Estatística e Probabilidade

Atividades presenciais

Etapa 3

- Unidade 3: Introdução à teoria das probabilidades
- Unidade 4: Modelos probabilísticos
- Unidade 5: Inferência estatística

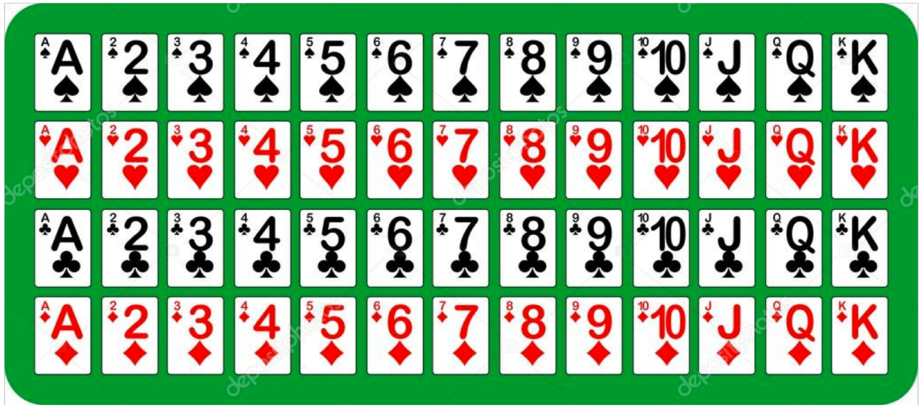
saojudas

Probabilidade simples

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{o que se quer}}{\text{o que se tem}}$$

Probabilidade de A é a divisão dos números amostrais de A pelos números possíveis de determinada população avaliada

Qual a probabilidade de extrairmos uma carta de paus de um baralho?



$$P(paus) = \frac{13}{52} = 0{,}25 = 25\%$$

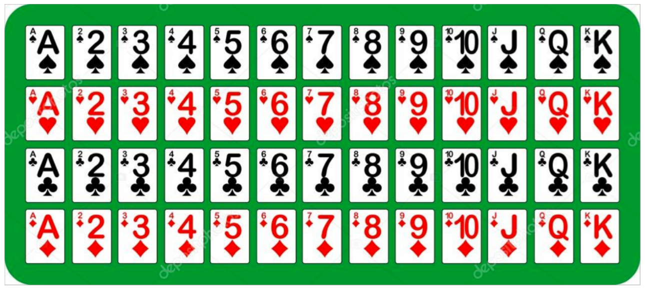
sãojudas

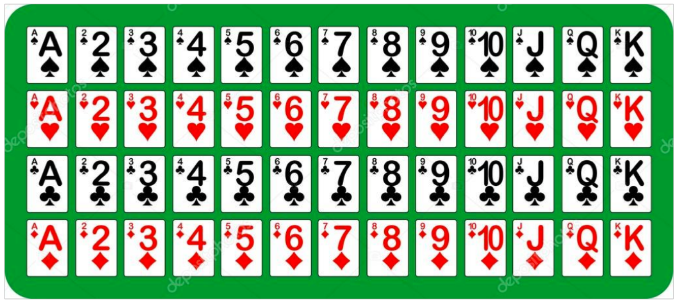
Eventos simultâneos independentes (A e B) = $(A \cap B)$

Eventos independentes

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Se tivermos dois baralhos iguais, qual a probabilidade de extrairmos uma carta par do primeiro **E** um Ás no segundo?

