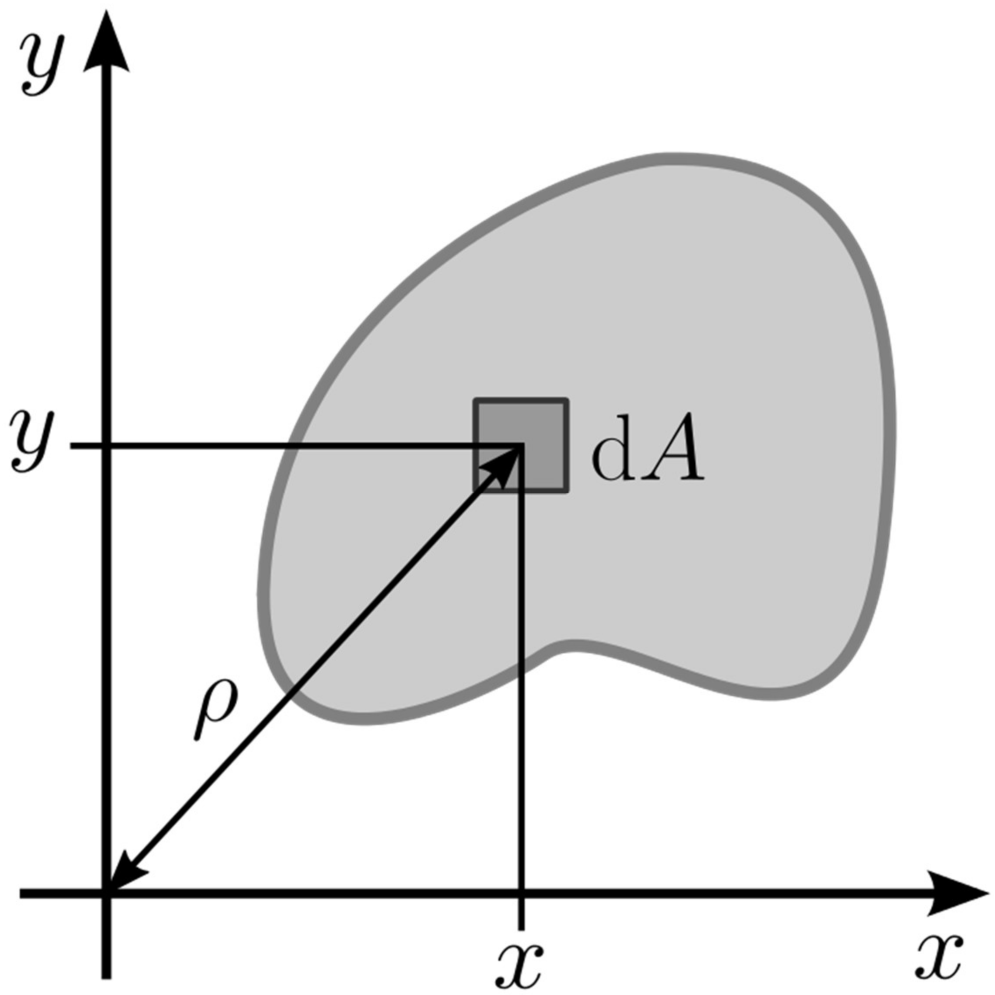
UC - Resistência dos materiais e elementos de máquinas

Propriedades das figuras planas, parte I

Prof. Simões

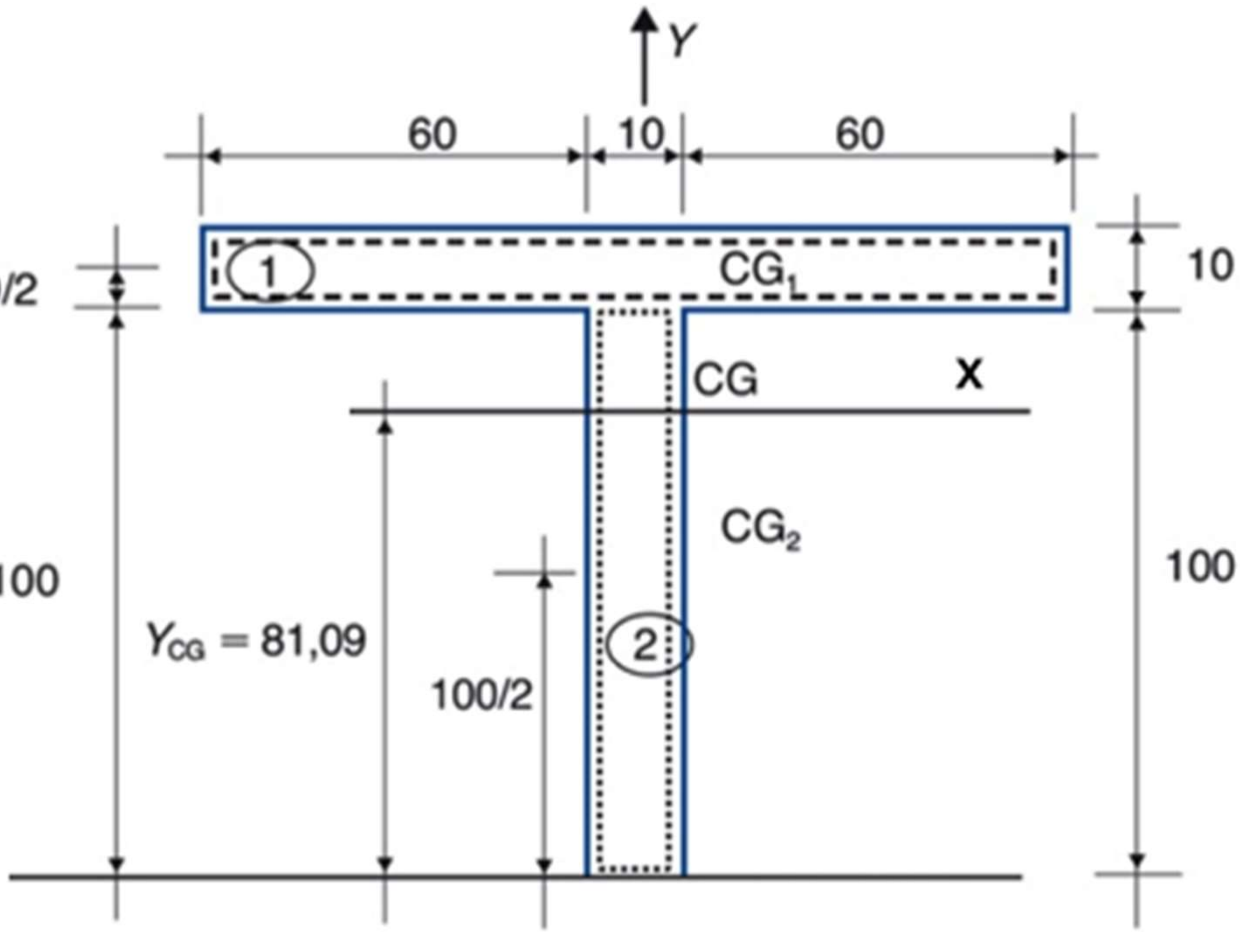


Objetivos dessa aula

- Entender a importância do formato da seção transversal de uma viga
- Definir algumas propriedades das superfícies planas
    - Área
    - Centro de massa
    - Momento estático
    - Momento de inércia
    - Momento polar de inércia
    - Raio de giração
- Calcular os momentos de inércia de figuras simples
- Calcular os momentos de inércia de figuras compostas
- Calcular o raio de giração de figuras simples e compostas

