

UC Resistência dos materiais e elementos de máquinas

Torção

Eixos circulares

Prof. Simões



Ao final
dessa aula
você deverá
ser capaz de:

Definir torque e suas grandezas

Desenvolver o cálculo do ângulo de torção

Definir e calcular a tensão de cisalhamento

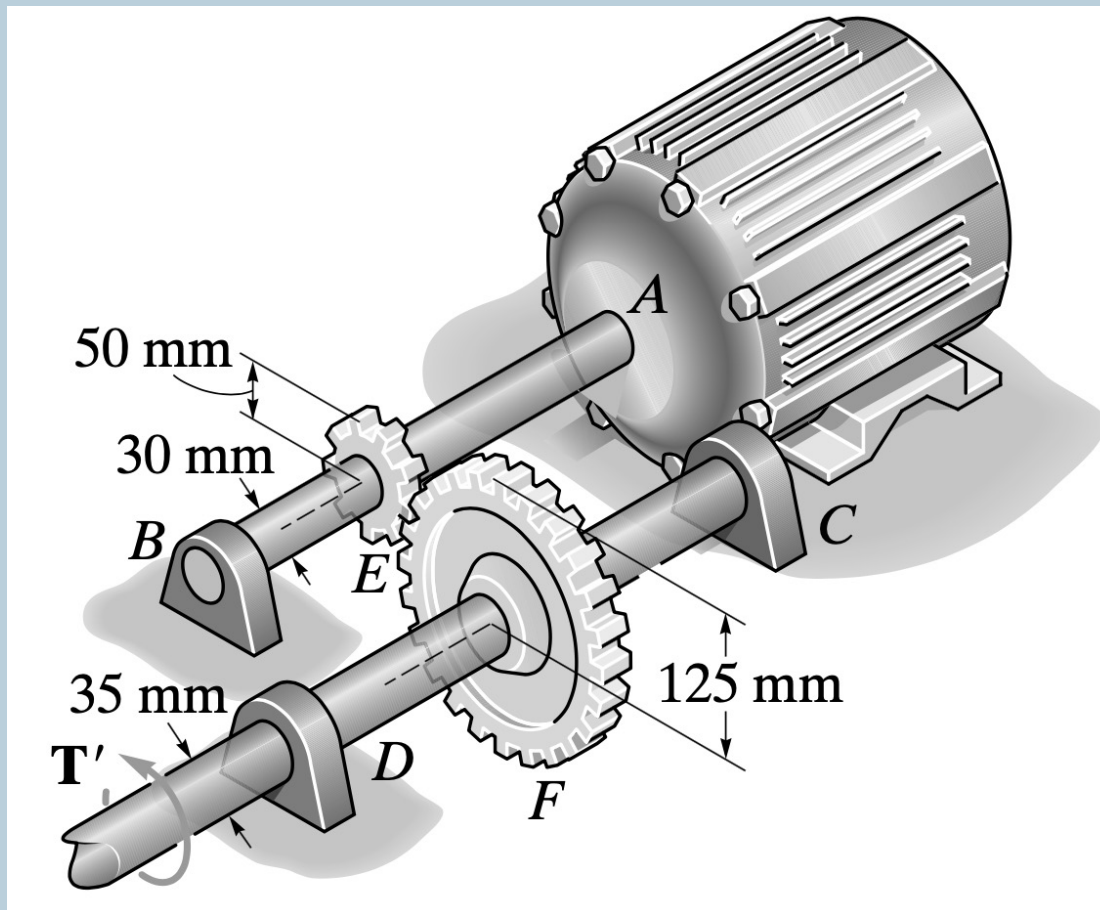
Identificar a importância e consequência prática do momento polar de inércia na resistência à torção

