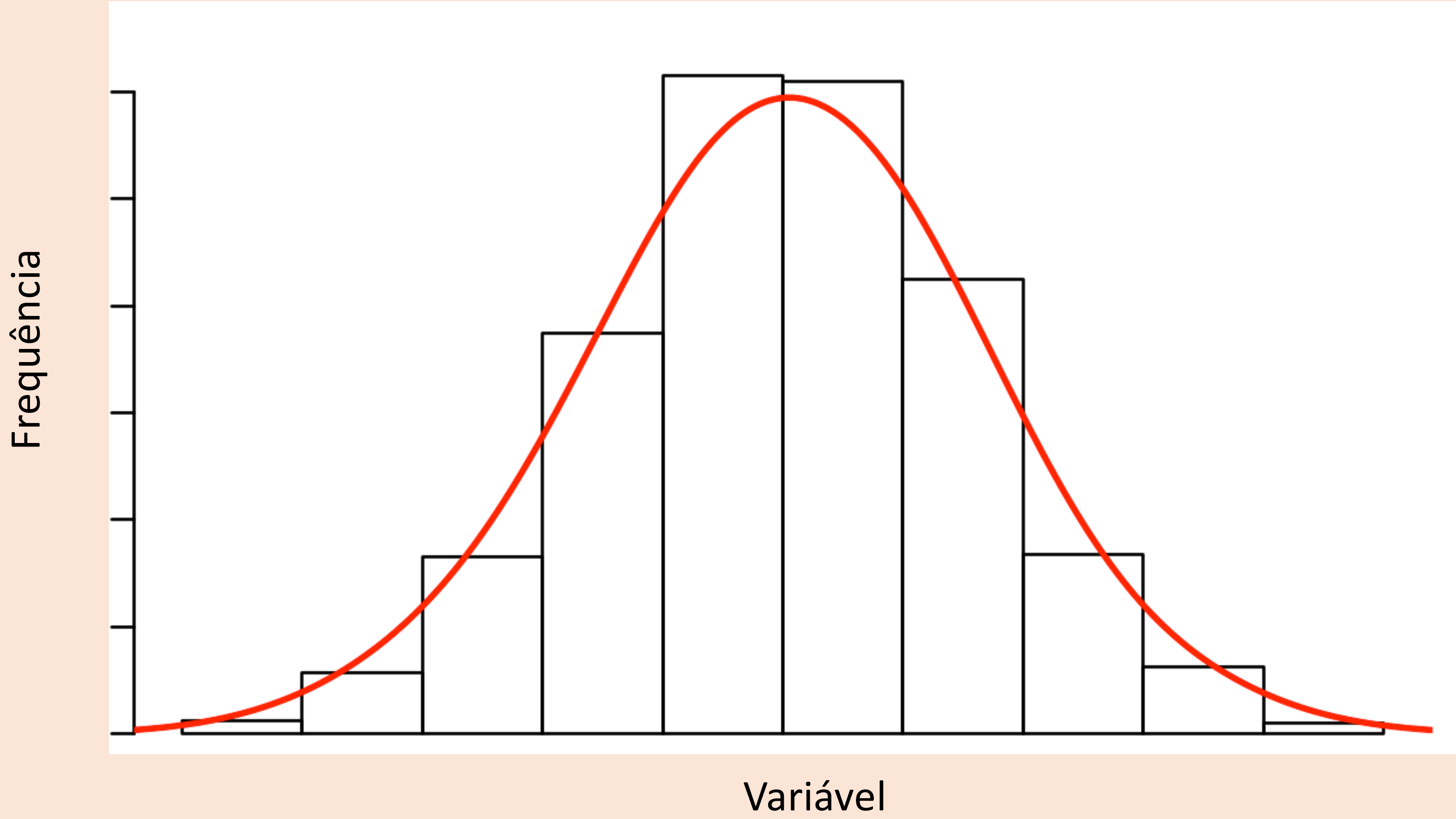
- Vimos que podemos organizar um grande número de dados em uma distribuição de frequências

Dimensão	Quantidade
148 ⊢ 153	3
153 ⊢ 158	5
158 ⊢ 163	8
163 ⊢ 168	12
168 ⊢ 173	9
173 ⊢ 178	3