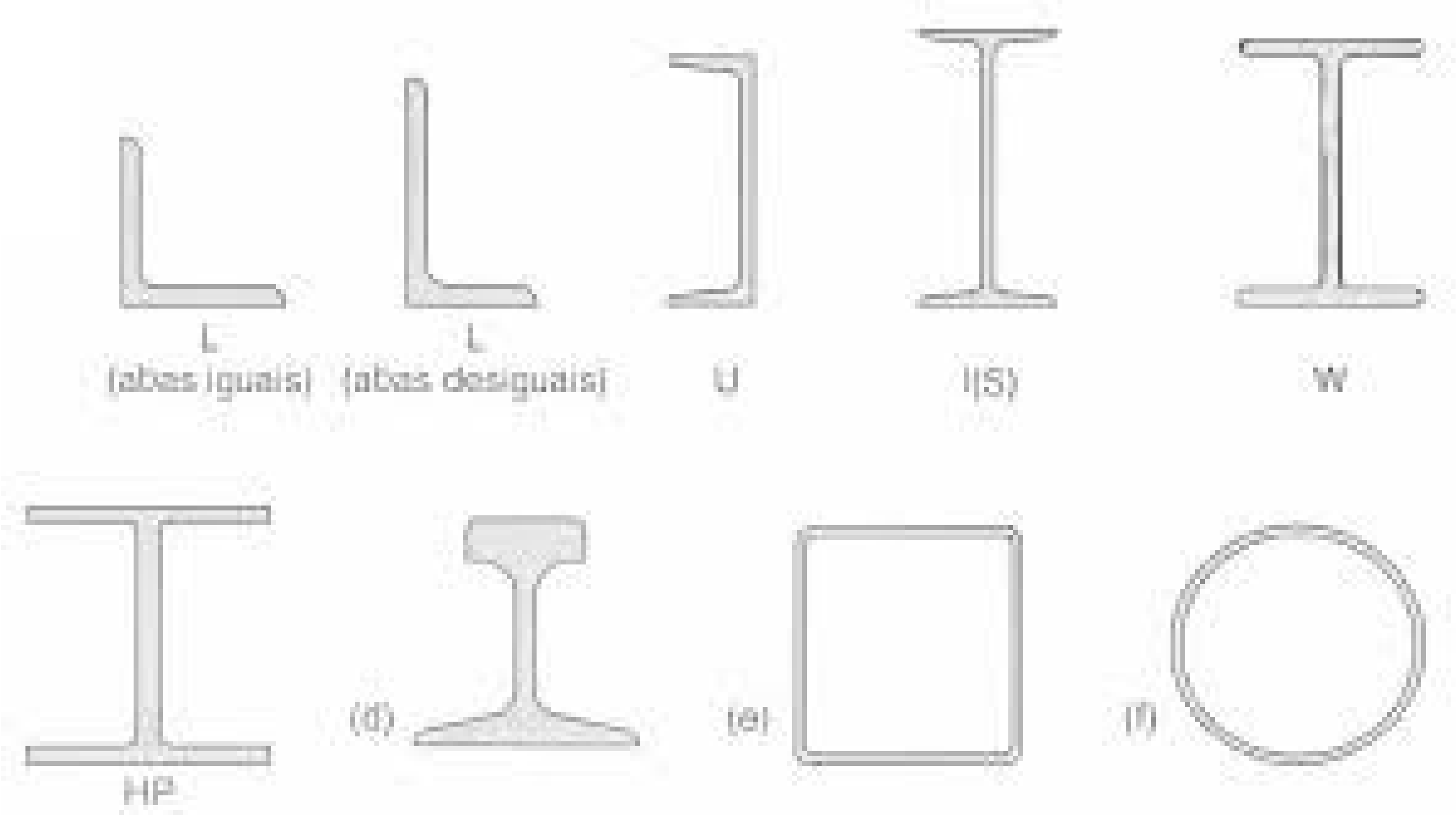
Problema típico

- Calcular os momentos de inércia e o raio de giração da seção transversal abaixo em relação ao centro de massa:



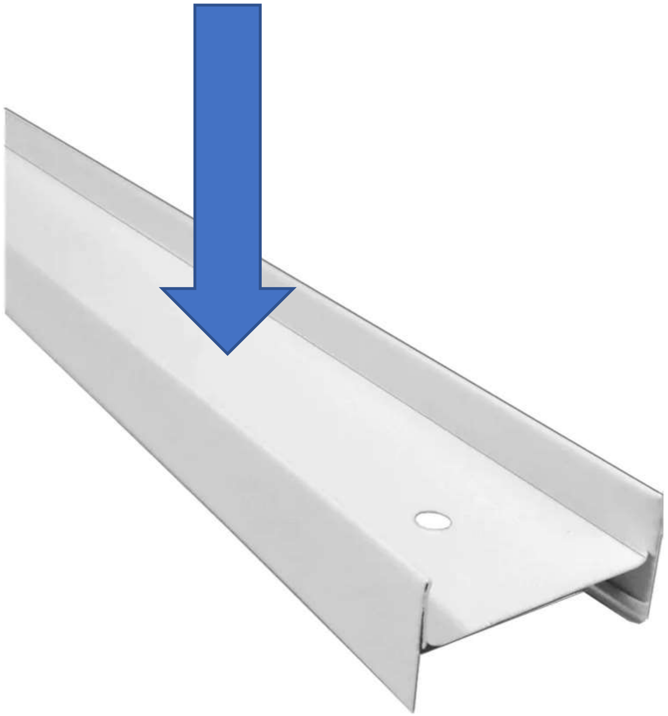
Importância do formato da seção

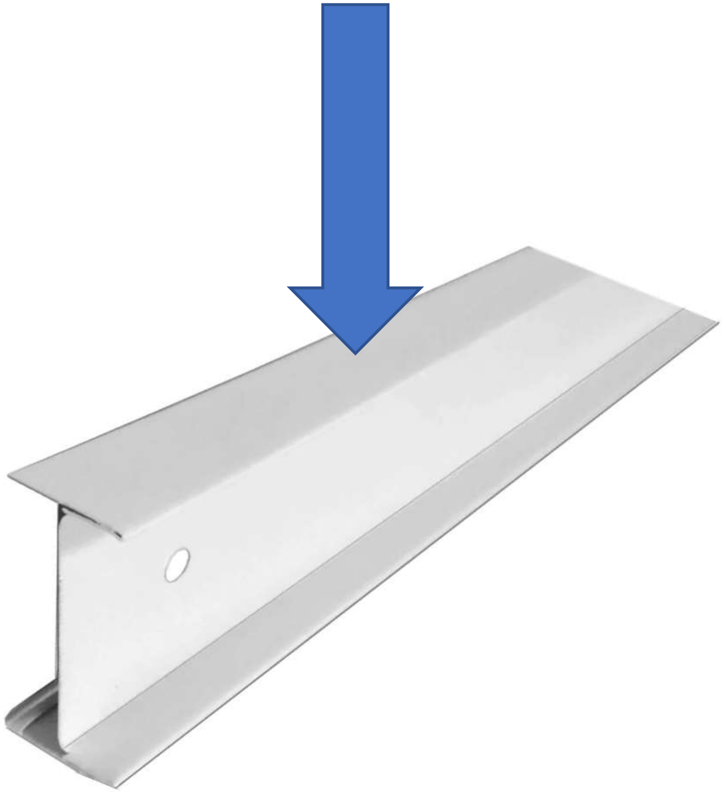
- O comportamento de um elemento construtivo depende, além do material que o constitui e do tipo de esforço aplicado, do formato de sua seção transversal.



Importância da direção do esforço

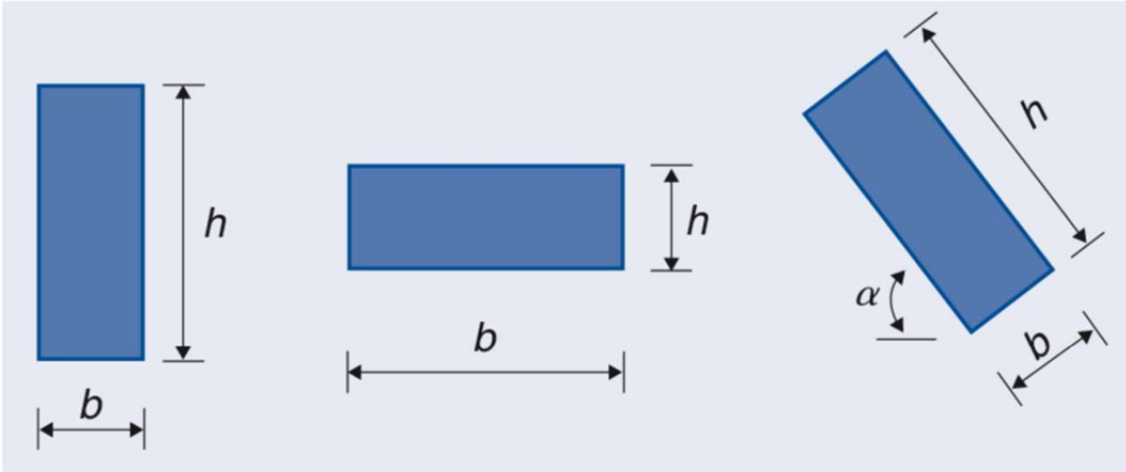
- Além do tipo de perfil, a direção do esforço também é importante





Importância da direção do esforço

- Possíveis opções de disposição de uma viga de madeira:

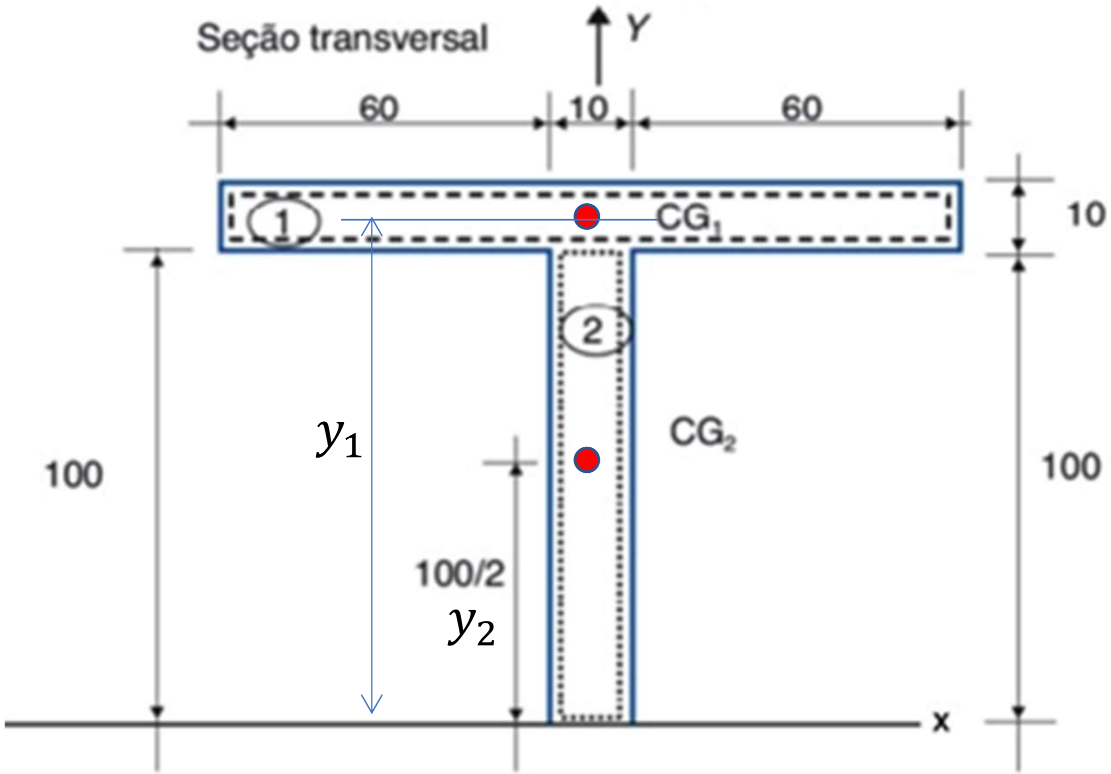


Propriedades das superfícies planas

- Para analisar matematicamente o comportamento de uma viga com um certo perfil de seção transversal, temos que conhecer as propriedades de sua seção.
- Nesse ponto, consideraremos o momento de inércia e o raio de giração:
    - Área
    - Momento estático
    - Centro de massa
    - Momento de inércia e momento polar de inércia
    - Raio de giração
- Antes, precisamos calcular os 3 anteriores

Momento estático

- Calcular o momento estático da seção transversal abaixo em relação aos eixos indicados:



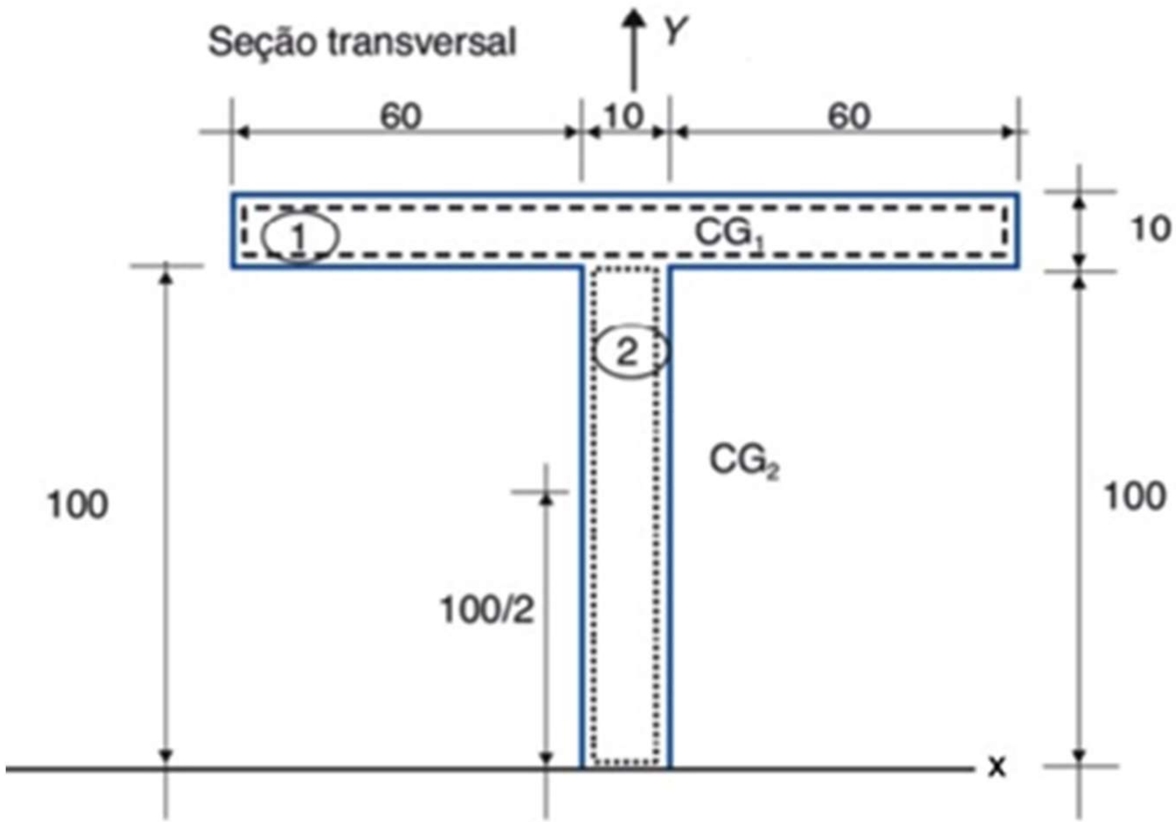
$$Ms_x = \sum A_i y_i$$

$$Ms_y = \sum A_i x_i$$

$$Ms_x = 1{,}86 \cdot 10^5\ cm^3; Ms_y = 0\ cm^3$$

Centro de massa

- Calcular o centro de massa da seção transversal abaixo



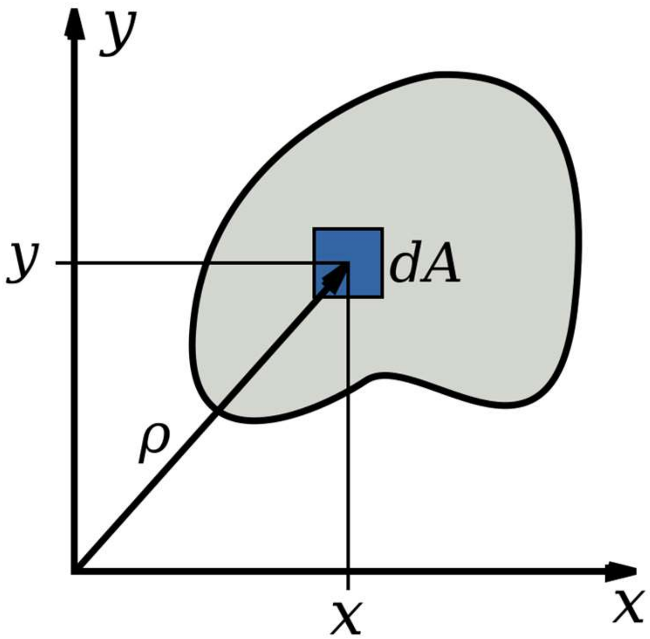
$$x_G = \frac{Ms_y}{A} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$y_G = \frac{Ms_x}{A} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

$x_G = 0{,}0\ cm; y_G = 81{,}1\ cm$

Momento de inércia

- O momento de inércia de área, ou segundo momento de área, avalia a distribuição da área de uma superfície em relação a um referencial.