Relembrar as regras de transmissão em polias e engrenagens

Dimensionar eixos a partir do torque e potência a serem transmitidos

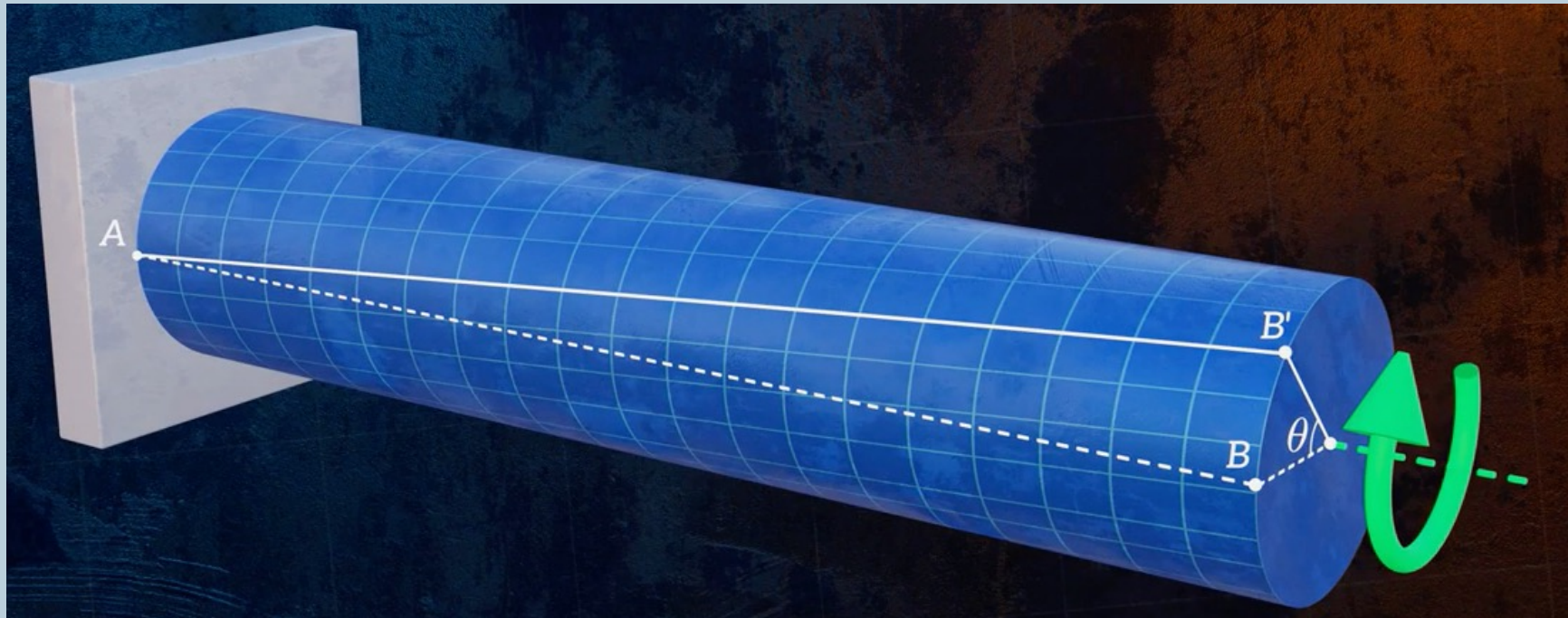
Problema típico

- Um motor de 2,0 CV, aciona o eixo AB a uma rotação de 286 rpm. Determine o torque no eixo CD e a tensão máxima de cisalhamento em cada eixo.



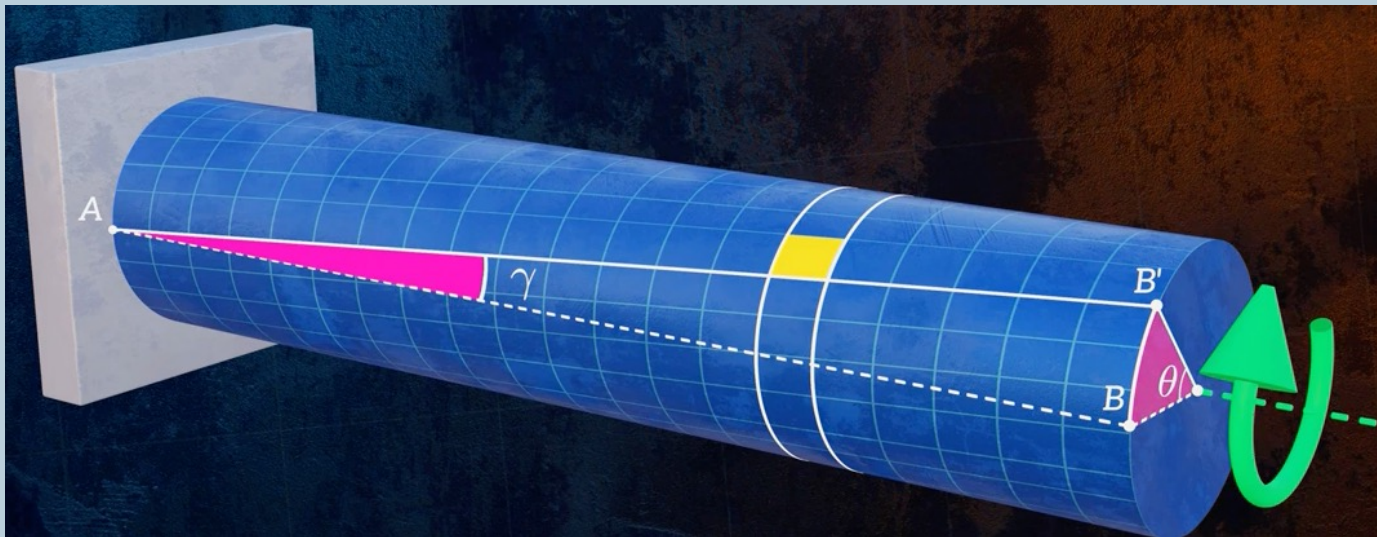
Torque - definições

- É um momento que tende a torcer um elemento em torno de seu eixo longitudinal
- Em um material homogêneo, as seções transversais não se deformam.
- As linhas longitudinais formam uma hélice



Ângulo de deformação

- Em relação à posição inicial, as linhas longitudinais formam um ângulo γ após a aplicação do torque, chamado **ângulo de deformação**.
- A extremidade livre gira em um ângulo θ chamado **ângulo de torção**.



- Como γ é pequeno, podemos assumir que $\gamma \approx \tan \gamma$. Assim:

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{BB'}{AB}$$

Ângulo de deformação

- Como:

$AB = L \Rightarrow$ comprimento da barra

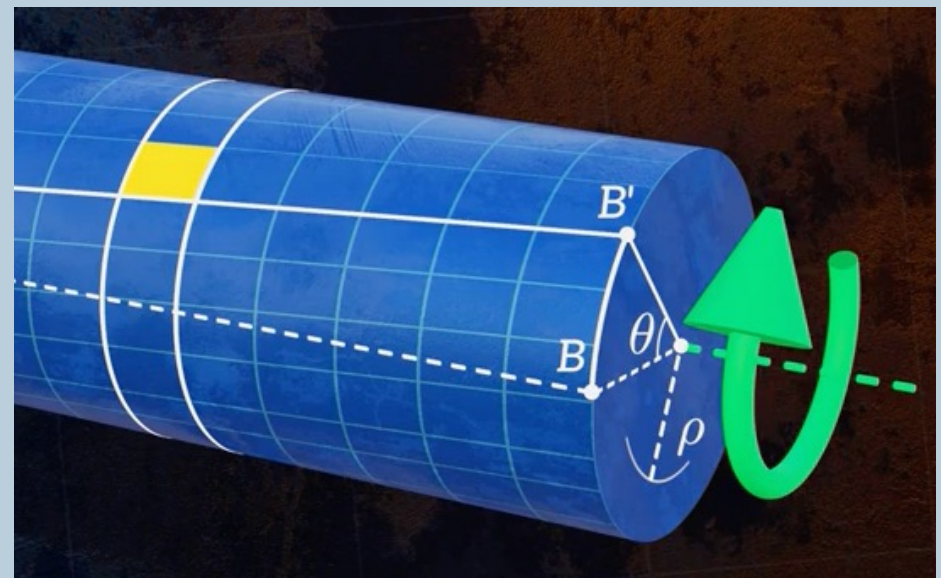
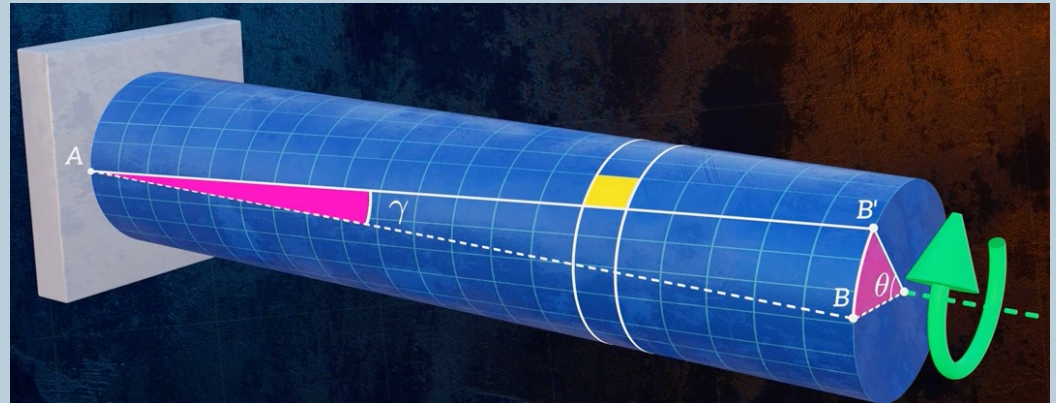
$BB' = r \cdot \theta$, sendo θ em radianos

- Temos que:

$$\gamma = \frac{BB'}{AB} = \frac{r\theta}{L}$$

- E, para qualquer raio, teremos:

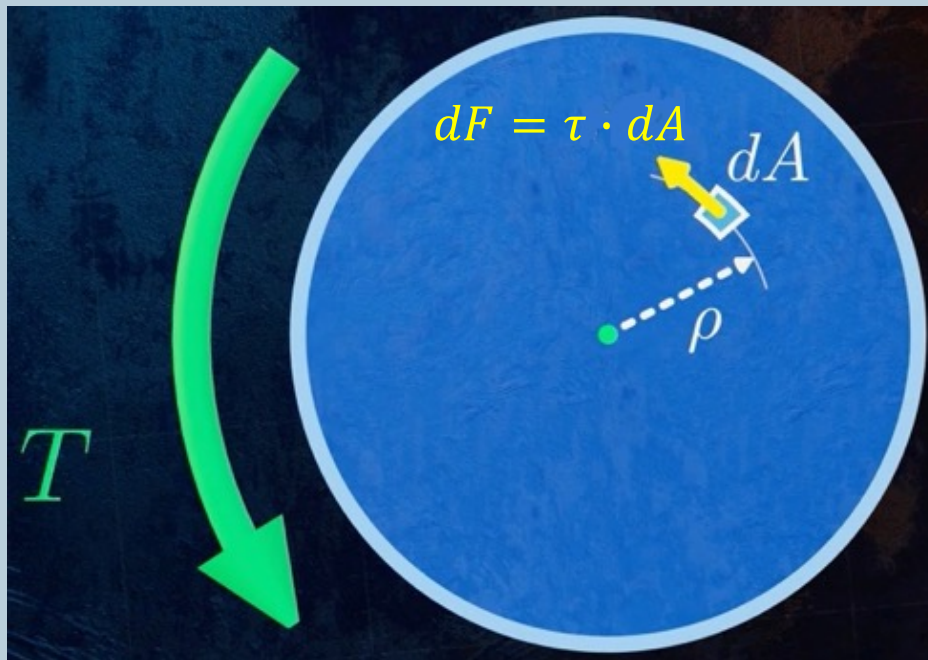
$$\gamma = \frac{r\rho}{L} \quad (1)$$



Tensão de cisalhamento

- Cada elemento de área dA da seção transversal está sujeito a:
 - Uma tensão de cisalhamento τ
 - Um torque dT

$$\tau = \frac{dF}{dA} \Rightarrow dF = \tau \cdot dA$$



$$dT = dF \cdot \rho$$

$$dT = \tau \cdot dA \cdot \rho$$

$$T = \int_0^A \tau \cdot \rho \cdot dA$$

Tensão de cisalhamento

- Na integral anterior, se multiplicarmos e dividirmos por ρ , teremos

$$T = \int_0^A \frac{\tau}{\rho} \cdot \rho^2 \cdot dA$$

- Como τ e ρ são constantes, vem:

$$T = \frac{\tau}{\rho} \cdot \int_0^A \rho^2 \cdot dA$$

Como já demonstrado, essa integral é o momento polar de inércia J :

$$J = \int_0^A \rho^2 \cdot dA$$

- Assim temos que:

$$T = \frac{\tau}{\rho} \cdot J \Rightarrow \tau = \frac{T \cdot \rho}{J} \quad (2)$$