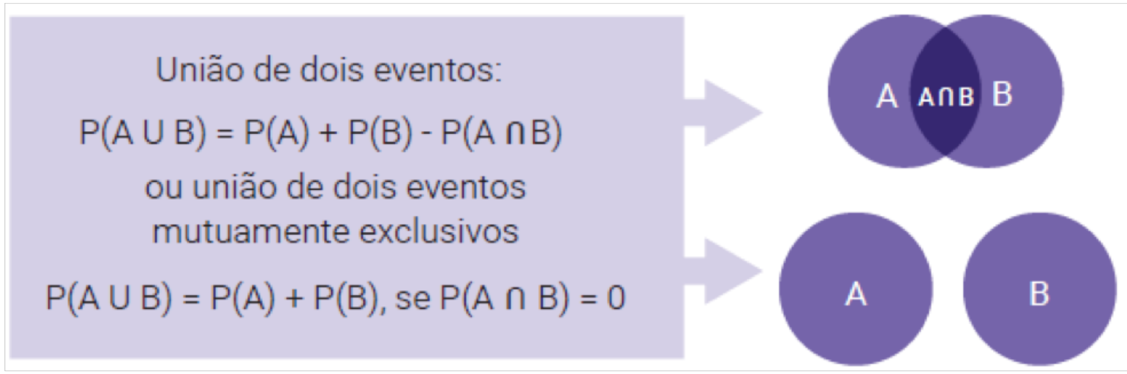




$$P(Par \ \cap \ Ás) = \frac{20}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{5}{169} = 0{,}03 = 3{,}0\%$$

sãojudas

União de eventos (A ou B) = $(A \cup B)$.



Não mutamente excludentes

Mutamente excludentes

Não mutuamente excludentes: Qual a probabilidade de extrairmos uma carta de Paus ou um dez?

$$P(Paus \cup 10) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{13}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} = 0{,}31 = 31\%$$

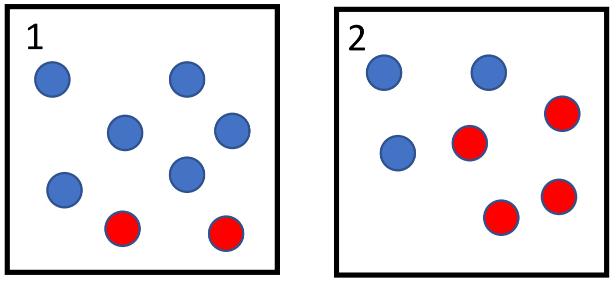
Mutuamente excludentes: Qual a probabilidade de tirarmos um Ás de paus **OU** um Ás de copas?

$$P(\acute{A}s\ de\ paus \ \cup\ \acute{a}s\ de\ copas) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} = 0{,}0385 = 3{,}85\%$$

são judas

Probabilidade condicional

Qual a probabilidade de extraírmos uma bola vermelha (A) da caixa 1 (B)?



$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$P(Vermelha \cap Caixa\ 1) = P(Caixa\ 1) \cdot P(Vermelha|Caixa\ 1)$$

$$P(Vermelha \cap Caixa\ 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

são judas

Variáveis aleatórias

- Resultado gerado pela interação de vários fatores
  - Cara ou coroa
  - Altura das pessoas em um grupo
  - Porcentagem de fumantes ao longo do tempo
- Podem ser
  - **Discretas**: pode tomar um grupo finito de valores
    - Número de matriculados
    - Itens vendidos
  - **Contínuas**: podem tomar infinitos valores
    - Velocidade
    - Índice pluviométrico
    - Investimento

sãojudas

Valor esperado

- É a média simples ou ponderada de uma distribuição de variáveis
- É dada por:

$$E(x) = \sum p_i \cdot x_1$$

Onde:

p_i: probabilidade de ocorrência da variável
x_1: valor da variável

Um investidor julga que tem 40% de probabilidade de ganhar R$ 25.000,00 e 60% de probabilidade de perder R$ 15.000,00 em um investimento. Seu ganho esperado é:

$$E(x) = \sum p_i \cdot x_1 = 0{,}40 \cdot 25.000 + 0{,}60 \cdot (-15.000) = R\$\ 1000{,}00$$

Distribuição Binomial (variáveis descontínuas)

- Usada quando dois resultados são esperados, chamados de **sucesso** e **fracasso**.
- Obedece à função

$$P(x,n) = \binom{n}{x} \cdot (P_{sucesso})^{x} \cdot \left(P_{falha}\right)^{n-x}$$

onde

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{n!\,(n-x)!}$$

Tecla **nCr** da calculadora

Exemplo

Em um grupo de candidatos, sabe-se que 75% possuem segundo grau completo. Um grupo de 10 candidatos é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de que 6 deles tenham segundo grau completo?

