# UC - Resistência dos materiais e elementos de máquinas

## Flexão normal simples

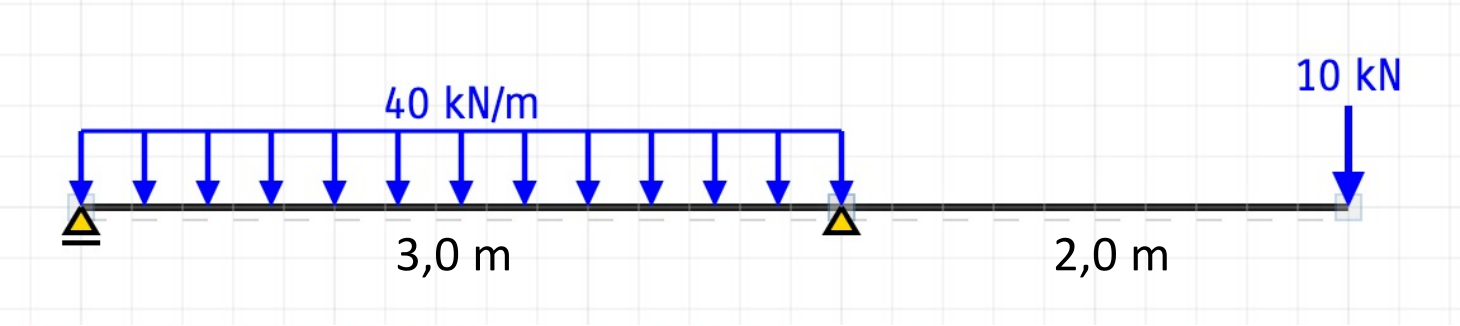
Prof. Simões

# Ao final dessa aula você deverá ser capaz de:

- Entender as premissas do cálculo de FNS
- Definir matematicamente as grandezas fundamentais envolvidas
- Interpretar o diagrama tensão-deformação
- Compreender o conceito da fórmula do cálculo da tensão de flexão
- Calcular a tensão máxima de estruturas sujeitas à flexão
- Calcular o coeficiente de segurança de estruturas sujeitas à flexão

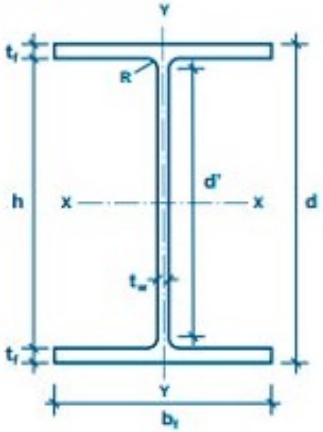
# Problema típico

Para a estrutura abaixo, calcule o coeficiente de segurança sabendo que $\bar{\sigma}_T = 150\ MPa$ e $\bar{\sigma}_C = 120\ MPa$. Usar o perfil W 150 x 18,0.

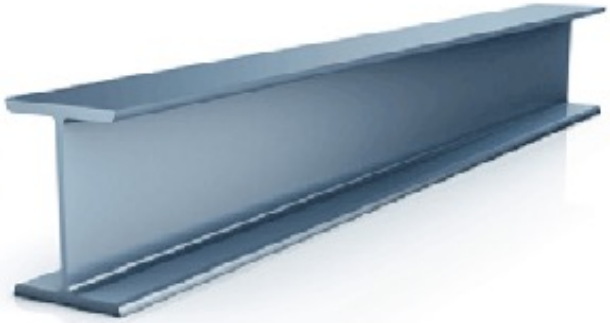



| BITOLA mm x kg/m | Massa Linear | d | $b_f$ | ESPESSURA | | h | d' | Área | EIXO X - X | | | | EIXO Y - Y | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $t_w$ | $t_f$ | | | | $I_x$ | $W_x$ | $r_x$ | $Z_x$ | $I_y$ | $W_y$ | $r_y$ | $Z_y$ |
| | Kg/m | mm | mm | mm | mm | mm | mm | $cm^2$ | $cm^4$ | $cm^3$ | cm | $cm^3$ | $cm^4$ | $cm^3$ | cm | $cm^3$ |
| W 150 x 13,0 | 13,0 | 148 | 100 | 4,3 | 4,9 | 138 | 118 | 16,6 | 635 | 85,8 | 6,18 | 96,4 | 82 | 16,4 | 2,22 | 25,5 |
| W 150 x 18,0 | 18,0 | 153 | 102 | 5,8 | 7,1 | 139 | 119 | 23,4 | 939 | 122,8 | 6,34 | 139,4 | 126 | 24,7 | 2,32 | 38,5 |
| W 150 x 22,5 (H) | 22,5 | 152 | 152 | 5,8 | 6,6 | 139 | 119 | 29,0 | 1229 | 161,7 | 6,51 | 179,6 | 387 | 50,9 | 3,65 | 77,9 |

Legenda

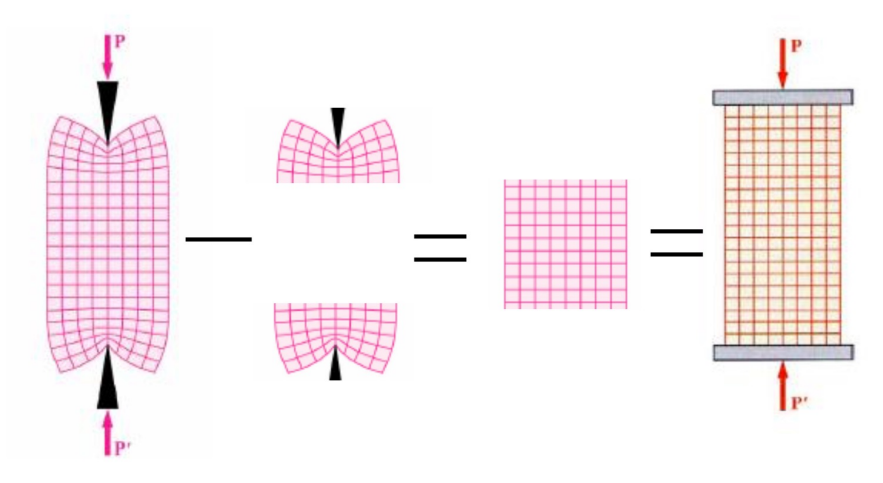



d = altura
d' = altura plana da alma
h = altura interna
$b_f$ = largura da aba do perfil
$t_f$ = espessura da aba
$t_w$ = espessura da alma
R = raio de concordância

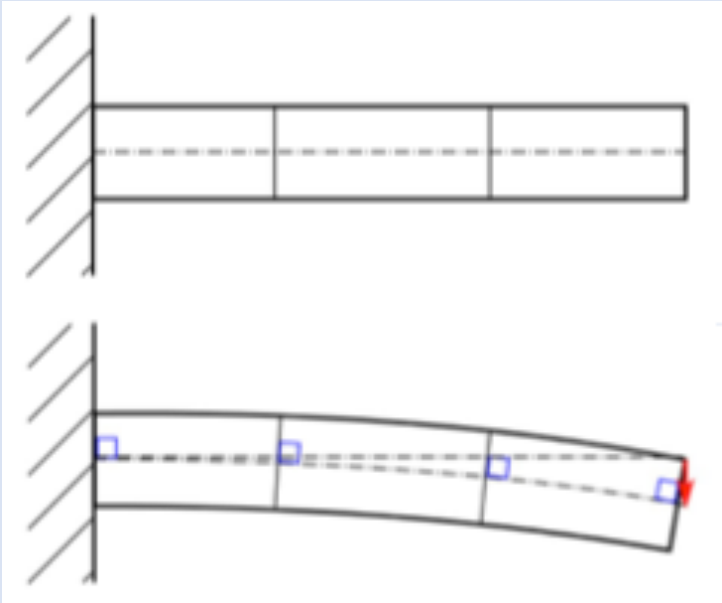


# Premissas

- A estrutura está em equilíbrio
- O material é homogêneo e isotrópico
- Admite-se o princípio de Saint-Venant: as tensões distribuem-se igualmente ao longo do elemento estrutural
- Admite-se a hipótese de Navier: as seções não se deformam na flexão