E a tensão máxima:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T \cdot r}{J}$$

Momento polar de inércia

- Considerando cada elemento como um retângulo de base $2\pi\rho$ e altura $d\rho$, teremos que:

$$dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$$

Isto é, o comprimento do retângulo vezes sua altura

- Assim, para um eixo maciço:

$$J = \int_0^R \rho^2 \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho \Rightarrow J = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho \Rightarrow J = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

- Com um desenvolvimento similar, para um eixo oco:

$$J = \frac{\pi}{2} (r_{ext}^4 - r_{int}^4)$$

A propósito, essas fórmulas estão em qualquer tabela...

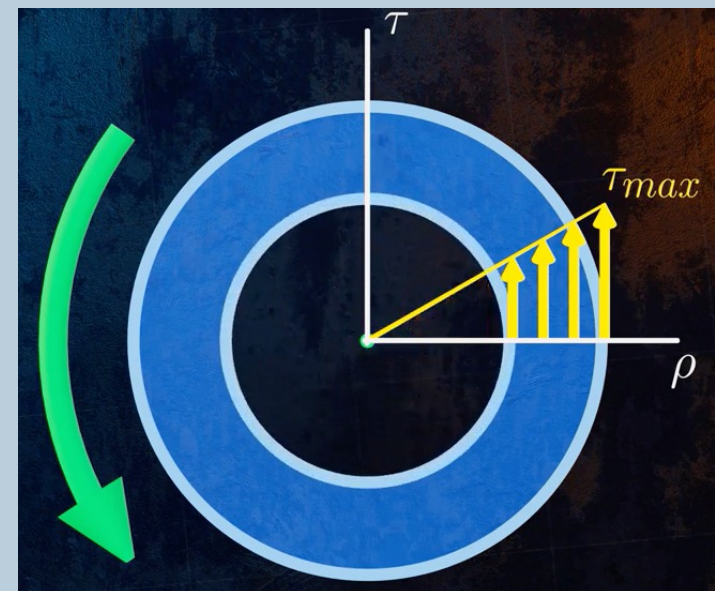
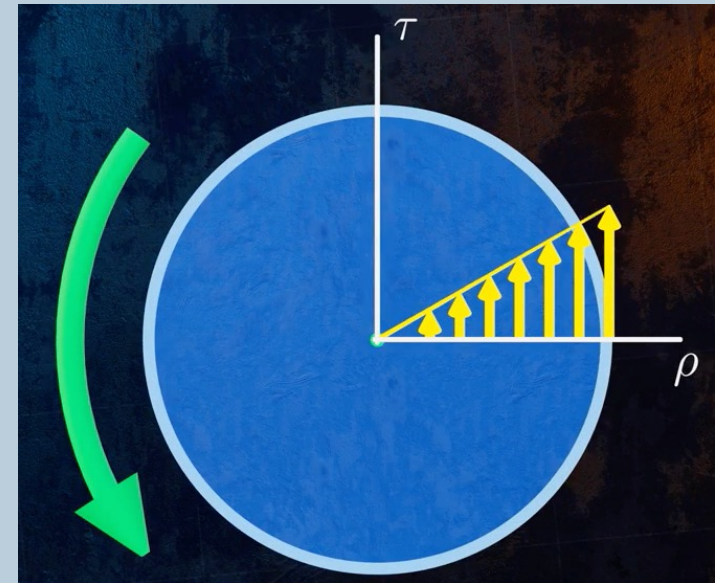


Momento polar de inércia

- Da equação da tensão (abaixo) é possível observar que a tensão cresce linearmente com o raio.

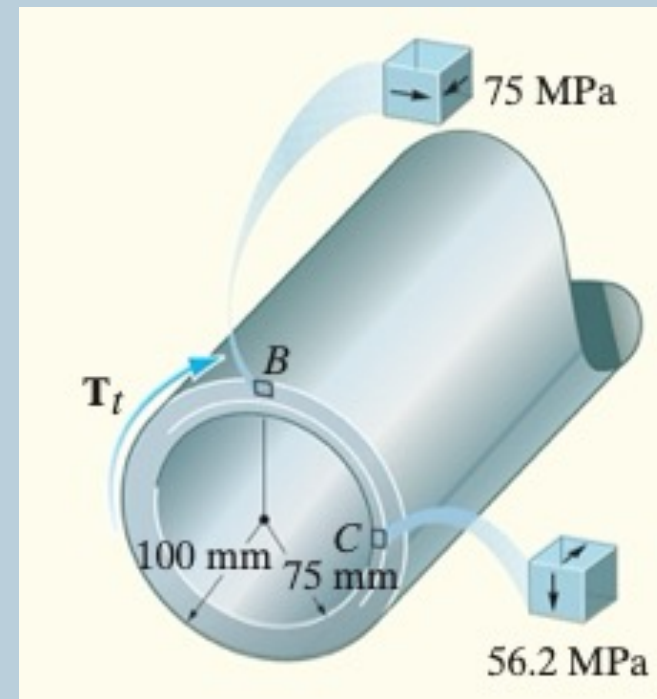
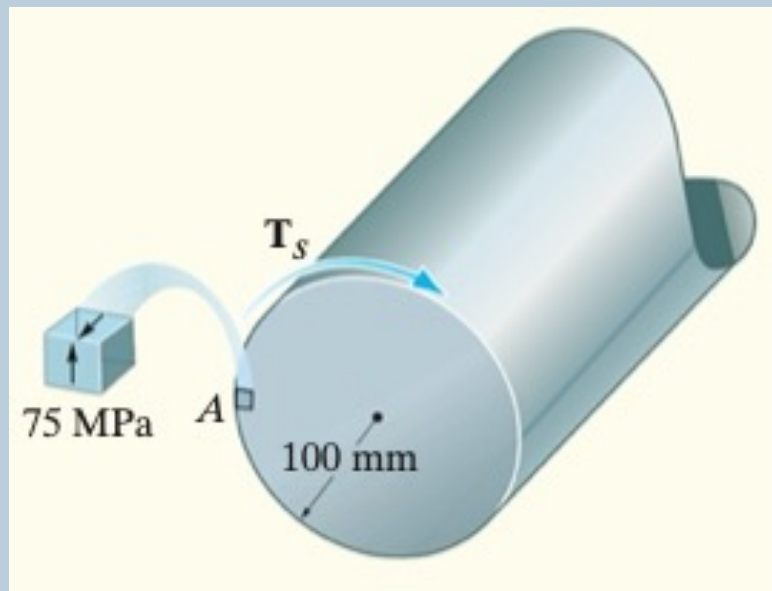
$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J}$$