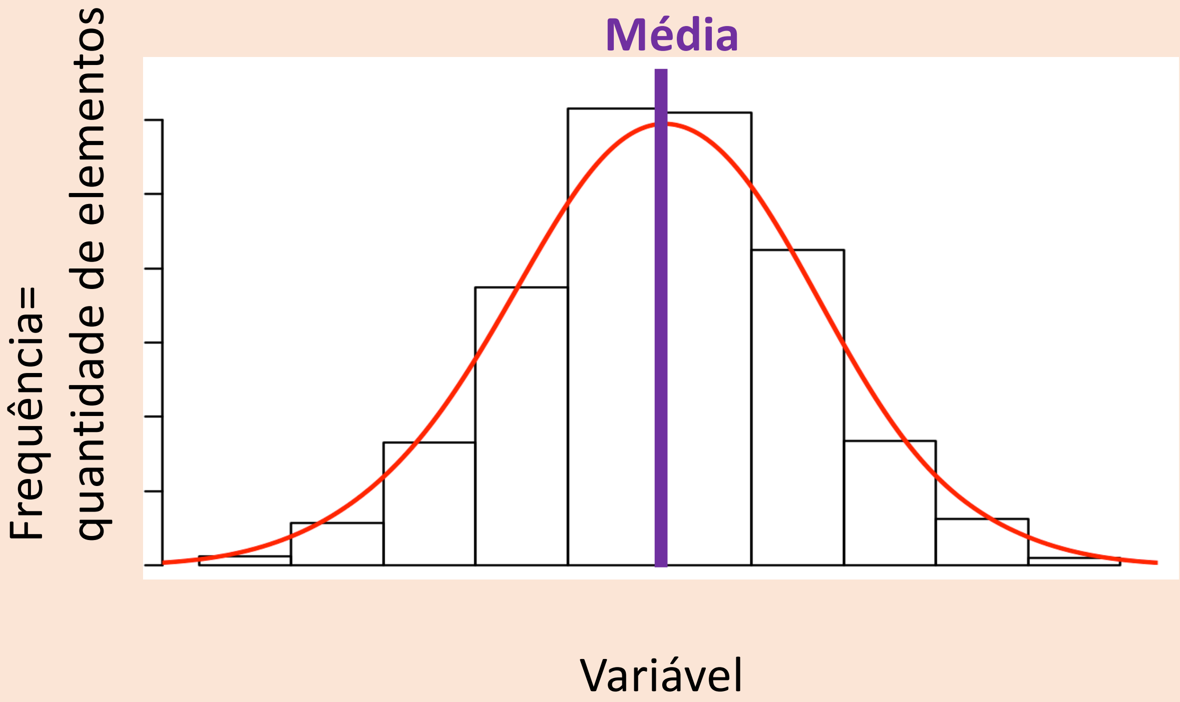
Distribuição normal de probabilidades

- Desde o século XVII, matemáticos e físicos, iniciando com Abraham de Moivre, e incluindo Galileu, Laplace e Gauss, entre outros, observaram que muitos fenômenos comportam-se de acordo com uma curva de distribuição de frequência, que, por sua universalidade, passou a ser chamada de "curva normal".



Distribuição normal de probabilidades

- Com ela, é possível observar que ao passo que nos aproximamos do valor médio, maior a quantidade de elementos com valores próximos a ele.