Princípio de Saint-Venant



Hipótese de Navier

# Grandezas fundamentais

- Tensão

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

No SI $[\sigma] = \frac{N}{m^2} \Rightarrow Pa\ ou\ 10^6 Pa = MPa$

- Deformação

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

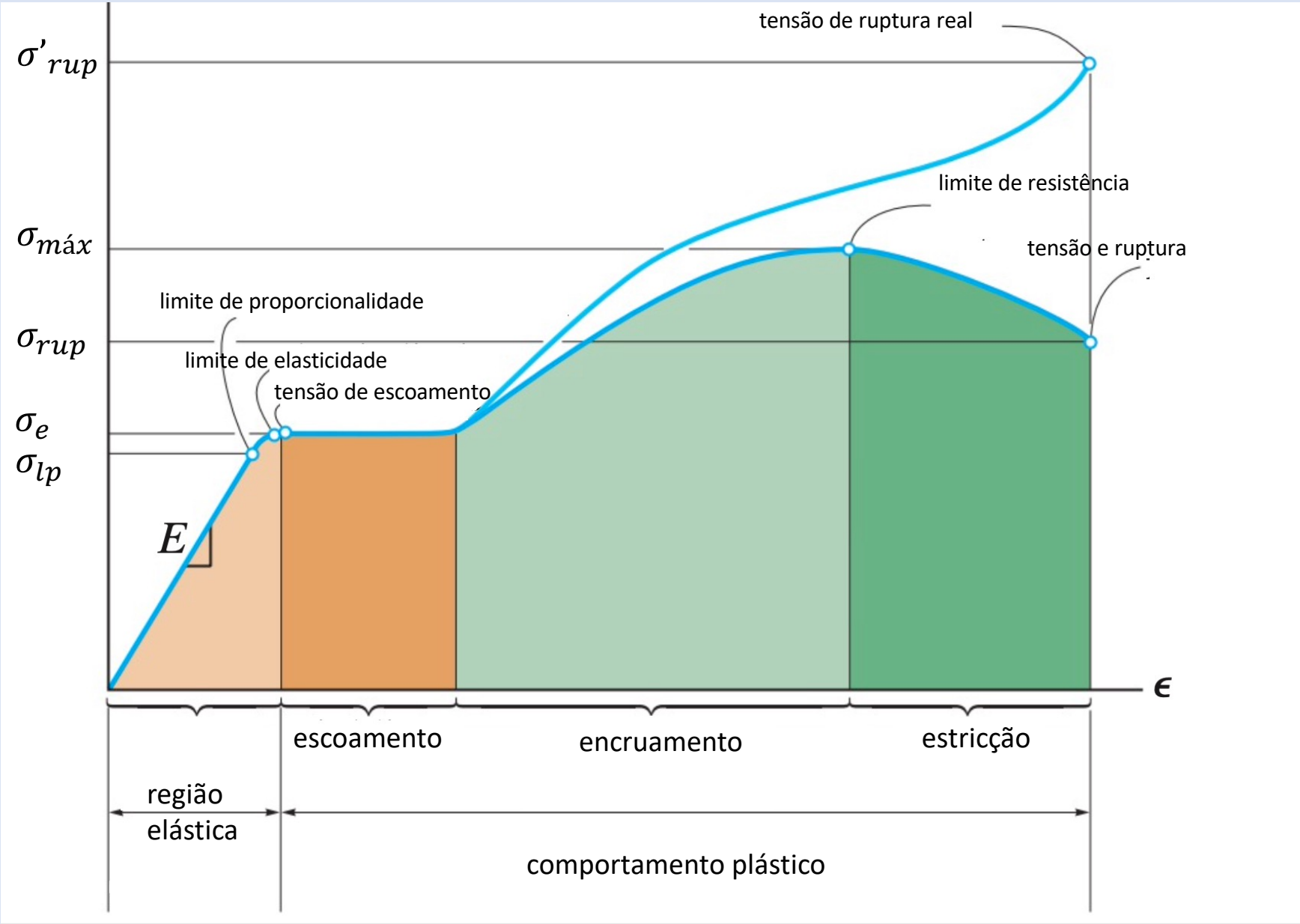
(adimensional)

- Módulo de elasticidade (módulo de Young)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

- Coeficiente angular no regime elástico.
- Quanto maior o módulo de elasticidade, maior a tensão necessária para deformar o material.
- Unidade: usualmente GPa

# Diagrama tensão-deformação

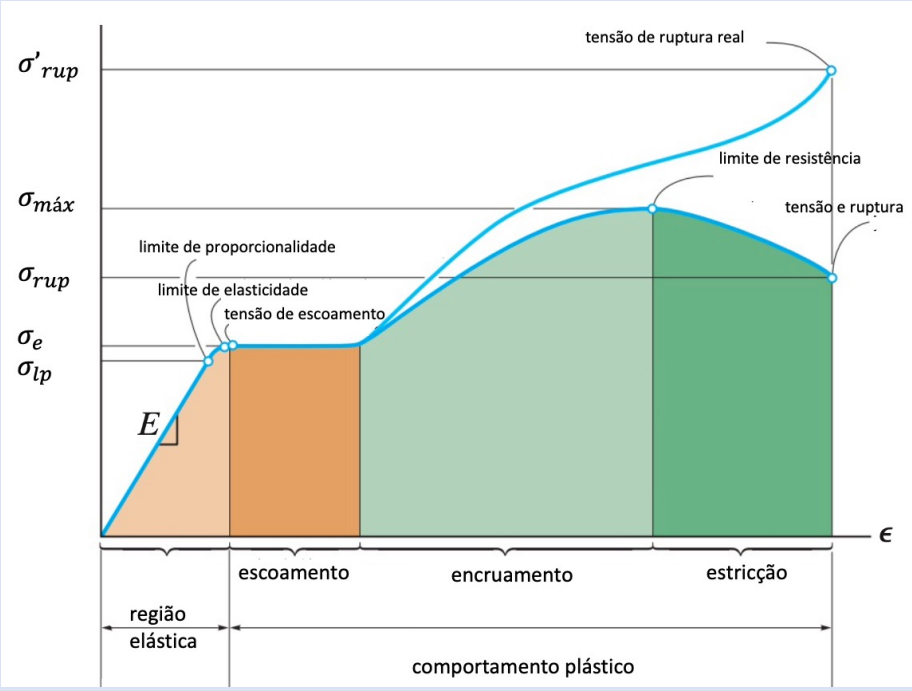


# Valores de referência para aços com baixo teor de carbono

- $\sigma_p \Rightarrow$ Tensão no limite de proporcionalidade:
  $210\ MPa \leq \sigma_{lp} \leq 350\ MPa$

- $\sigma_e \Rightarrow$ Tensão de escoamento:
  $210\ MPa \leq \sigma_e \leq 420\ MPa$

- $\sigma_{máx} \Rightarrow$ Tensão no limite de resistência:
  $350\ MPa \leq \sigma_{máx} \leq 700\ MPa$




Obs.: Esses valores são apenas referenciais. Consulte sempre as informações do fabricante.