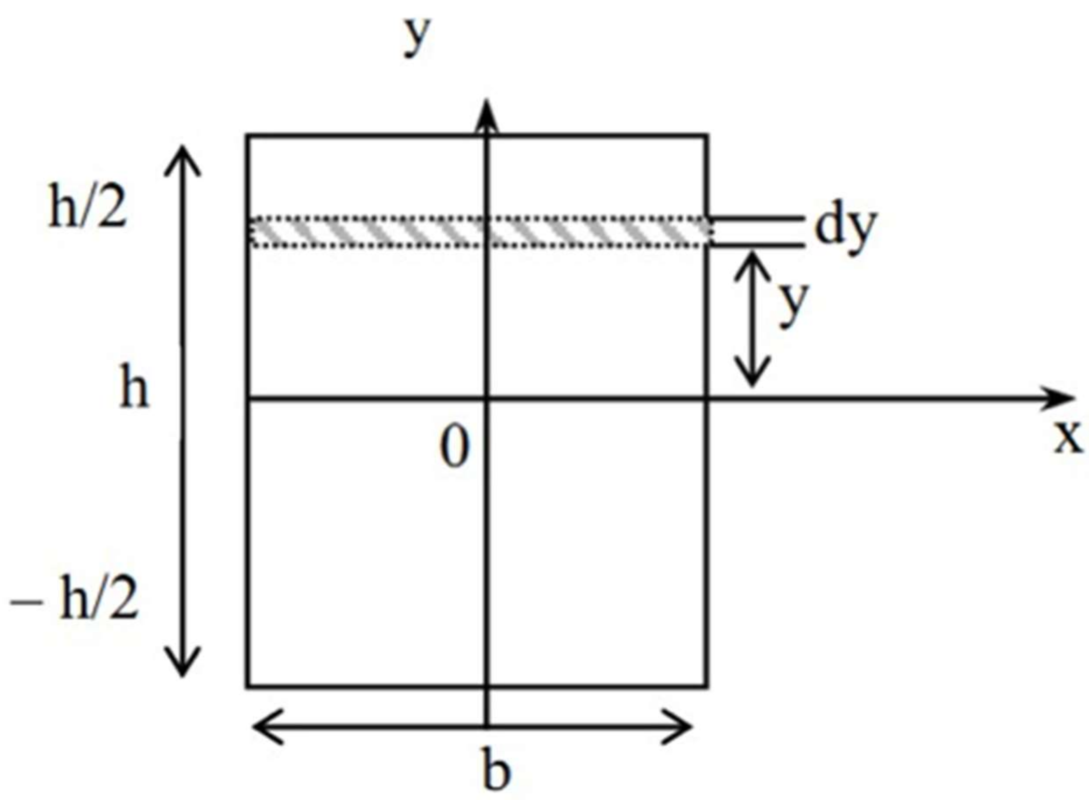


$$I_x = \int_0^A y^2 dA$$

$$I_y = \int_0^A x^2 dA$$

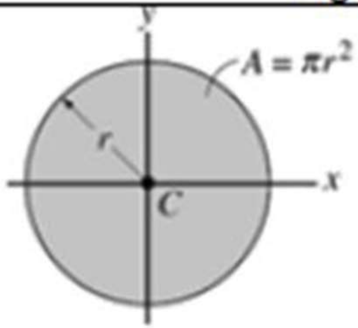
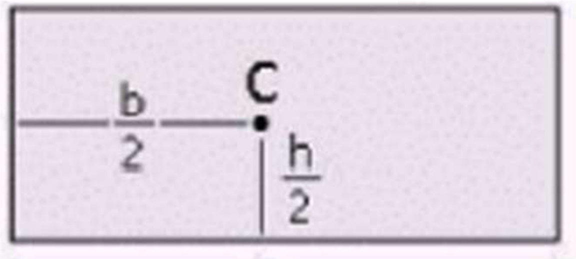
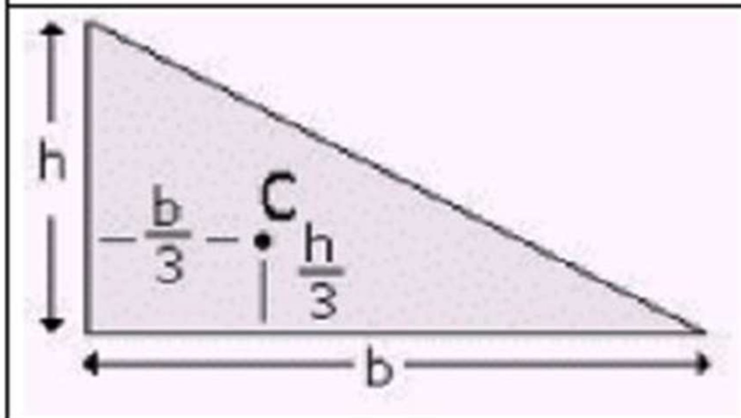
Momento de inércia

- Demonstrar, para uma seção retangular, a fórmula do momento de inércia I_x em relação ao seu centro de massa:



$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

Principais momentos de inércia

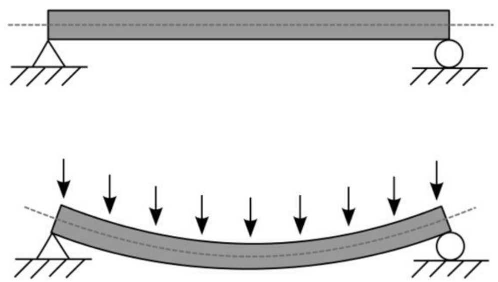
Figura	Momento de inércia
	$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$
	$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$ $$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$
	$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}$$ $$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{36}$$

Momento polar de inércia

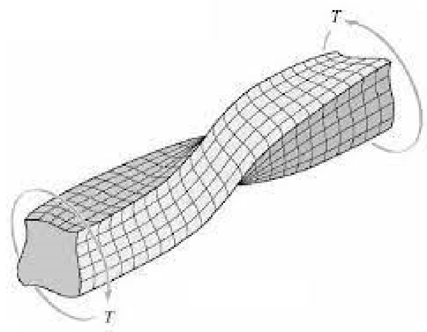
- Representa a soma algébrica dos dos momentos de inércia em eixos perpendiculares:

$$Ip_0 = J = Ix + Iy$$

- Para o dimensionamento de componentes sujeitos a **flexão**, usamos os momentos de inércia em relação aos eixos centrais de inércia (x_G, y_G).

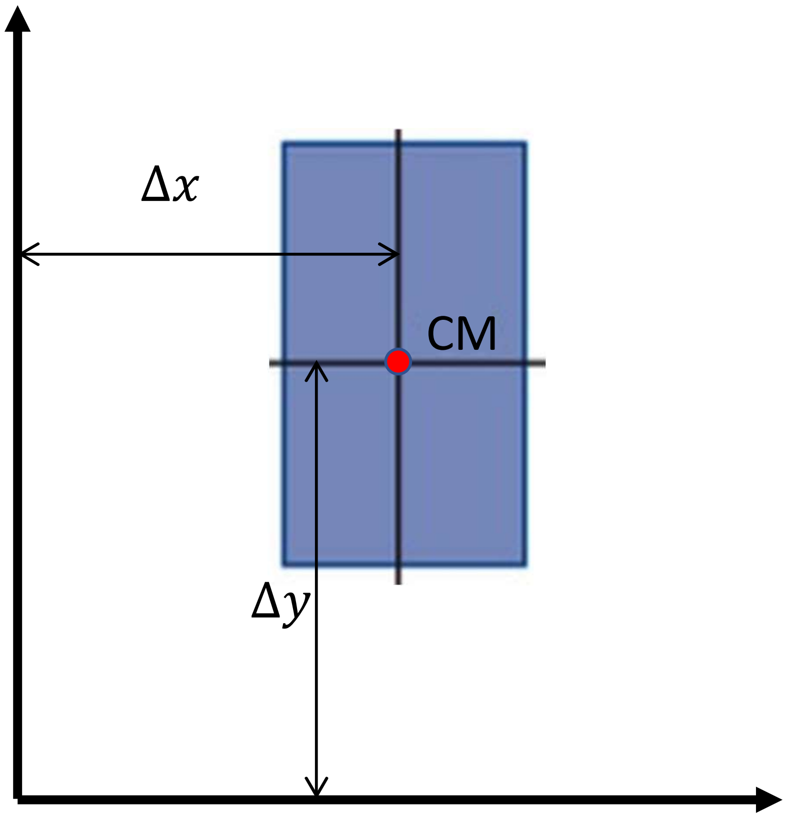


- Para o dimensionamento de componentes sujeitos a **torção**, usamos o momento de inércia polar $(Ip_0 = J)$.