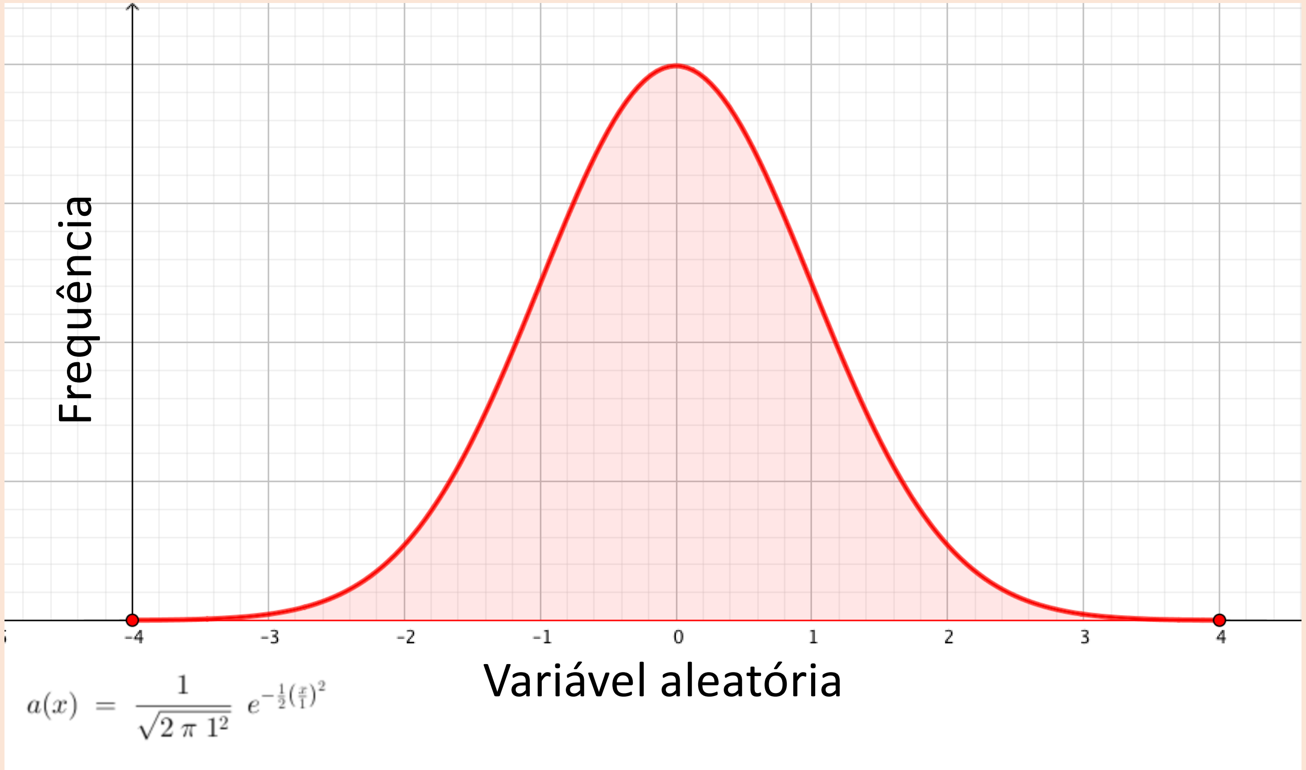


Por exemplo, em um grande grupo de pessoas, quando dizemos que a altura média é de 1,70 m, é razoável supor que a grande maioria tenha uma altura próxima a essa. Entretanto, alguns indivíduos poderão ter bem mais ou bem menos do que essa altura.

Distribuição normal de probabilidades

- Matematicamente, ela é definida pela função:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1\ (100\%)$$



Porém, é mais comum ser usada com tabelas ou programas.

Distribuição normal de probabilidades

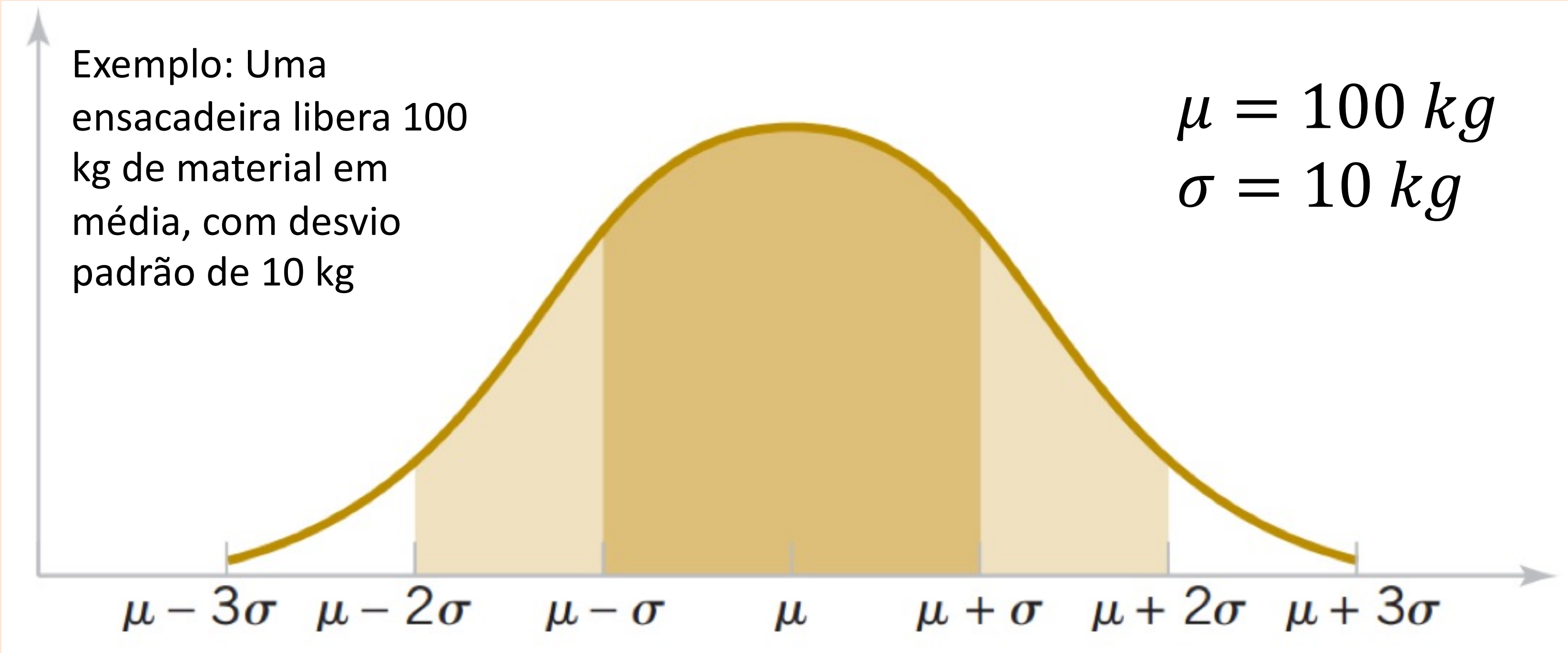
- A regularidade com que os fenômenos obedecem à distribuição normal faz com que ela seja usada para estimar probabilidades.

- Por exemplo, uma máquina produz esferas com um diâmetro médio de 25,40 mm e desvio padrão de 0,10 mm. Se for escolhida uma esfera ao acaso, qual a probabilidade de esta ter entre 25,40 e 25,52 mm ?

- Para responder, precisamos conhecer a **distribuição normal padronizada**.

Distribuição normal padronizada

- Conceito de padronização



Escala efetiva	70	80	90	100	110	120	130	x
Escala padronizada de z	-3	-2	-1	0	1	2	3	z

Os valores de z, chamados **valores padronizados**, correspondem ao número de desvios padrão em relação à média.