# Módulo de elasticidade

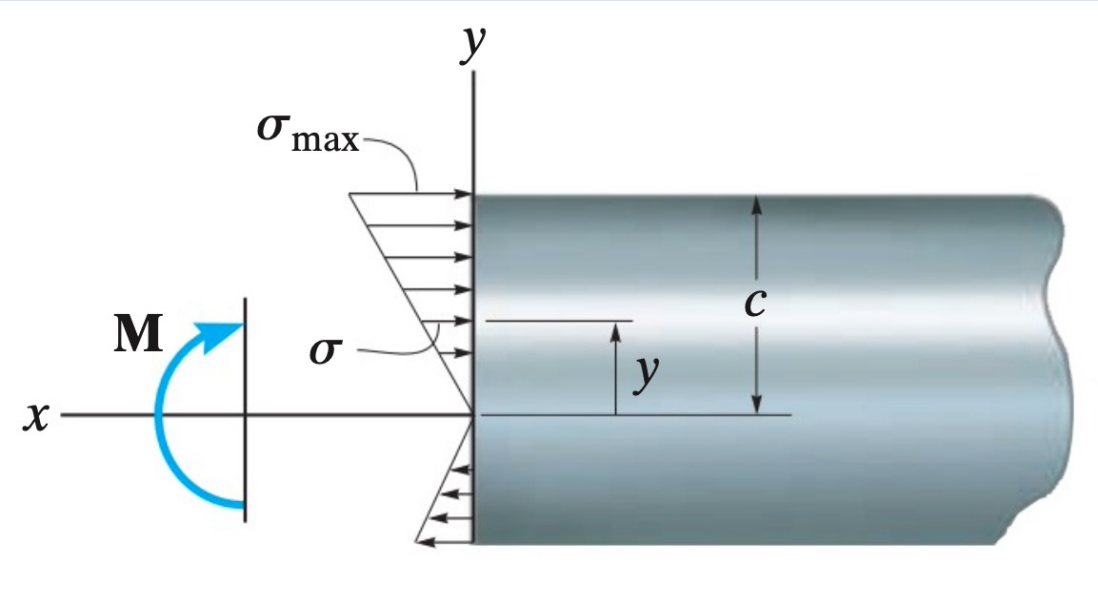
- Valores típicos para alguns aços

| Material | Módulo de elasticidade | | Razão de Poisson |
|---|---|---|---|
| | GPa | $10^6$psi | |
| **Aços comuns e aços de baixa liga** | | | |
| **Liga de aço A36** | 207 | 30 | 0,30 |
| **Liga de aço 1020** | 207 | 30 | 0,30 |
| **Liga de aço 1040** | 207 | 30 | 0,30 |
| **Liga de aço 4340** | 207 | 30 | 0,30 |

https://www.sonelastic.com/pt/fundamentos/tabelas-propriedades-materiais/metais-ferrosos.html

# Fórmula da tensão de flexão

- A flexão gera esforços de tração e compressão na superfície de análise.

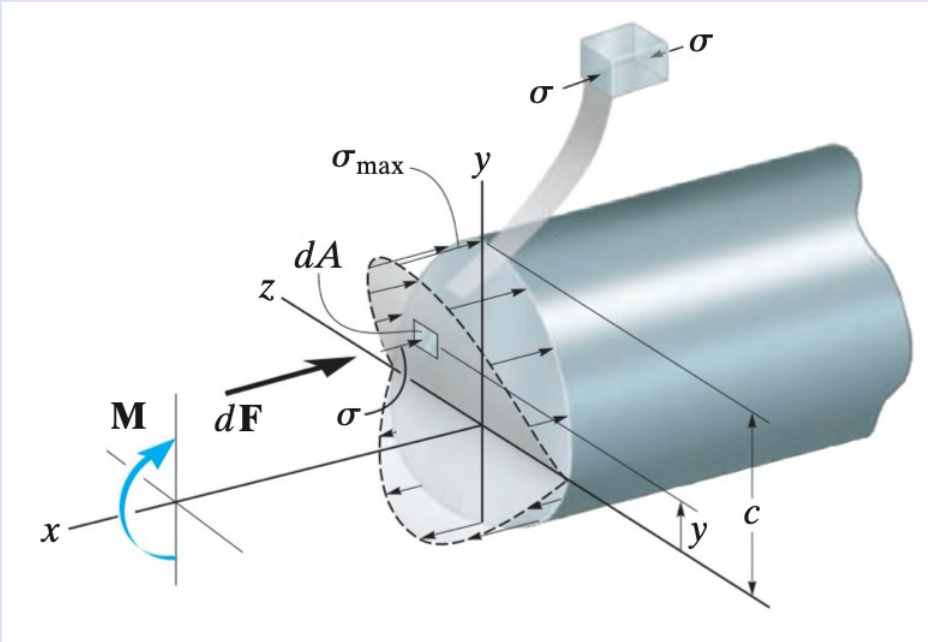



- Por semelhança de triângulos, vem:

$$\frac{\sigma_{máx}}{\sigma} = \frac{c}{y} \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_{máx} \cdot y}{c}$$

# Fórmula da tensão de flexão

- Como o momento varia ao longo da seção transversal, o momento total é:




$$M = \int_0^A y\, dF$$

Mas a tensão pontual é $\sigma = \dfrac{dF}{dA}$

$\therefore\ dF = \sigma \cdot dA$. Assim:

$$M = \int_0^A y\,(\sigma \cdot dA)$$ , e sendo, como vimos, $\sigma = \frac{\sigma_{máx} \cdot y}{c}$ , fica:

Fórmula do momento de inércia $I$

$$M = \int_0^A y\left(\frac{\sigma_{máx} \cdot y}{c} \cdot dA\right) \Rightarrow M = \frac{\sigma_{máx}}{c}\int_0^A y^2\, dA \Rightarrow \boldsymbol{M = \frac{\sigma_{máx}}{c} \cdot I}$$

# Fórmula da tensão de flexão

- Assim, a tensão máxima de flexão será dada por:

$$\sigma_{máx} = \frac{|M| \cdot c}{I}$$

- Condição do projeto à flexão:

$$\sigma_{máx} \leq \sigma_{adm} \text{ (ou } \bar{\sigma}\text{)}$$

$$\sigma_{adm} \text{ (ou } \bar{\sigma}\text{)} = \frac{\sigma_{\lim}}{s}$$

Obs.:

1) $c = y_{máx}$ em várias obras.

2) O módulo de resistência elástico $W$ é definido por:

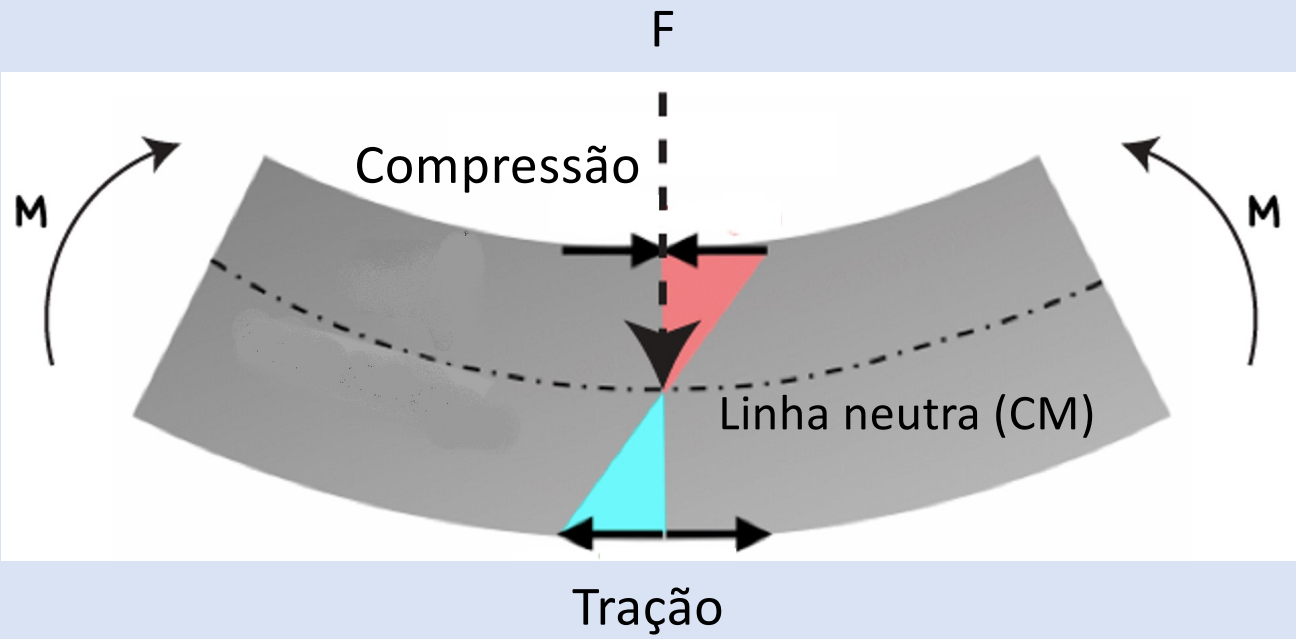
$$W = \frac{I}{c}; [W] = cm^3$$

Assim:

$$\sigma_{máx} = \frac{M}{W}$$

# Fórmula da tensão de flexão

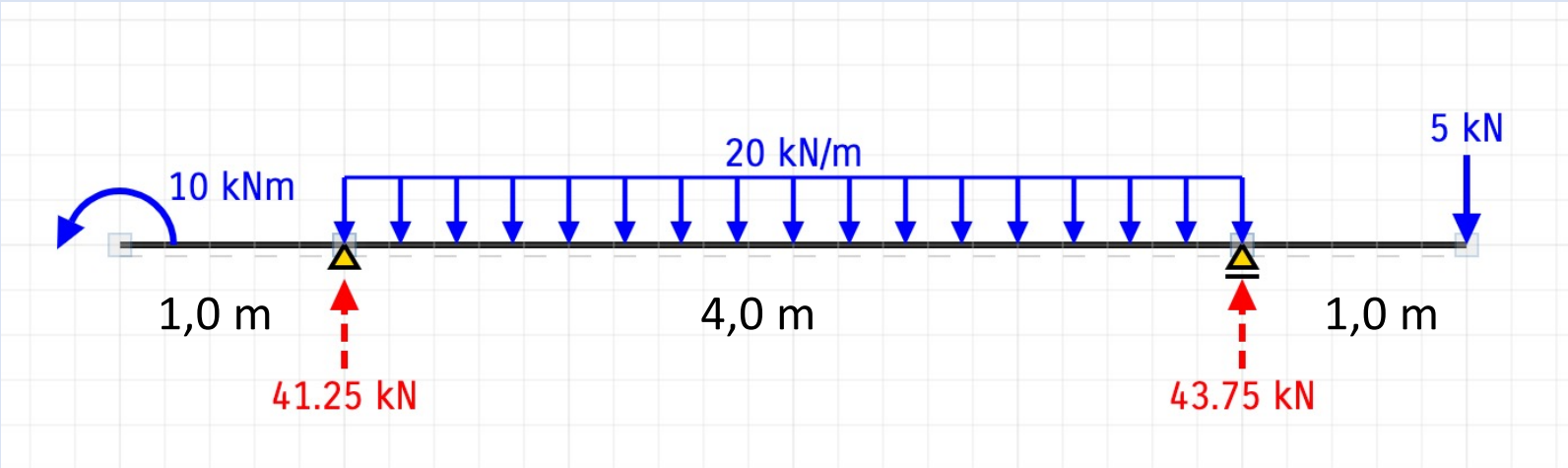
- Como um elemento sujeito à flexão sofre tanto tração como compressão, ambas devem ser verificadas:

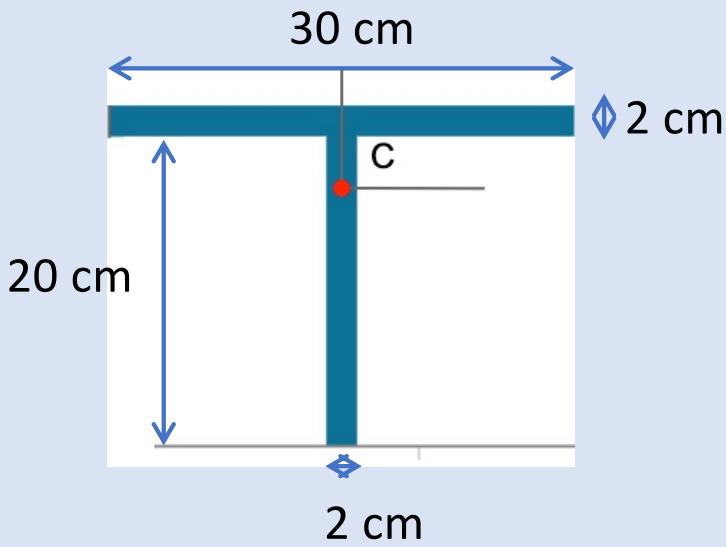



$$\sigma_{máx_T} = \frac{M \cdot y_{máx_T}}{I_{LN}} \qquad \sigma_{máx_C} = \frac{M \cdot y_{máx_C}}{I_{LN}}$$

# Exemplo 1

- Determine as tensões máximas na composição abaixo:



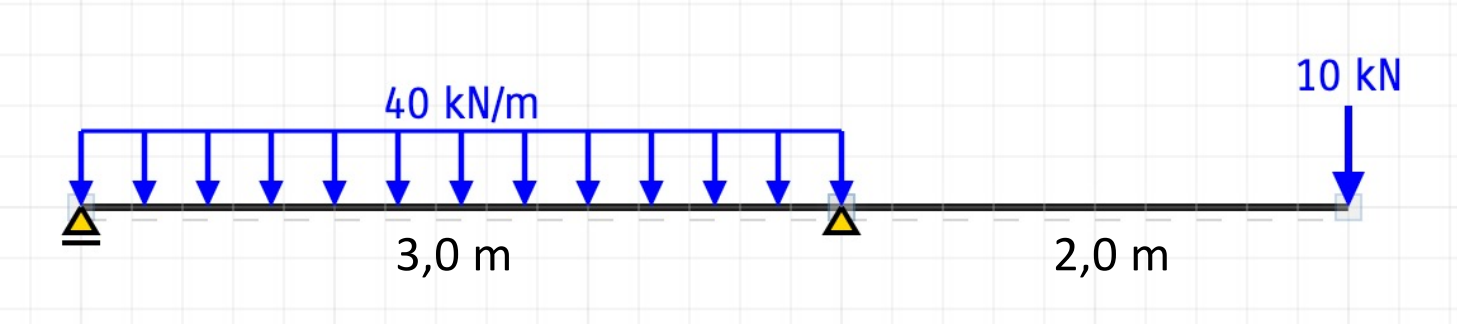




Roteiro:

1. Calcular a reação dos apoios
2. Elaborar o diagrama de esforços internos
3. Identificar os momentos máximos
4. Calcular o CM (LN) e o $I$ da seção
5. Calcular as tensões máximas de tração e compressão

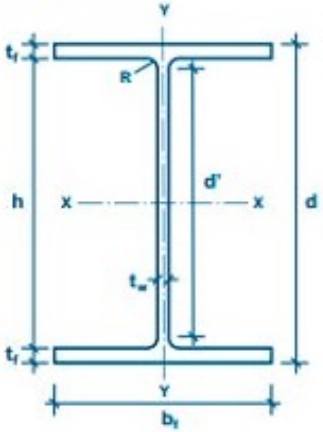
# Exemplo 2

- Para a estrutura abaixo, calcule o coeficiente de segurança sabendo que $\bar{\sigma}_T = 150\ MPa$ e $\bar{\sigma}_C = 120\ MPa$. Usar o perfil W 150 x 18,0.