- Também, é possível concluir que os eixos ocos são mais eficientes, pois concentram o material resistente na região de maior tensão



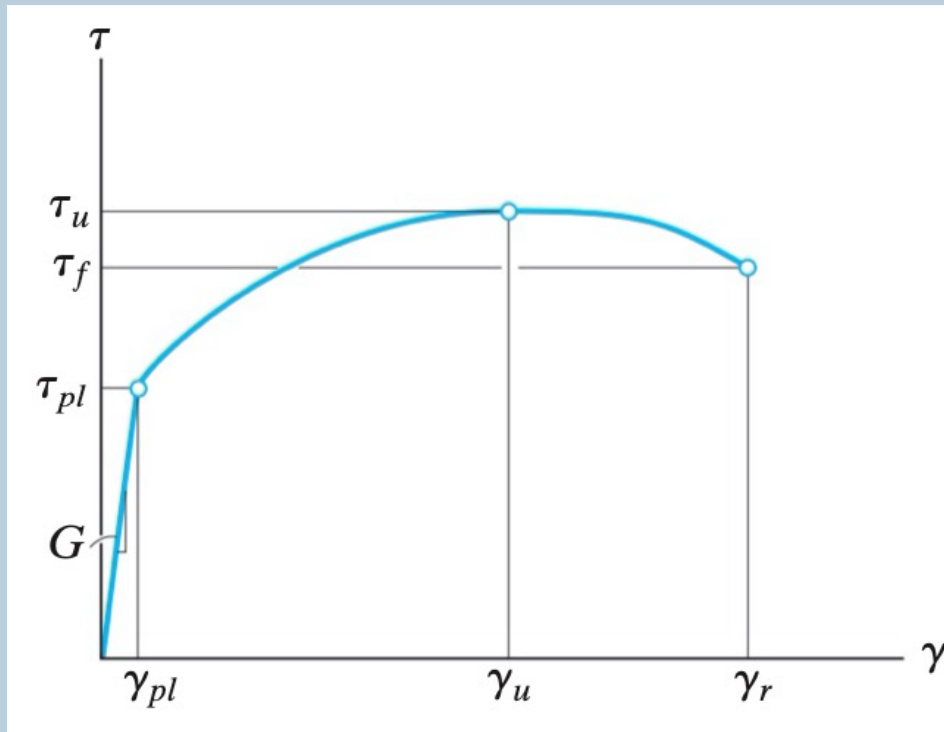
Exemplo 1

- Calcule o torque máximo suportado por cada eixo abaixo, considerando $\bar{\tau} = 75 \text{ MPa}$ para o material de ambos. Calcule o torque máximo suportado por cada eixo, e por unidade de área da seção transversal em cada eixo. Analise a eficiência do perfil. Calcule também a tensão de cisalhamento na superfície interna do tubo.



Módulo de cisalhamento

- O comportamento dos materiais submetidos ao cisalhamento está ilustrado a seguir



No gráfico, definimos a propriedade G , módulo de elasticidade de cisalhamento, ou módulo de rigidez ou módulo de cisalhamento.

Os valores típicos de G para os aços vão de 75 a 80 Gpa

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{\tau}{G} \quad (3)$$



Ângulo de torção

- Da equação (1), temos que:

$$\gamma = \frac{r\rho}{L} \Rightarrow \theta = \frac{\gamma L}{\rho}$$

- Aplicando a equação 3, $\gamma = \frac{\tau}{G}$, fica:

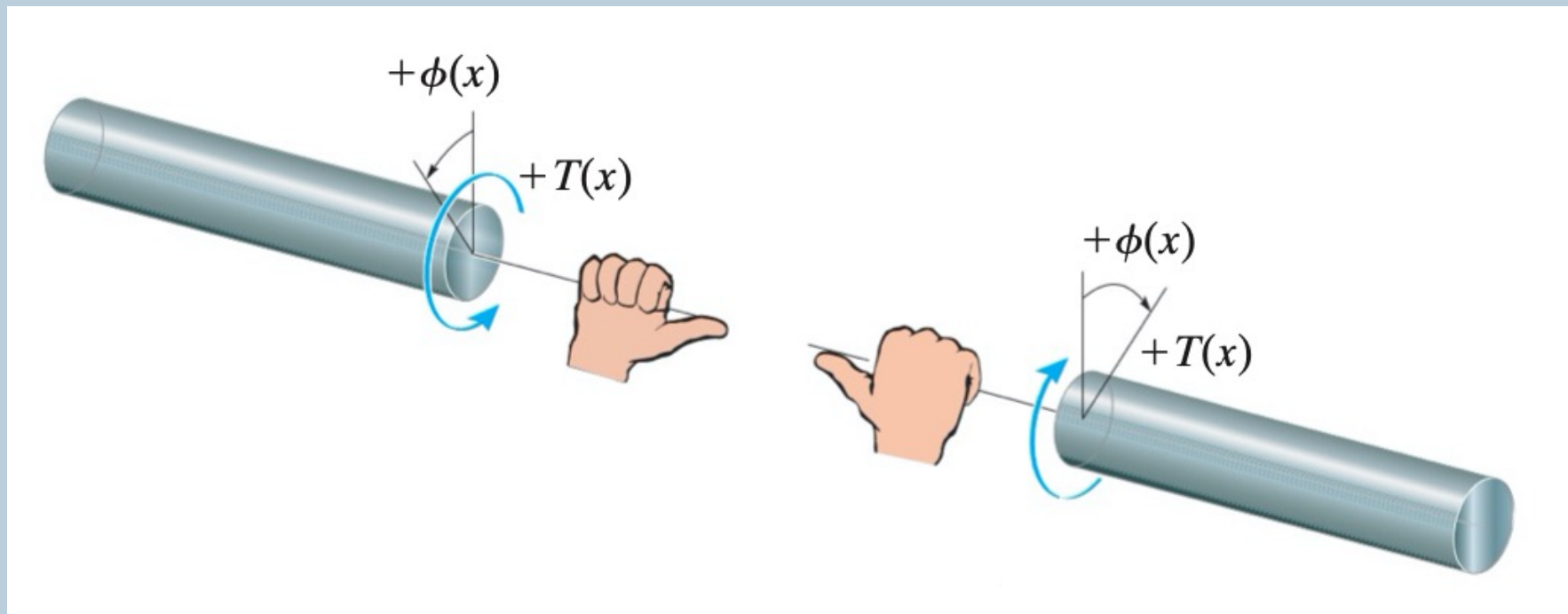
$$\theta = \frac{\gamma L}{\rho} \Rightarrow \theta = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{L}{\rho}$$

- E substituindo pela equação (2), $\tau = \frac{T \cdot \rho}{J}$

$$\theta = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{L}{\rho} \Rightarrow \theta = \frac{T \cdot \rho}{J} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{L}{\rho} \Rightarrow \theta = \frac{T \cdot L}{J \cdot G}$$

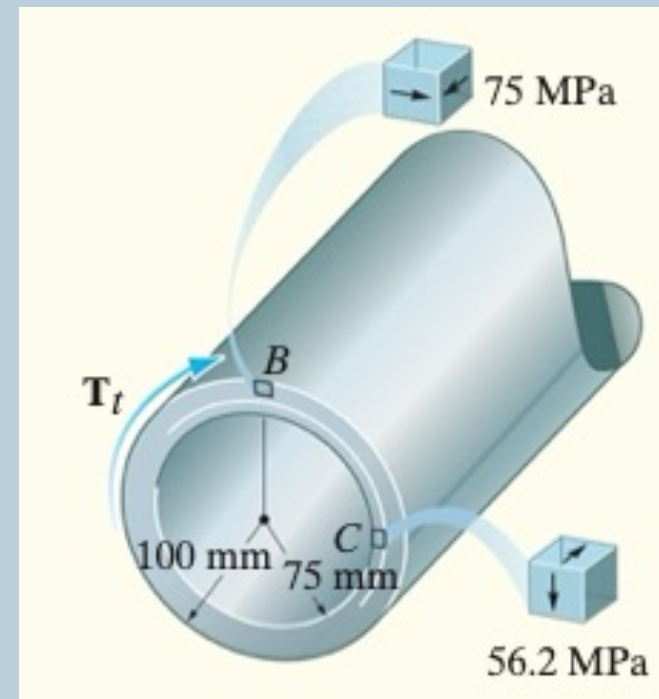
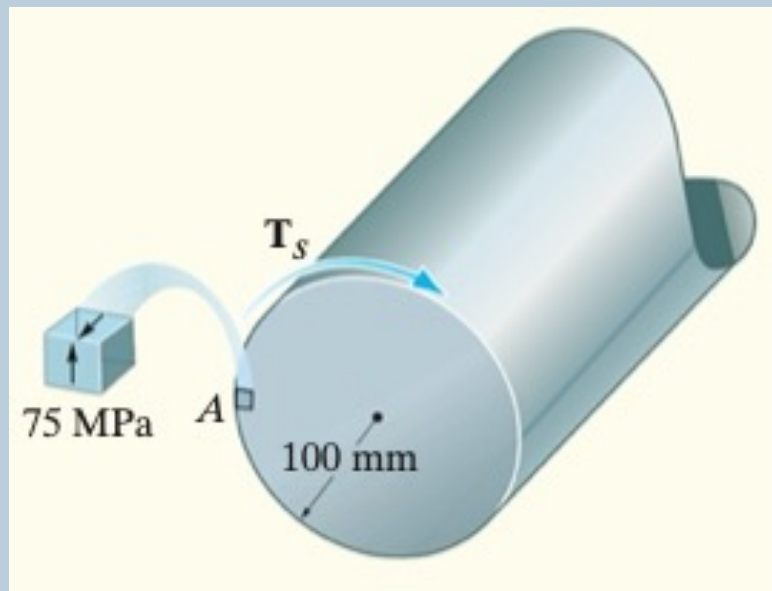
Convenção de sinal