Como encontrar o valor padronizado z

- Usamos a fórmula

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Onde:
$x \Rightarrow$ valor a ser padronizado
$\mu \Rightarrow$ média
$\sigma \Rightarrow$ desvio padrão

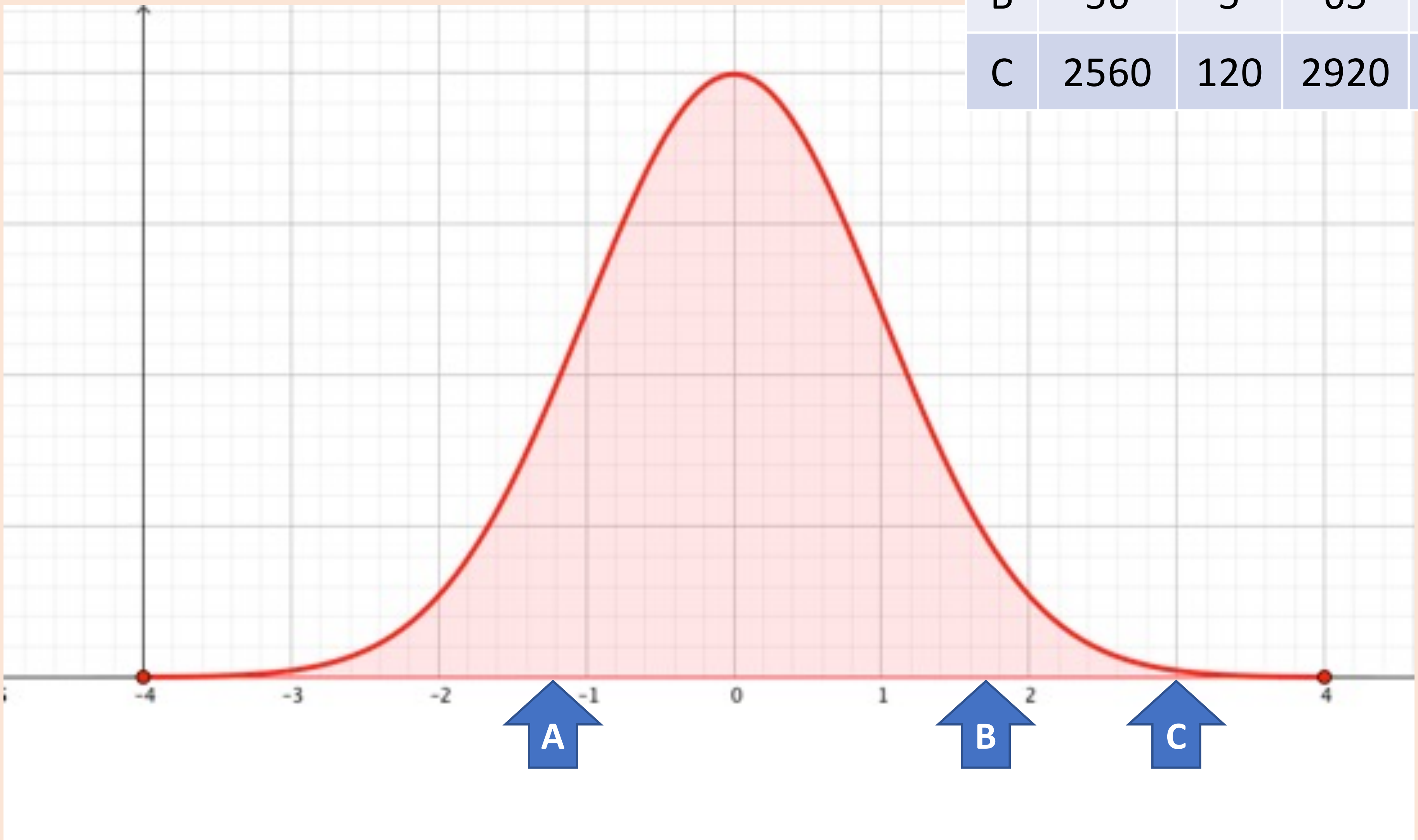
- Exemplos:

Caso	Média: μ	Desvio padrão: σ	Valor considerado: x	Valor padronizado z
A	100	10	88	$z = \frac{88 - 100}{10} = -1{,}2$
B	56	5	65	$z = \frac{65 - 56}{5} = 1{,}8$
C	2560	120	2920	$z = \frac{2920 - 2560}{120} = 3{,}0$

Significado dos valores padronizados

- Embora refiram-se a casos diferentes a padronização permite identificar o afastamento relativo da média.