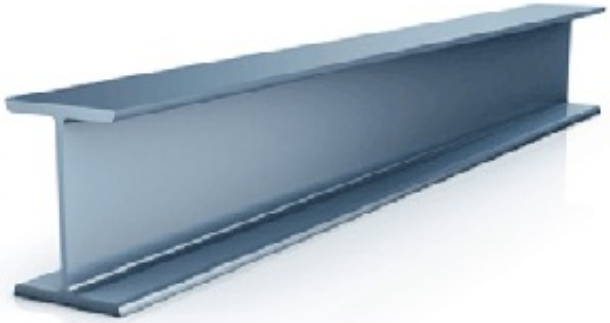



| BITOLA mm x kg/m | Massa Linear | d | $b_f$ | ESPESSURA | | h | d' | Área | EIXO X - X | | | | EIXO Y - Y | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $t_w$ | $t_f$ | | | | $I_x$ | $W_x$ | $r_x$ | $Z_x$ | $I_y$ | $W_y$ | $r_y$ | $Z_y$ |
| | Kg/m | mm | mm | mm | mm | mm | mm | $cm^2$ | $cm^4$ | $cm^3$ | cm | $cm^3$ | $cm^4$ | $cm^3$ | cm | $cm^3$ |
| W 150 x 13,0 | 13,0 | 148 | 100 | 4,3 | 4,9 | 138 | 118 | 16,6 | 635 | 85,8 | 6,18 | 96,4 | 82 | 16,4 | 2,22 | 25,5 |
| W 150 x 18,0 | 18,0 | 153 | 102 | 5,8 | 7,1 | 139 | 119 | 23,4 | 939 | 122,8 | 6,34 | 139,4 | 126 | 24,7 | 2,32 | 38,5 |
| W 150 x 22,5 (H) | 22,5 | 152 | 152 | 5,8 | 6,6 | 139 | 119 | 29,0 | 1229 | 161,7 | 6,51 | 179,6 | 387 | 50,9 | 3,65 | 77,9 |

Legenda

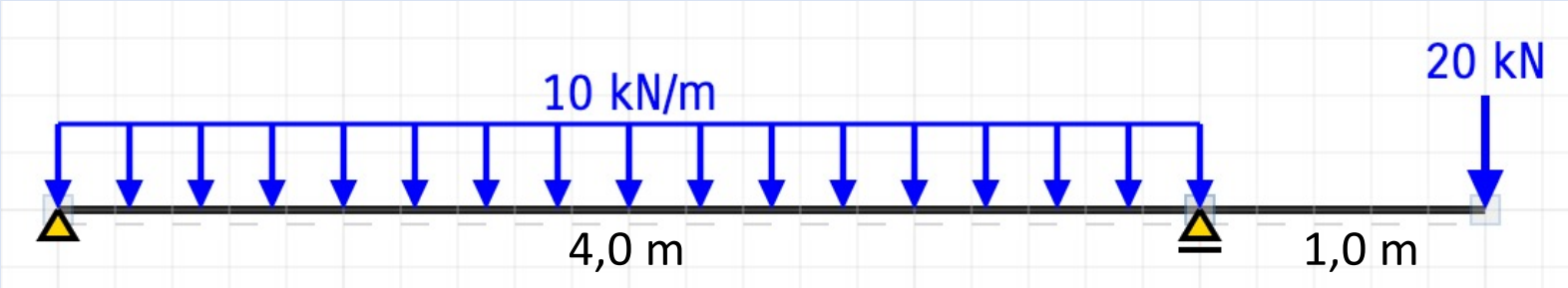


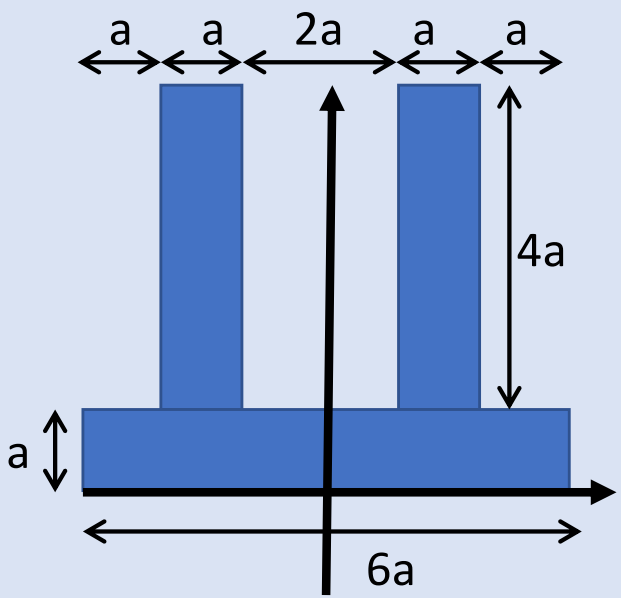

d = altura
d' = altura plana da alma
h = altura interna
$b_f$ = largura da aba do perfil
$t_f$ = espessura da aba
$t_w$ = espessura da alma
R = raio de concordância



# Exemplo 3

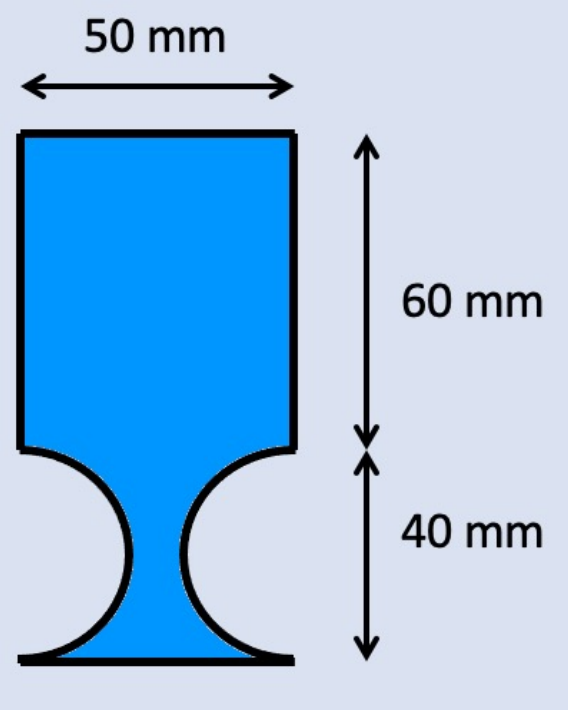
- Para a estrutura abaixo, será fabricado um perfil conforme o layout, de dimensões proporcionais à medida $a$. Calcule o valor de $a$ para que as tensões não ultrapassem os seguintes valores: $\bar{\sigma}_T = 100\ MPa$ e $\bar{\sigma}_C = 150\ MPa$.