$$P(x,n) = \binom{n}{x} \cdot (P_{sucesso})^{x} \cdot \left(P_{falha}\right)^{n-x}$$

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{10!\,(10-6)!} = 210$$

$$P_{sucesso} = 0{,}75 \therefore P_{fracasso} = 0{,}25$$

$$P(6,10) = 210 \cdot 0{,}75^{6} \cdot 0{,}25^{4} = 0{,}146 = 14{,}6\%$$

săojudas

Distribuição de Poisson (discreta)

- Aplicação: estudo de probabilidades em números que ocorrem ao longo de um tempo ou espaço.
  - Chamadas por minuto
  - Carros por hora
  - Defeitos por metro quadrado (tecido em um tear, por ex.)

- Fórmula

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x}}{x!}$$

Onde:

x: número de ocorrências
λ: taxa média por unidade
t: número de unidades

Exemplo

Em um porto chegam em média 2 navios por hora. Considerando um período de ½ hora:

1. Qual a probabilidade de chegarem 3 navios

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \quad \Rightarrow P(3) = \frac{e^{-2\cdot\frac{1}{2}} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^3}{3!} = 0{,}061 = 6{,}1\%$$

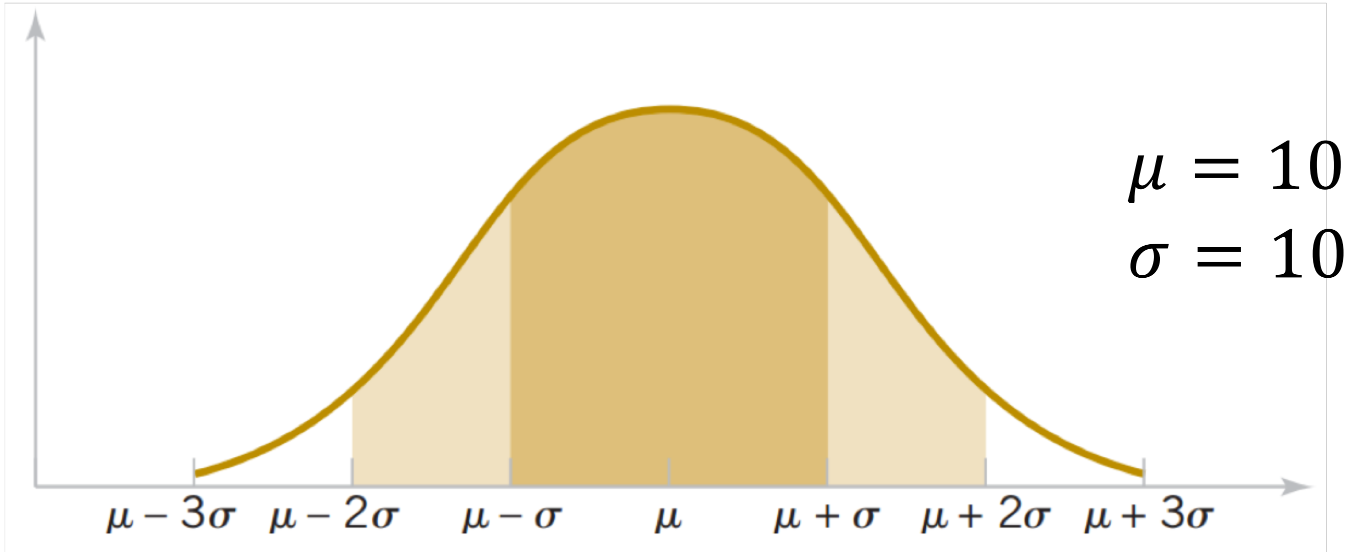
2. Qual a probabilidade de não chegar nenhum navio

$$P(0) = \frac{e^{-2\cdot\frac{1}{2}} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^0}{0!} = e^{-1} = 0{,}368 = 36{,}8\%$$

Distribuição normal padronizada (contínua)

- Um grande número de fenômenos naturais podem ser modelados pela curva da distribuição normal