	μ	σ	x	z
A	100	10	88	$-1,2$
B	56	5	65	1,8
C	2560	120	2920	3,0



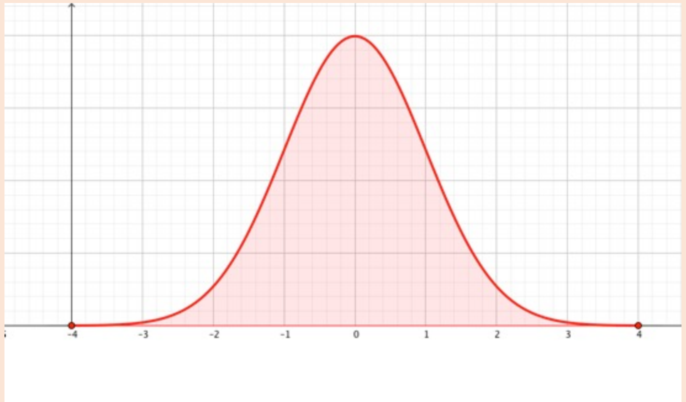
Significado dos valores padronizados

- Inversamente, o mesmo valor de z indica um afastamento similar da média, embora os valores em análise seja diferentes:

Média: μ	**Desvio padrão: σ**	**Valor considerado: x**	**Valor de z**
100 kg	10 kg	108 kg	$z = \frac{108 - 100}{10} = 0{,}8$
56 anos	5 anos	60 anos	$z = \frac{60 - 56}{5} = 0{,}8$
2560 pessoas presentes	120 pessoas presentes	2656 pessoas presentes	$z = \frac{2656 - 2560}{120} = 0{,}8$

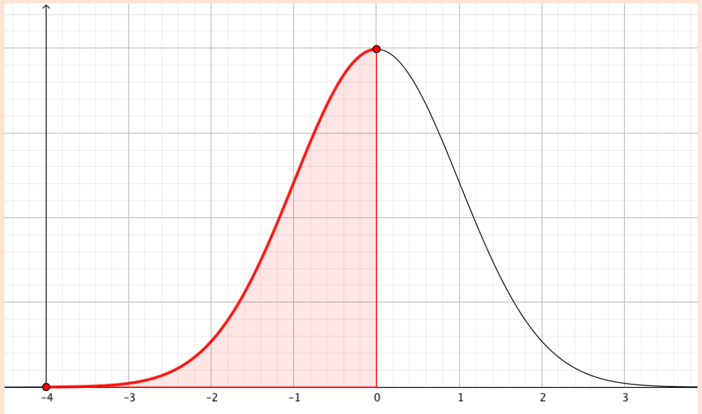
Cálculo da probabilidade na distribuição normal

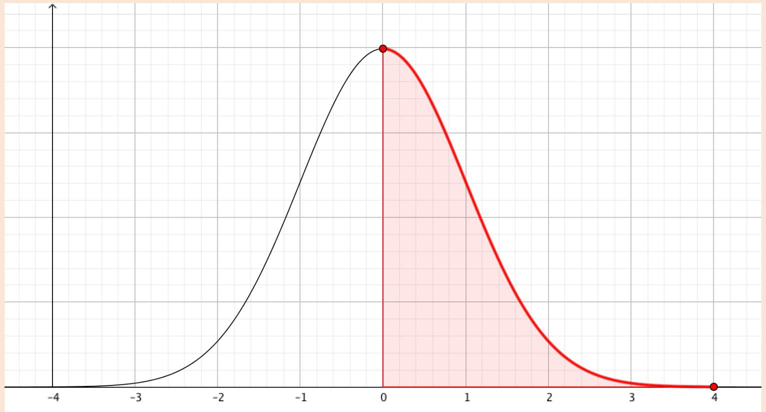
- Princípio básico: a área sob a curva representa a probabilidade da ocorrência de um invervalo.



A área total sob a curva é igual a 1, que corresponde a 100% de probabilidade.

Como a curva é simétrica; cada metade tem área 0,5 = 50%





Na prática, isso significa que uma várivel tem 50% de chances de estar acima ou abaixo da média.

Tabelas da distribuição normal

- Para valores intermediários, é comum usarmos tabelas como esta para encontrar o valor da área sob a curva:

Tabela da Distribuição Normal Reduzida

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	[illegible]	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	[illegible]	0,0517	0,0557	0,0596	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	[illegible]	0,0910	0,0948	0,0987	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,3	0,1179	0,1217	[illegible]	0,1293	0,1331	0,1368	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,4	0,1554	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1736	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,5	0,1915	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,2088	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,6	0,2257	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,2422	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,7	0,2580	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,2734	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,3023	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,9	[illegible]	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015