Momento de inércia em qualquer referencial

- Se o referencial não tiver origem no CM da figura, utiliza-se o teorema dos eixos paralelos (teorema de Steiner):



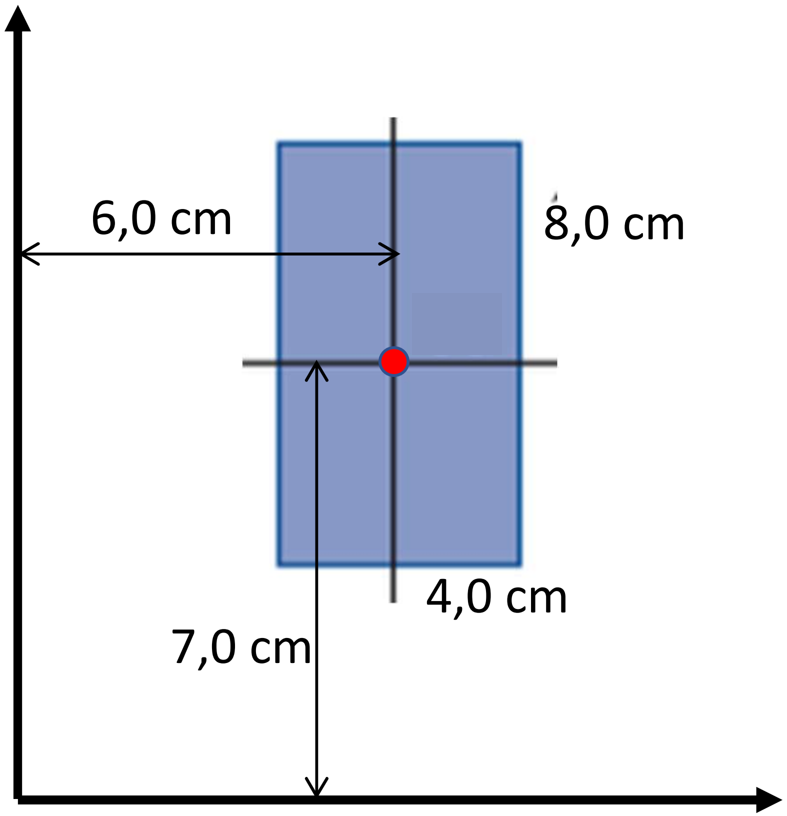
$$I_x = I_{x_{CG}} + A \cdot \Delta y^2$$

$$I_y = I_{y_{CG}} + A \cdot \Delta x^2$$

Essa abordagem será necessária para o cálculo do momento de inércia em figuras compostas.

Teorema de Steiner, exemplo

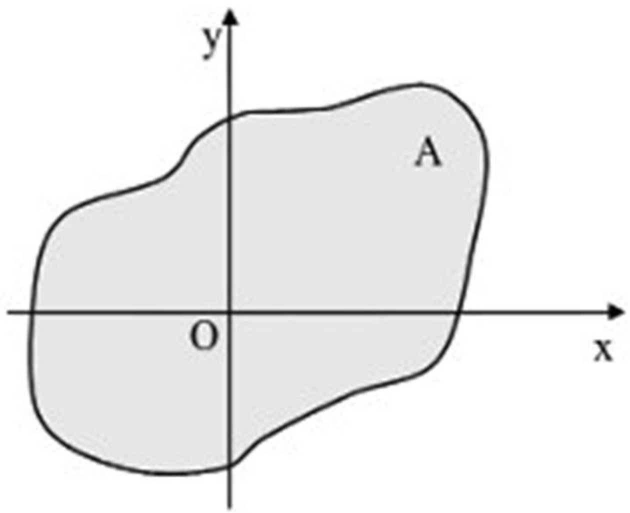
- Calcule o momento de inércia da figura abaixo em relação ao centro de massa e em relação ao referencial fornecido:



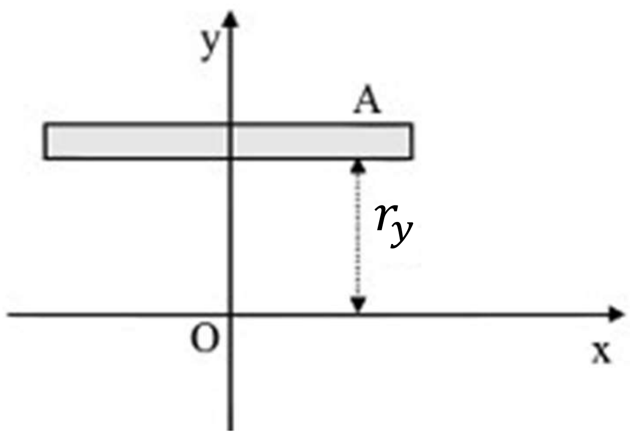
$$I_{x_G} = 171\ cm^4; I_{y_G} = 42{,}7\ cm^4; I_x = 1323\ cm^4; I_y = 1616\ cm^4$$

Raio de giração

- Seja uma superfície A com momento de inércia I em relação a determinado eixo.
- O raio de giração r pode ser interpretado como a distância em relação a esse eixo em que uma área concentrada em uma linha produziria o mesmo momento de inércia I.
- Os raios de giração em relação aos eixos são dados por:



$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

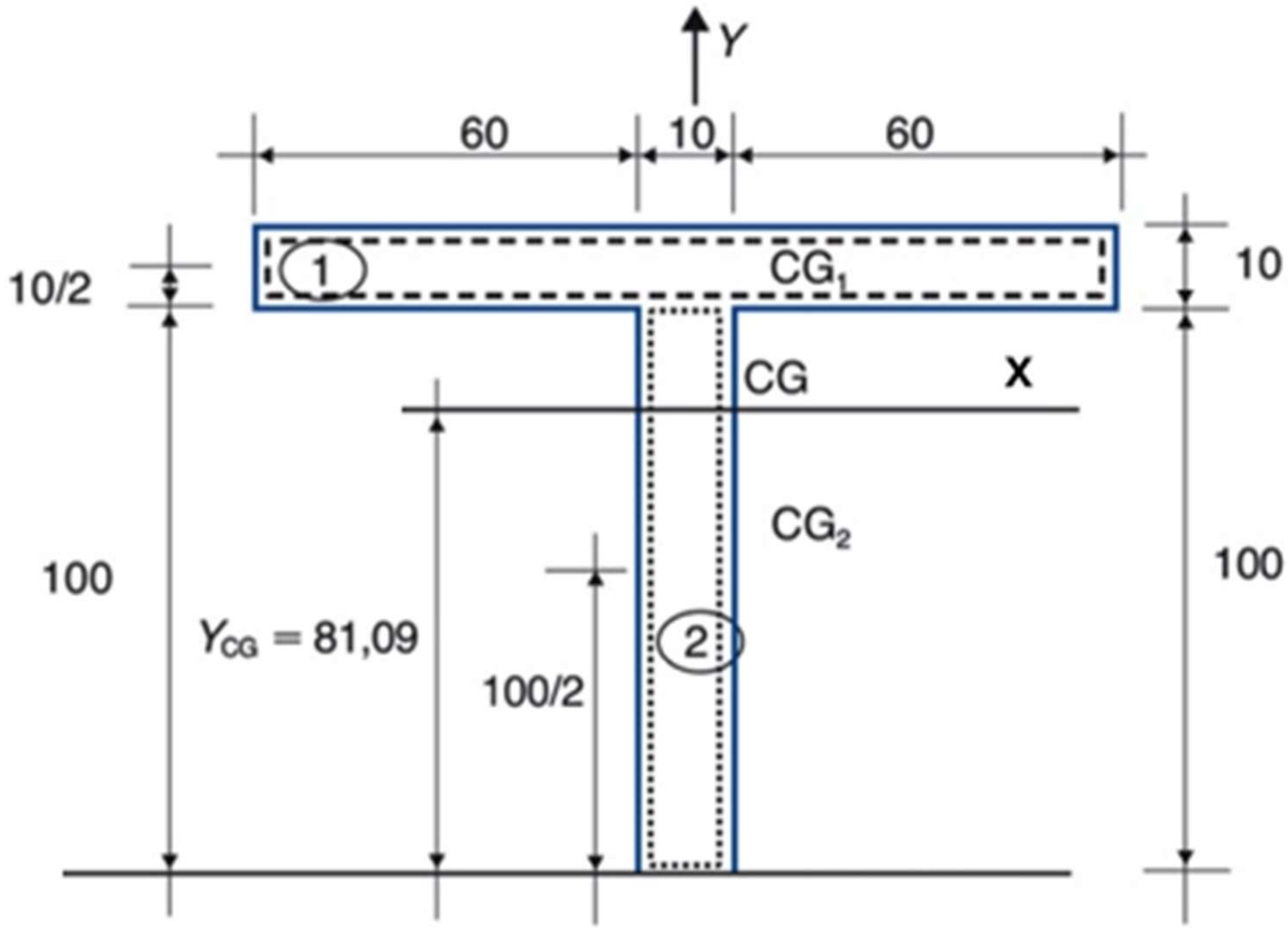


- O raio de giração polar é dado por:

$$r_0 = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

Momento de inércia e raio de giração, exemplo 1

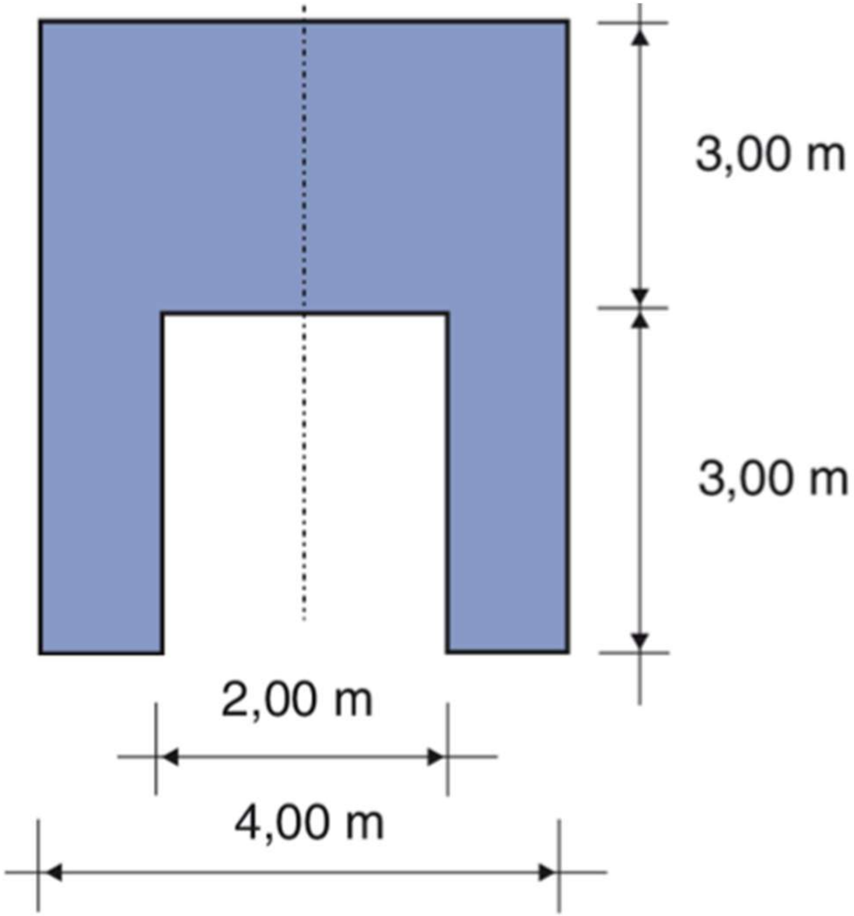
- Calcular os momentos de inércia e raios de giração da seção transversal abaixo em relação ao centro de massa:



$$I_{x_G} = 2{,}55 \cdot 10^6\ cm^4; I_{y_G} = 1{,}84 \cdot 10^6\ cm^4; r_{x_G} = 33{,}3\ cm; r_{y_G} = 28{,}6\ cm; r_0 = 43{,}9\ cm$$

Momento de inércia e raio de giração, exemplo 2

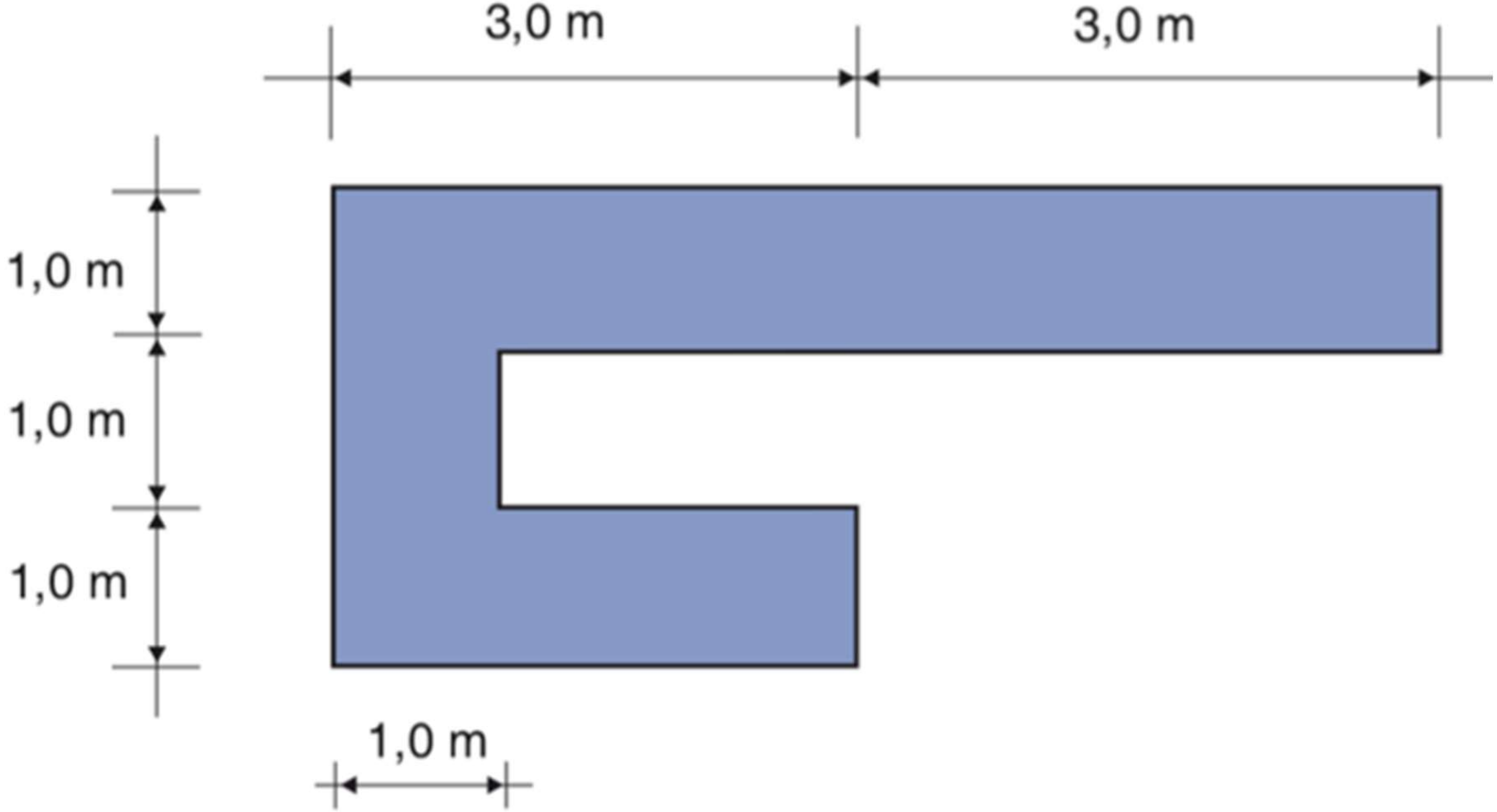
- Calcular os momentos de inércia e raios de giração da seção transversal abaixo em relação ao centro de massa:



$I_{x_G} = 49,5\ m^4; I_{y_G} = 30\ m^4; r_{x_G} = 1,66\ m; r_{y_G} = 1,29\ m$

Exercício

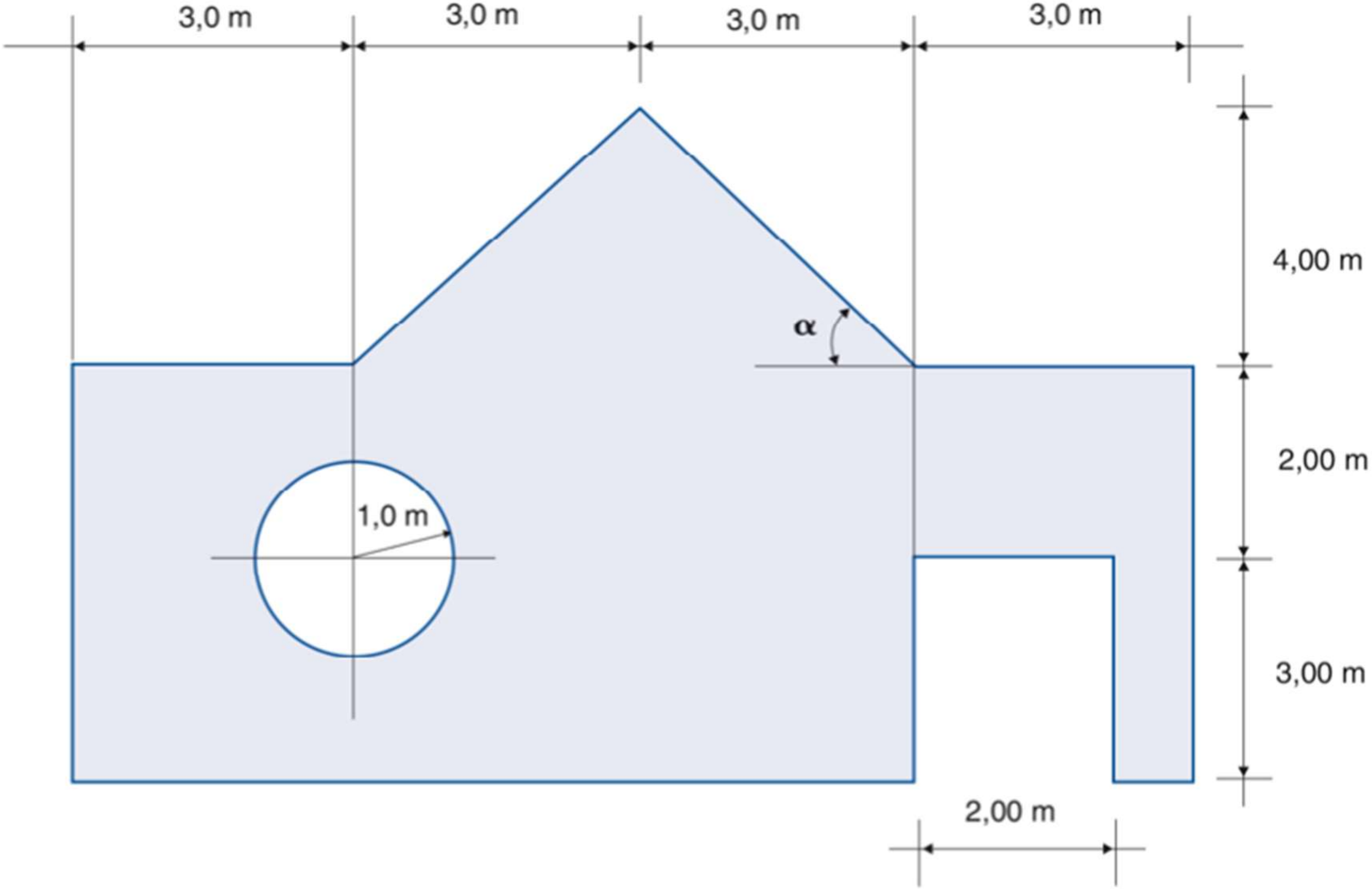
- Calcular os momentos de inércia e raio de giração da seção transversal abaixo em relação ao centro de massa:



$$I_{x_G} = 8{,}94\ m^4; I_{y_G} = 28{,}7\ m^4; r_{x_G} = 0{,}95\ m; r_{y_G} = 1{,}69\ m$$

Exercício

- Calcular os momentos de inércia e raio de giração da seção transversal abaixo em relação ao centro de massa:



$$I_{x_G} = 206\ m^4; I_{y_G} = 603\ m^4; r_{x_G} = 1{,}9\ m; r_{y_G} = 3{,}2\ m$$

Com essa aula, você deve ser capaz de:

- Entender a importância do formato da seção transversal de uma viga
- Definir algumas propriedades das superfícies planas
  - Área
  - Centro de gravidade
  - Momento estático
  - Momento de inércia e momento polar de inércia
  - Raio de giração
- Calcular os momentos de inércia de figuras simples
- Calcular os momentos de inércia e raios de giração de figuras compostas