- Para determinar o sinal do torque e do ângulo, usamos a regra da mão direita.
- Escolhe-se uma das extremidades para iniciar a análise
- Os dedos seguem o sentido do torque:
 - O torque e o ângulo serão positivos se o polegar apontar para fora do eixo
 - O torque e o ângulo serão negativos se o polegar apontar para dentro do eixo



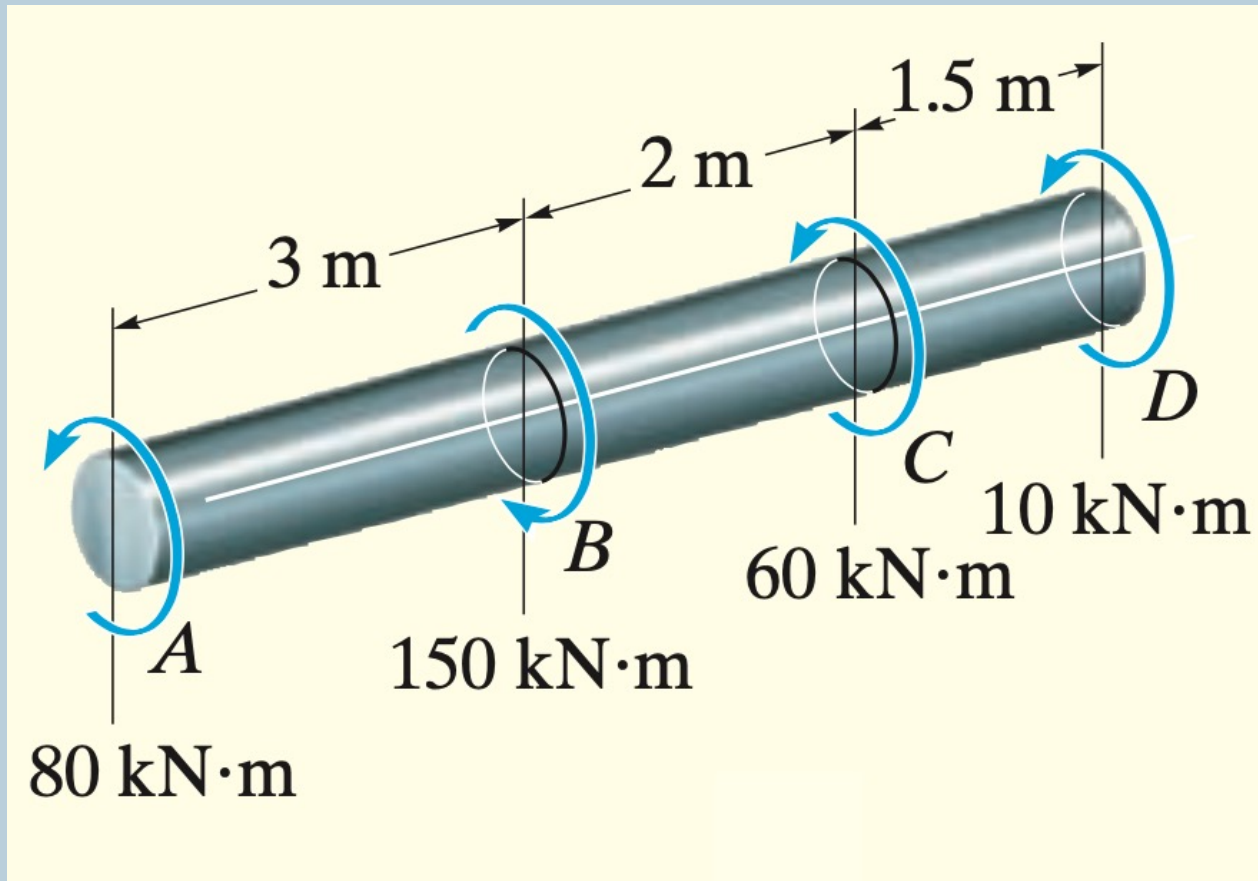
Exemplo 2

- Usando os dados do exemplo anterior, e assumindo um comprimento de 1,0 metro e $G = 80 \text{ GPa}$, calcule o ângulo de torção θ para o torque máximo encontrado.