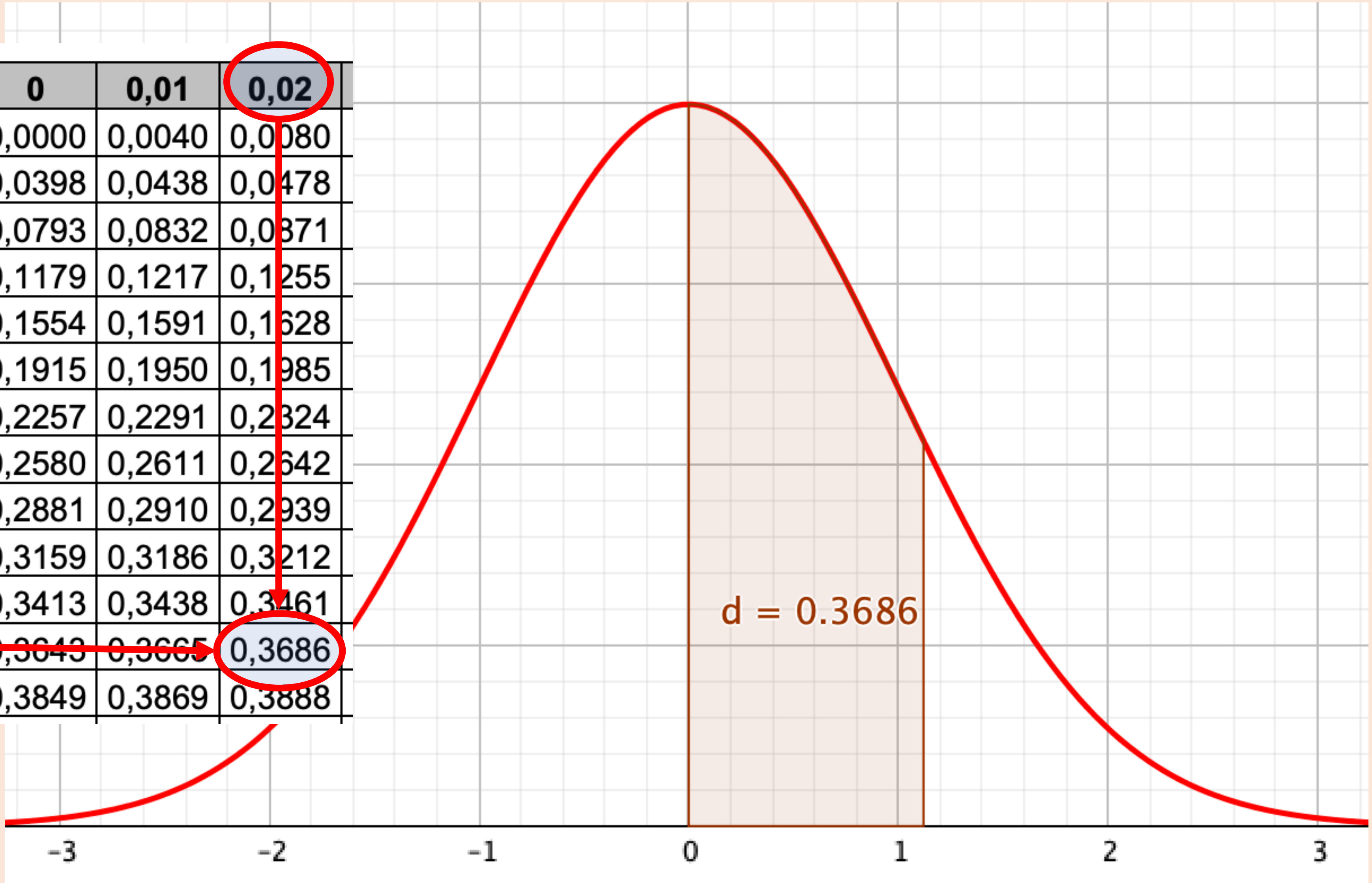
Na primeira coluna e linha, localizamos o valor de z

Os valores do corpo da tabela são a área sob a curva corresponte ao valor de z a partir da média, isso é, a probabilidade

Tabelas da distribuição normal

- Qual a probabilidade correspondente a $z = 1{,}12$

Z	0	0,01	0,02
0,0	0,0000	0,0040	0,0080
0,1	0,0398	0,0438	0,0478
0,2	0,0793	0,0832	0,0871
0,3	0,1179	0,1217	0,1255
0,4	0,1554	0,1591	0,1628
0,5	0,1915	0,1950	0,1985
0,6	0,2257	0,2291	0,2324
0,7	0,2580	0,2611	0,2642
0,8	0,2881	0,2910	0,2939
0,9	0,3159	0,3186	0,3212
1,0	0,3413	0,3438	0,3461
1,1	0,3643	0,3665	0,3686
1,2	0,3849	0,3869	0,3888



Exercícios

1. Usando a tabela normal de probabilidades, encontre a área de probabilidade para os seguintes valores de z:
    1. z= 2,50
    2. z=1,54
    3. z=0,08
    4. z=-1,23
    5. z=-0,55

2. Usando a tabela normal de probabilidades, encontre o valor de z para as seguintes áreas de probabilidade:
    1. 0,1255 (12,55%)
    2. 0,2944 (29,44%)
    3. 0,4616 (46,26%)
    4. 0,4380 (43,80%)
    5. 0,4946 (49,46%)

Aplicação

1. Uma máquina produz esferas com um diâmetro médio de 25,40 mm e desvio padrão de 0,10 mm. Se for escolhida uma esfera ao acaso, qual a probabilidade de esta ter entre 25,40 e 25,52 mm?