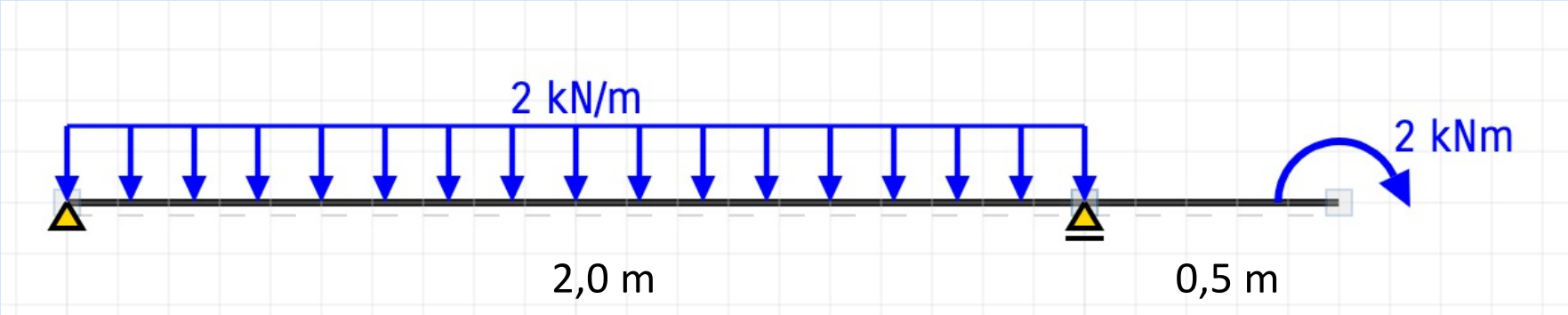


# Exercício 1

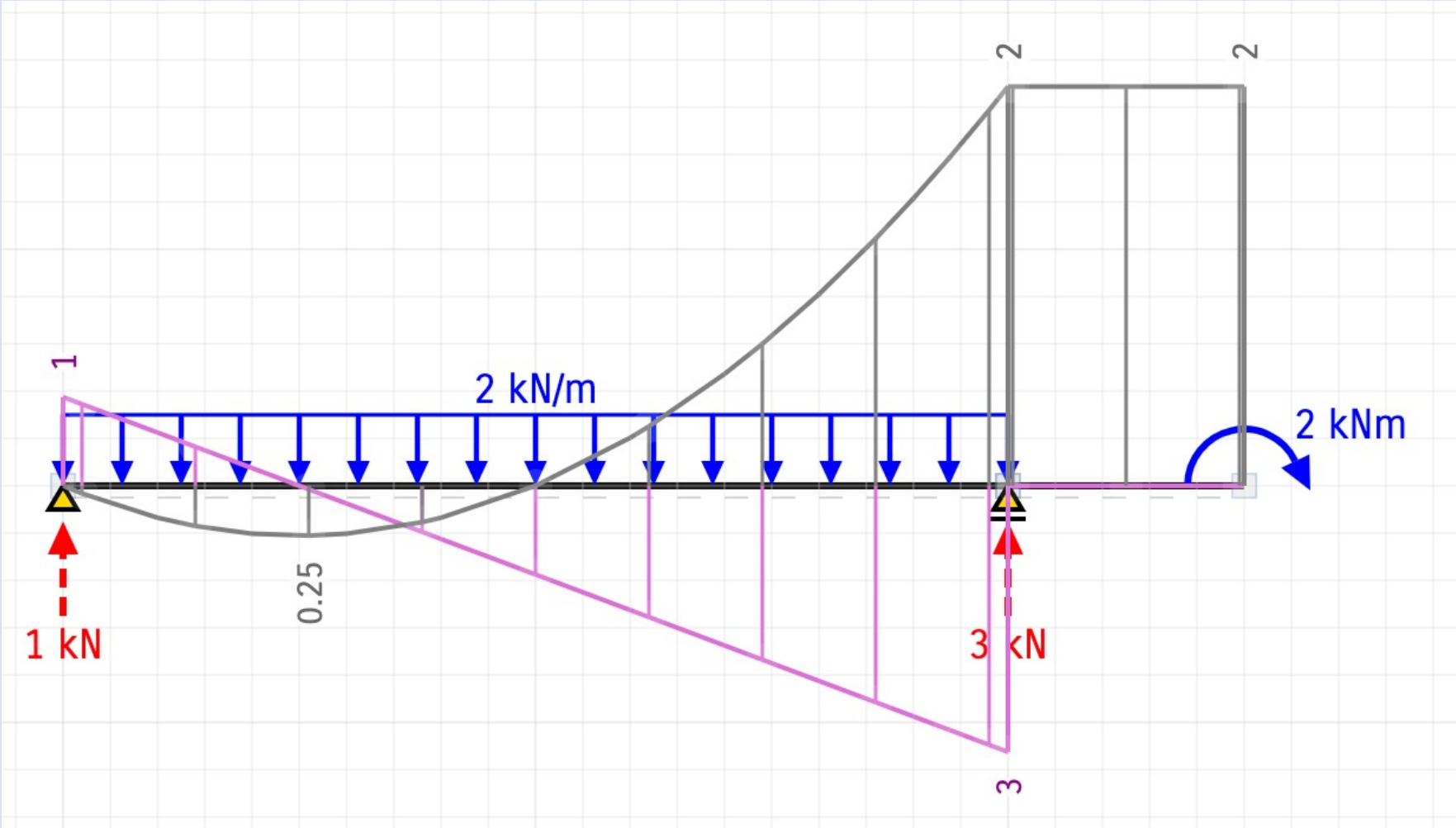
- O perfil esboçado ao lado será usado para a distribuição de cargas abaixo. Determine as tensões máximas.



# Exercício 1

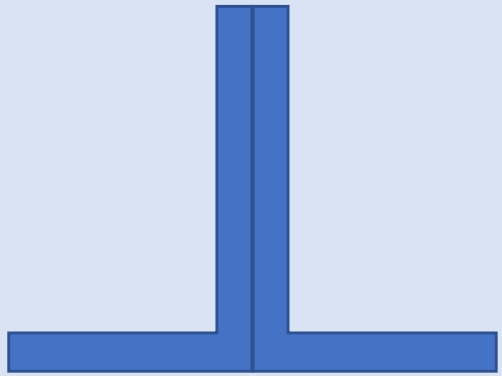
- Resposta



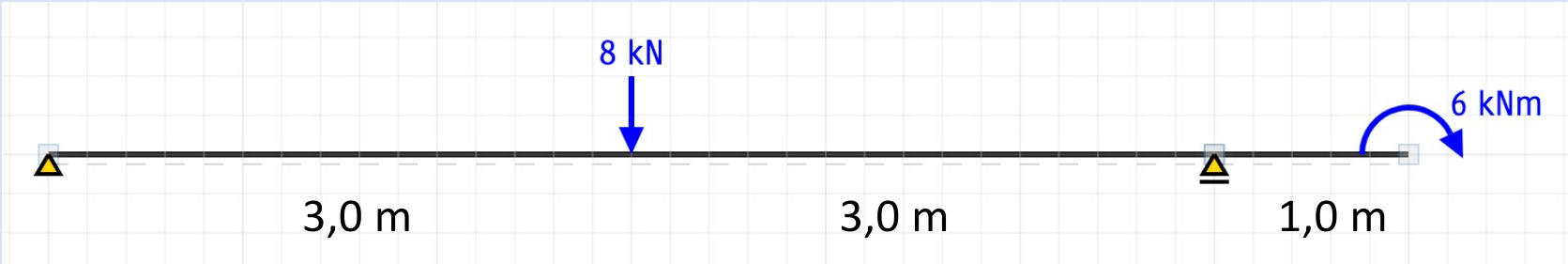

$$\sigma_{máx_T} = 31{,}6\ MPa;\ \sigma_{máx_C} = 47{,}5\ MPa$$

# Exercício 2

- Duas cantoneiras de 6” x 4” x 3/8” conforme montagem ao lado serão usadas para a construção da estrutura abaixo. Determine os coeficientes de segurança, sabendo que será usado um aço com as seguintes características:

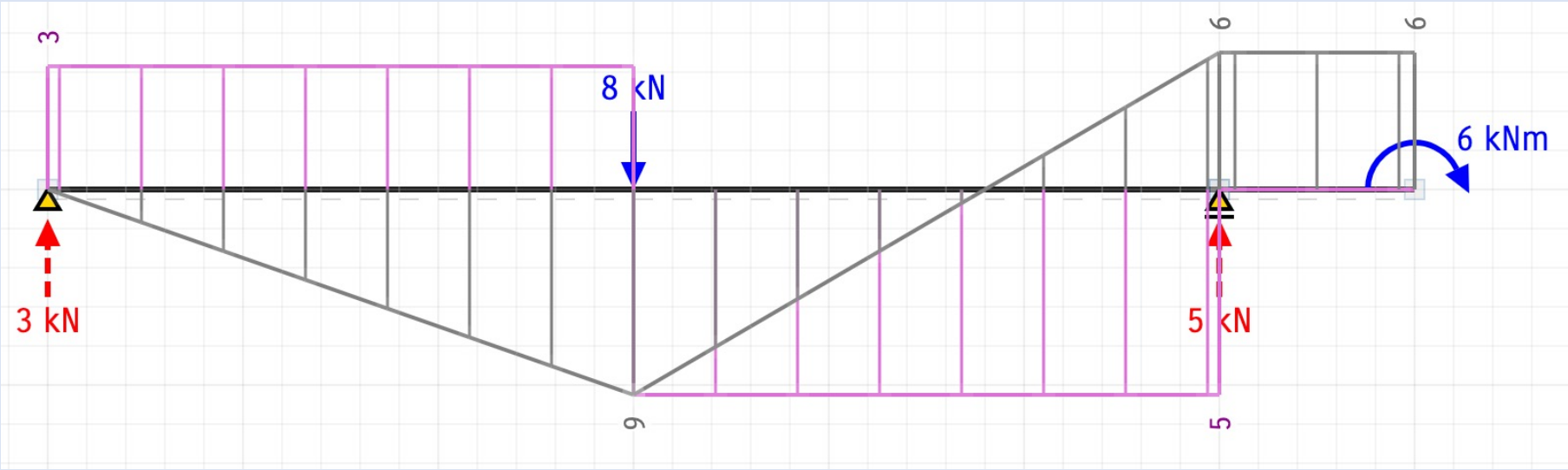


$$\bar{\sigma}_T = 250\ MPa;\ \bar{\sigma}_C = 200\ MPa$$



# Exercício 2

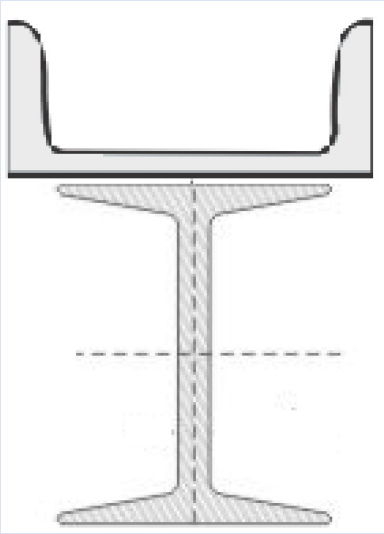
- Resposta

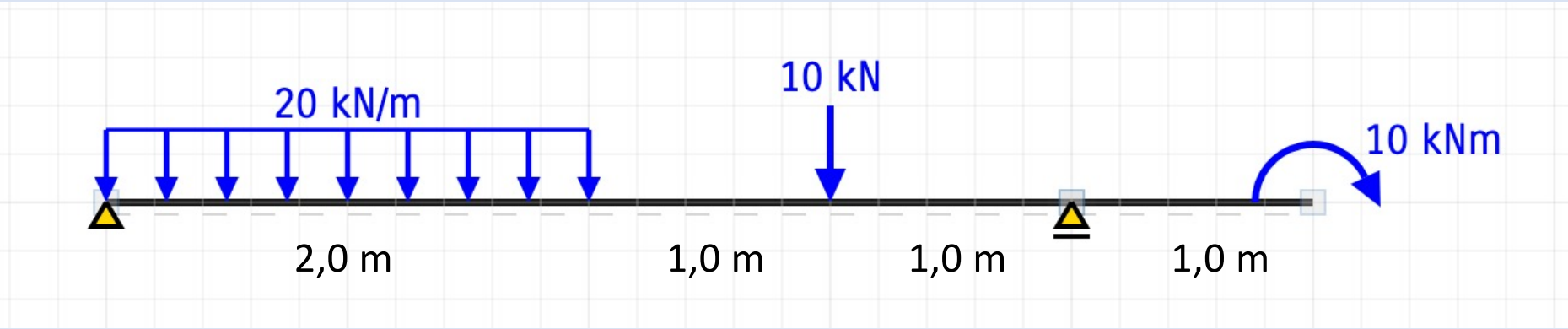



$s_T = 4{,}5; s_C = 2{,}4$

# Exercício 3

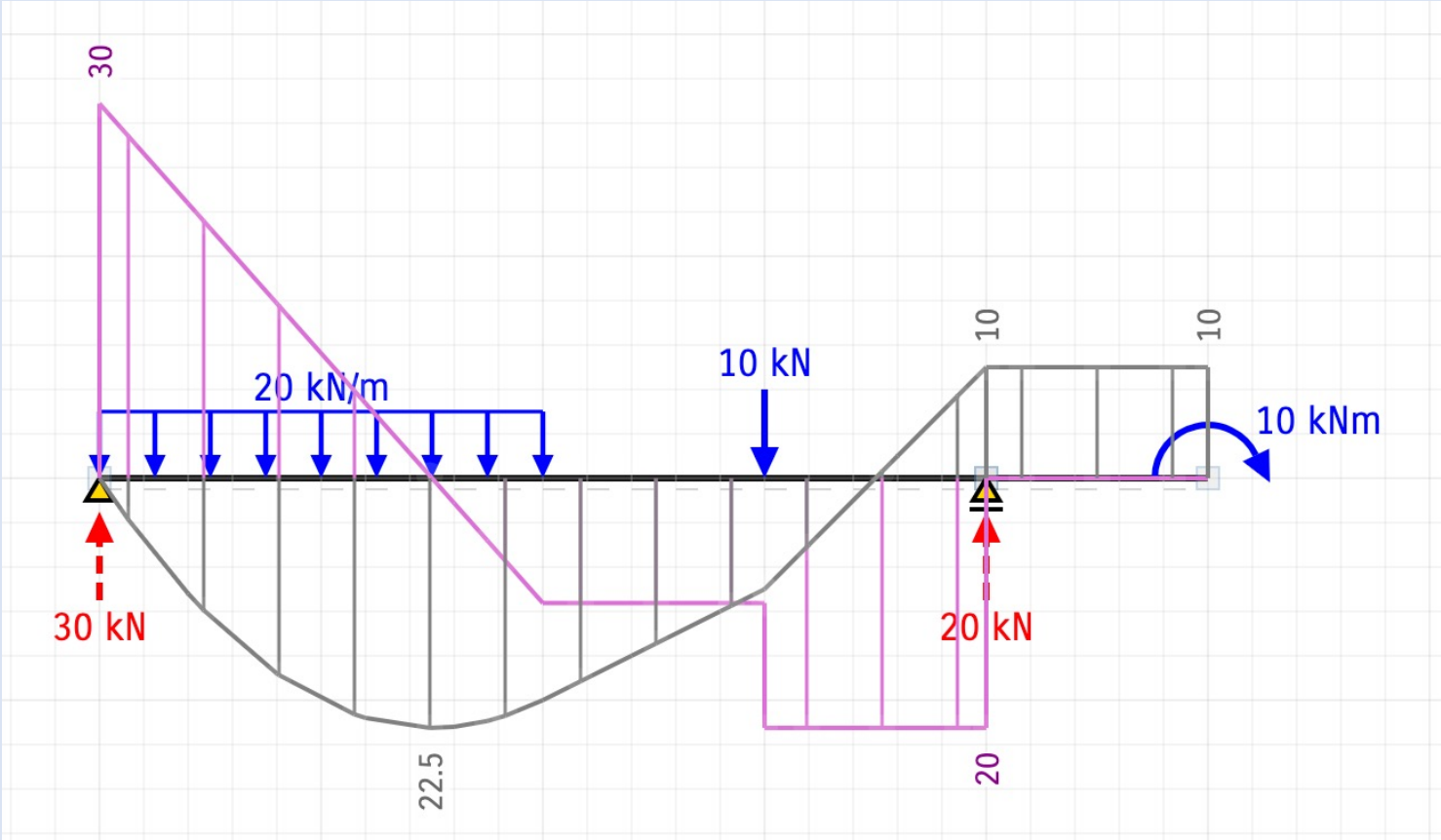
- Um perfil “I” de 10”x 4 5/8” x 0,310” e um perfil “U” de 6” x 2” x 0,200” serão combinados conforme esboçado ao lado, para suportar a distribuição de cargas abaixo. Calcule os coeficientes de segurança sabendo que o aço tem as seguintes propriedades: $\bar{\sigma}_T = 240\ MPa$ ; $\bar{\sigma}_C = 180\ MPa$