Exemplo: Um grupo de porcos com peso médio de 100 kg e desvio padrão de 10 kg



$$\mu = 100\ kg$$
$$\sigma = 10\ kg$$

Escala efetiva	70	80	90	100	110	120	130	x
Escala padronizada	-3	-2	-1	0	1	2	3	z

Os valores correspondem ao número de desvios padrão em relação à média.

sãojudas

Como encontrar z

- Usamos a fórmula

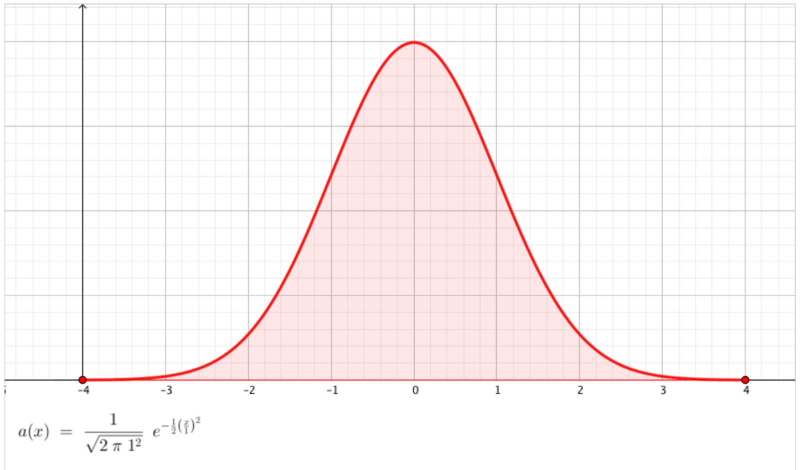
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

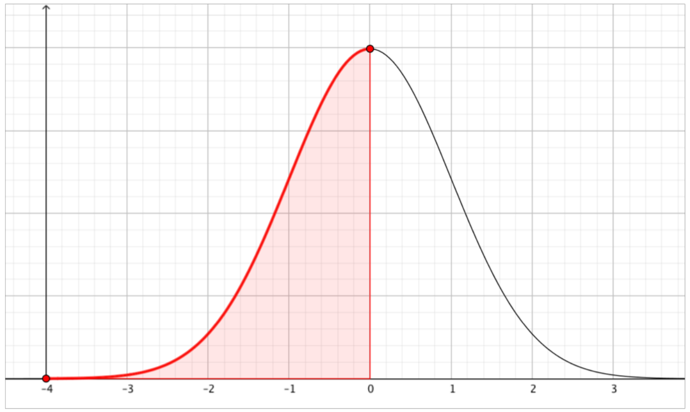
- Encontrar o valor de z para os seguintes casos:

Média: μ	Desvio padrão: σ	Valor considerado: x	Valor de z
100	10	88	$z = \frac{88 - 100}{10} = -1{,}2$
56	5	65	$z = \frac{65 - 56}{5} = 1{,}8$
2560	120	3220	$z = \frac{3220 - 2560}{120} = 5{,}5$

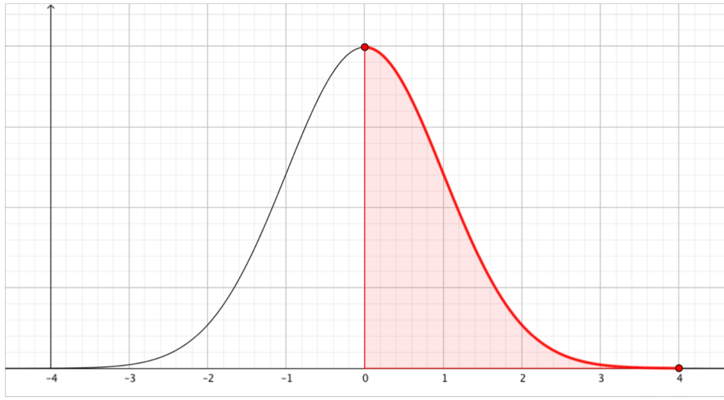
Cálculo da probabilidade na distribuição normal