2. Qual a probabilidade de uma esfera escolhida ao acaso ter entre 25,30 e 25,60 mm?

3. Qual a probabilidade de uma esfera escolhida ao acaso ter entre 25,50 e 25,60 mm?

Aplicação

4. Qual a probabilidade de uma esfera ter mais de 25,60 mm?

5. Se tivermos um lote de 1000 esferas, quantas provavelmente terão diâmetros entre 25,30 e 25,35 mm?

6. Desse lote, quantas terão, no máximo, 25,25 mm?

Resolução

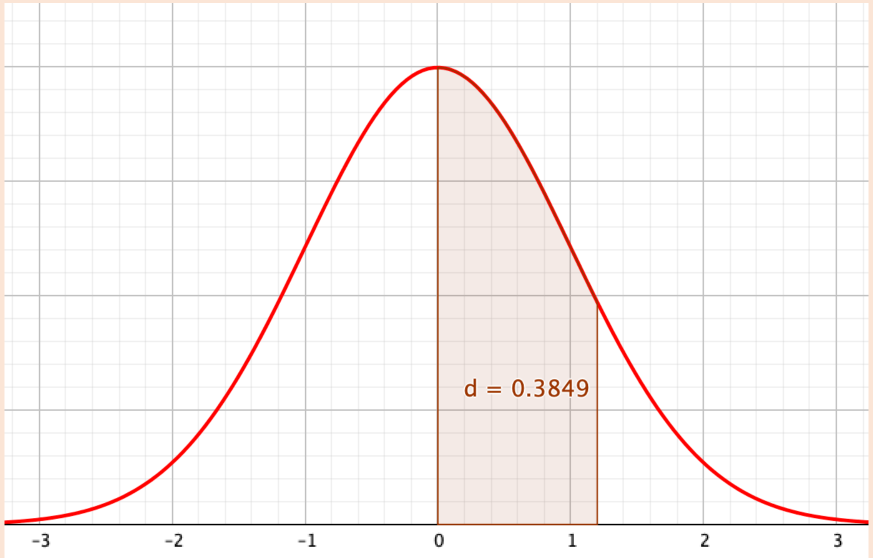
1) Padronizamos os valores fornecidos:

$$D_{\text{inf}} = 25{,}40 \Rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow z = \frac{25{,}40 - 25{,}40}{0{,}10} = 0 \text{ (média)}$$

$$D_{\text{sup}} = 25{,}52 \Rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow z = \frac{25{,}52 - 25{,}40}{0{,}10} = 1{,}2$$

2) Procuramos na tabela a área correspondente:

Z	0	0,01
...	...	...
0,9	0,3159	0,3186
1,0	0,3413	0,3438
1,1	0,3643	0,3665
1,2	0,3849	0,3869



Resposta: a probabilidade é de 0,3849, ou 38,49%

Aplicação

- Qual a probabilidade de uma esfera escolhida ao acaso ter entre 25,30 e 25,60 mm?

$$D_{\text{inf}} = 25{,}30 \Rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow z = \frac{25{,}30 - 25{,}40}{0{,}10} = -1{,}0 \Rightarrow p = -0{,}3413$$

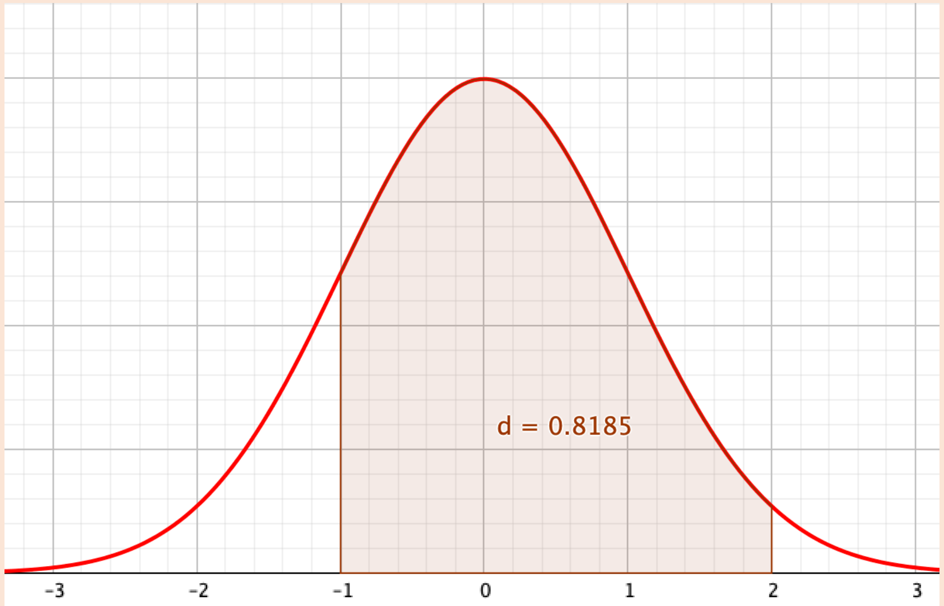
$$D_{\text{sup}} = 25{,}60 \Rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow z = \frac{25{,}60 - 25{,}40}{0{,}10} = 2{,}0 \Rightarrow p = 0{,}4772$$

Portanto

$$P_{25{,}50<D<25{,}60} =$$

$$= 0{,}3413 + 0{,}4772 =$$

$$= 0{,}8185\ ou\ 81{,}85\%$$



Aplicação

- Qual a probabilidade de uma esfera escolhida ao acaso ter entre 25,50 e 25,60 mm?