# Exercício 3

- Resposta

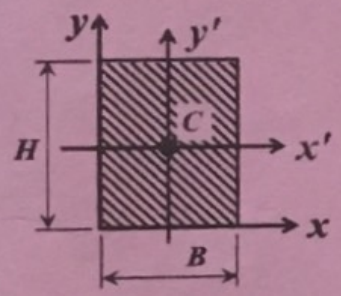



$$s_T = 5{,}0; s_C = 4{,}2$$

## Perfis Industriais e Estruturais (catálogo C.S.N)

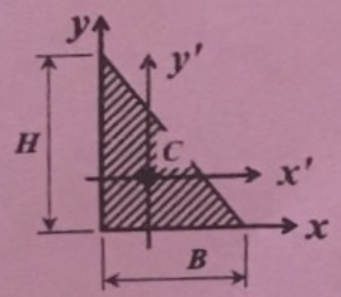
| Perfil AxBxC | A cm² | $m_e$ Kg/m | $\bar{x}$ cm | $\bar{y}$ cm | $\bar{I}_{x'}$ cm⁴ | $\bar{I}_{y'}$ cm⁴ | $W_{x'}$ cm³ | $W_{y'}$ cm³ | $k_{x'}$ cm | $k_{y'}$ cm | $k_{z'}$ cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I 10" x 4⅝" x 0.310" | 48,1 | 37,7 | - | - | 5140 | 282 | 405 | 47,7 | 10,3 | 2,42 | 2,42 |
| U 6" x 2" x 0.200" | 15,5 | 12,2 | 1,30 | - | 546 | 28,8 | 71,7 | 8,20 | 5,94 | 1,36 | 1,36 |
| L 4" x 4" x ⅜" | 18,5 | 14,6 | 2,90 | 2,90 | 183 | 183 | 24,6 | 24,6 | 3,12 | 3,12 | 2,00 |
| L 6" x 4" x ⅜" | 23,3 | 18,3 | 2,39 | 4,93 | 562 | 204 | 54 | 26 | 4,90 | 2,97 | 2,24 |

## Figuras Planas Típicas e Perfis



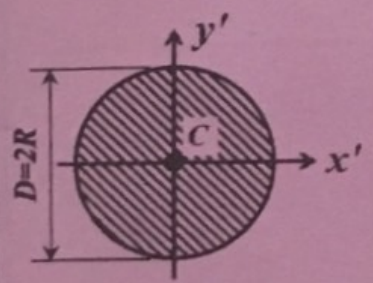

$$\bar{x} = \frac{B}{2} \qquad \bar{y} = \frac{H}{2} \qquad A = B \cdot H$$

$$\bar{I}_{x'} = \frac{B \cdot H^3}{12} \qquad \bar{I}_{y'} = \frac{H \cdot B^3}{12} \qquad \bar{I}_{x'y'} = 0$$




$$\bar{x} = \frac{B}{3} \qquad \bar{y} = \frac{H}{3} \qquad A = \frac{B \cdot H}{2}$$

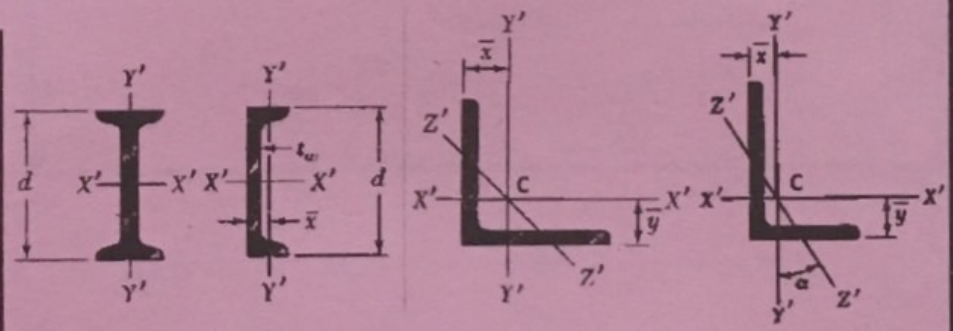
$$\bar{I}_{x'} = \frac{B \cdot H^3}{36} \qquad \bar{I}_{y'} = \frac{H \cdot B^3}{36} \qquad \bar{I}_{x'y'} = -\frac{B^2 \cdot H^2}{72}$$

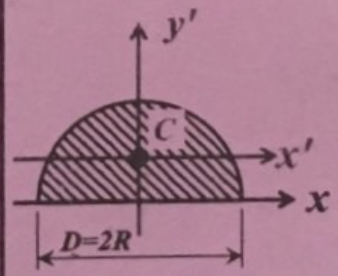



$$\bar{I}_{x'} = \bar{I}_{y'} = \frac{\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \qquad \bar{I}_{x'y'} = 0$$

$$A = \pi \cdot R^2 = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$J = \frac{\pi \cdot R^4}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

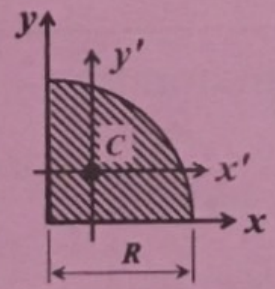



$$\bar{y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi} \qquad A = \frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{\pi \cdot D^2}{8}$$

$$\bar{I}_{y'} = \frac{\pi \cdot R^4}{8} = \frac{\pi \cdot D^4}{128}$$

$$\bar{I}_{x'} = 0{,}10980 \cdot R^4 \qquad \bar{I}_{x'y'} = 0$$




$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi} \qquad A = \frac{\pi \cdot R^2}{4} = \frac{\pi \cdot D^2}{16}$$

$$\bar{I}_{x'} = \bar{I}_{y'} = 0{,}05488 \cdot R^4 \qquad \bar{I}_{x'y'} = -0.01647 \cdot R^4$$

# Ao final dessa aula você deve ser capaz de:

- Entender as premissas do cálculo de FNS
- Definir matematicamente as grandezas fundamentais envolvidas
- Interpretar o diagrama tensão-deformação
- Compreender o conceito da fórmula do cálculo da tensão de flexão
- Calcular a tensão máxima de estruturas sujeitas à flexão
- Calcular o coeficiente de segurança de estruturas sujeitas à flexão