- A área total sob a curva é igual a 1, que corresponde a 100%





A curva é simétrica; cada metade tem área 0,5 = 50%



Exemplo

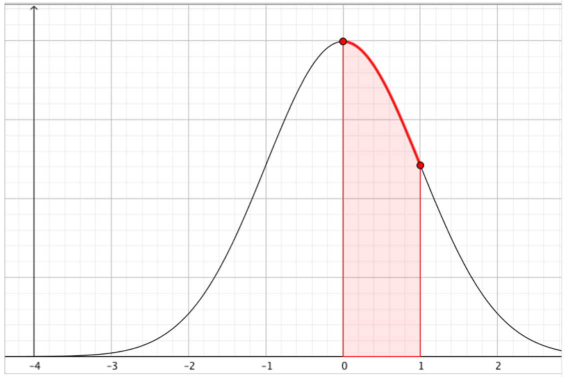
O diâmetro médio de um componente mecânico produzido por uma máquina tem uma média de 25,4 mm, com um desvio padrão de 0,2 mm.

Que porcentagem das peças escolhidas aleatoriamente estará entre 25,4 (média) e 25,6 mm?

1o passo: Calcular z

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{25{,}6 - 25{,}4}{0{,}2} = 1$$



Tabela

Z	0	0,01
0,0	0,0000	0,0040
0,1	0,0398	0,0438
0,2	0,0793	0,0832
0,3	0,1179	0,1217
0,4	0,1554	0,1591
0,5	0,1915	0,1950
0,6	0,2257	0,2291
0,7	0,2580	0,2611
0,8	0,2881	0,2910
0,9	0,3159	0,3186
1,0	0,3413	0,3438
1,1	0,3643	0,3665

2o passo: buscar na tabela de distribuição normal reduzida

$$Para\ z = 1{,}0 \Rightarrow\ p = 0{,}3413 = 34{,}13\%$$

sãojudas

Exemplo (cont.)

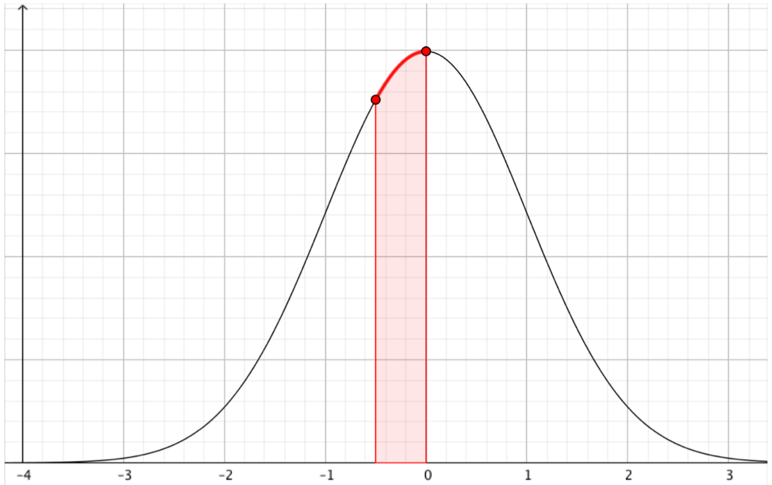
Que porcentagem das peças estará entre 25,3 e 25,4 (média) mm?

1o passo: Calcular z

$$z = \frac{25{,}3 - 25{,}4}{0{,}2} = -0{,}5$$

2o passo: procurar a área na tabela

Buscar para $z = 0{,}5 \Rightarrow \; P = 0{,}1915 = 19{,}15\%$



Tabela

Z	0	0,01
0,0	0,0000	0,0040
0,1	0,0398	0,0438
0,2	0,0793	0,0832
0,3	0,1179	0,1217
0,4	0,1554	0,1591
0,5	0,1915	0,1950
0,6	0,2257	0,2291
0,7	0,2580	0,2611
0,8	0,2881	0,2910
0,9	0,3159	0,3186
1,0	0,3413	0,3438

Exemplo (cont.)

- Que porcentagem estará entre 25,3 mm e 25,6 mm?

$$P(25{,}3\ a\ 25{,}6) = P(25{,}3\ a\ 25{,}4) + P(25{,}4\ a\ 25{,}6) = 0{,}3413 + 0{,}1915$$

$$= 0{,}5328 = 53{,}28\%$$