$$D_{\text{inf}} = 25{,}50 \Rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow z = \frac{25{,}50 - 25{,}40}{0{,}10} = 1{,}0 \Rightarrow p = 0{,}3413$$

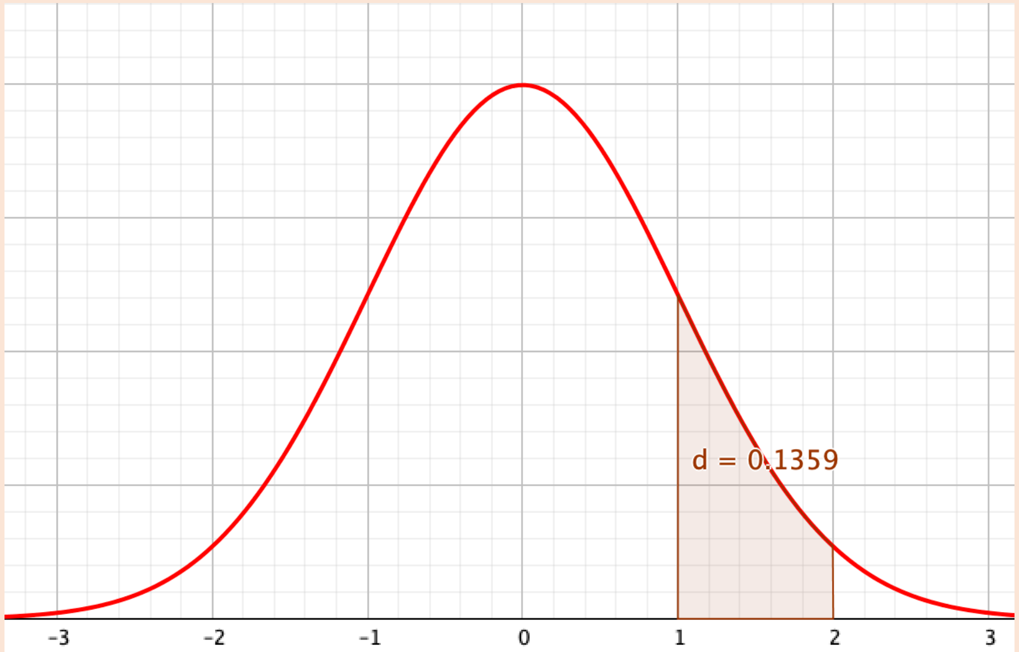
$$D_{\text{sup}} = 25{,}60 \Rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow z = \frac{25{,}60 - 25{,}40}{0{,}10} = 2{,}0 \Rightarrow p = 0{,}4772$$

Portanto

$$P_{25{,}50<D<25{,}60} =$$

$$= 0{,}4772 - 0{,}3413 =$$

$$= 0{,}1359 \; ou \; 13{,}59\%$$



Exercícios propostos

1. Após 28 dias de curagem, o cimento Portland comum tem uma resistência compressiva média de 4000 psi. Suponha que essa resistência tenha distribuição normal com desvio padrão de 120 psi. Determine as probabilidades seguintes para uma resistência compressiva de 28 dias:

    a. < 3900

    b. < 4100

    c. > 4120

    d. > 3950

Respostas: a. 0,2023; b. 0,7922; c. 0,1587; d. 06615

Exercícios propostos

2. Um fornecedor de ferro alega que seu produto apresenta resistência à tração aproximadamente normal com média de 50.000 psi e variância de 900 psi. Supondo verdadeira a hipótese, que percentagem de mensurações dará resultado:

   a. superior a 50.900 psi

   b. inferior a 49.550 psi

   c. entre 49.000 e 49.500 psi

   d. entre 49.500 e 51.000 psi

   e. no mínimo 49.000 psi

Respostas: a. 0,1587; b. 0,3085; c. 0,1560; d. 0,5775; e. 08667

Exercícios propostos

3. Um processo industrial produz canos com diâmetro médio de 2,00” e desvio padrão de 0,01”. Os canos com diâmetros que variem de mais de 0,0277” a contar da média são considerados defeituosos. Suponha normalidade. Qual a percentagem de canos defeituosos?

Resposta: 0,56%

Exercícios propostos

4. Os peixes pescados por uma traineira têm peso médio de 4,5 lb e desvio padrão de 0,5 lb.
    a. Qual é a percentagem de peixes que pesam menos de 4,0 lb?
    b. Qual é a percentagem de peixes cujo peso está a 0,5 lb do peso médio?

Respostas: a. 0,1587; b. 0,6827

Conclusão

Ao final dessa aula, você deve ser capaz de:

- Explicar o que é uma distribuição de frequências.
- Entender o que é a distribuição normal de probabilidades.
- Entender o que é e calcular os valores padronizados para utilização da distribuição normal.
- Interpretar a curva de distribuição normal e seu significado.
- Identificar os componentes da tabela de distribuição normal.
- Utilizar o cálculo dos valores padronizados e a tabela para prever probabilidades normais.