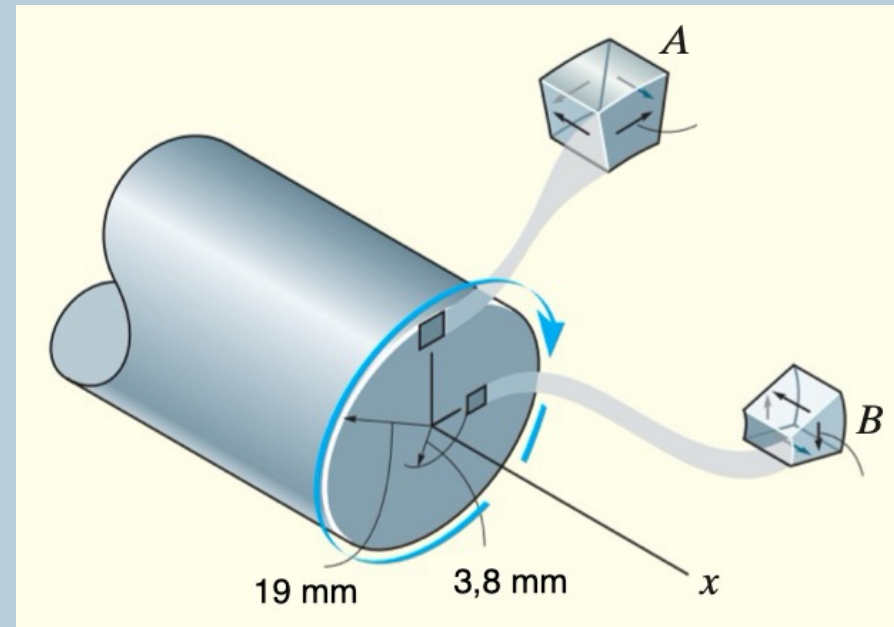
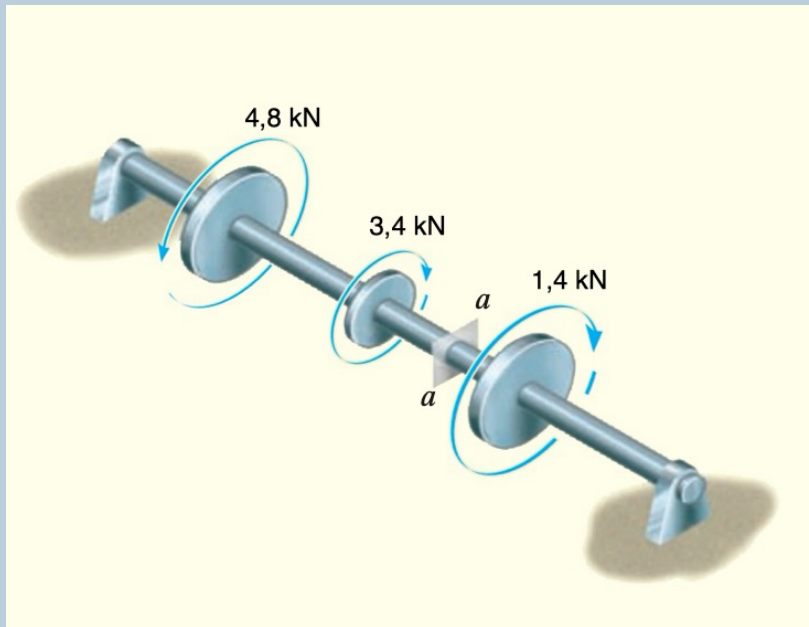
Exemplo 3

- Determine o ângulo de torção da extremidade A em relação à extremidade D do eixo abaixo ($G = 80 \text{ GPa}$):



Exercício 1

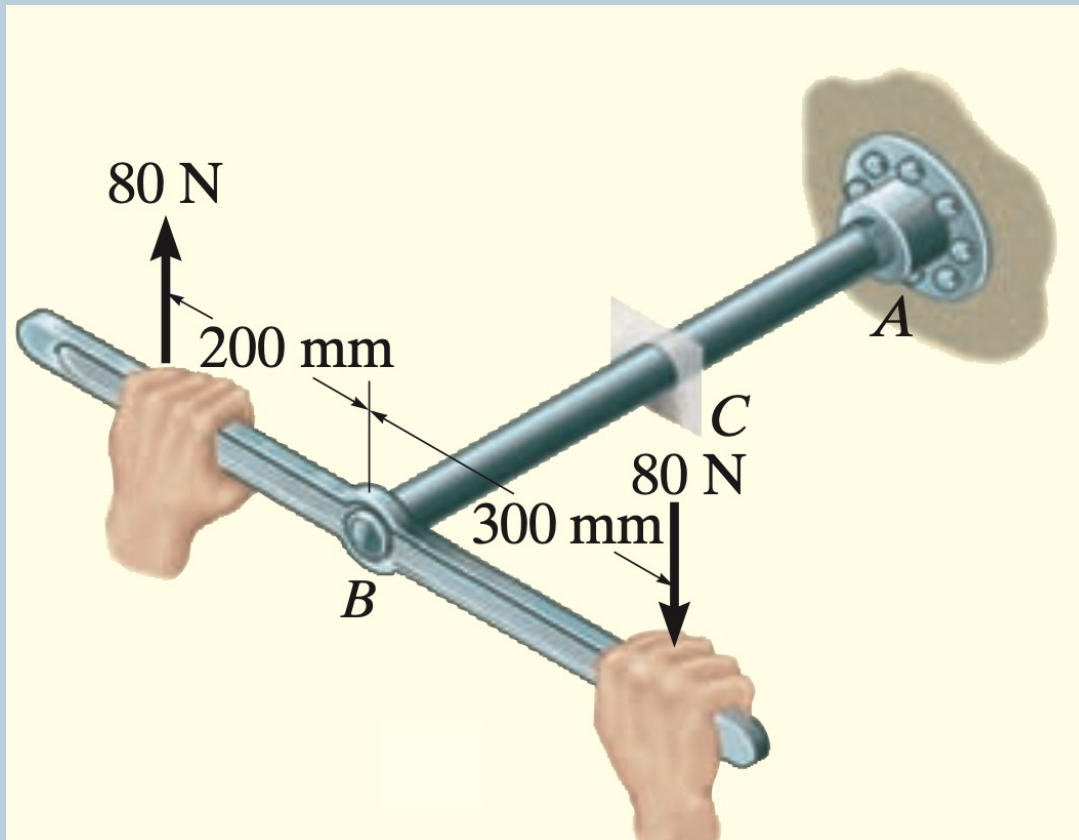
- Um eixo de 38 mm de diâmetro é suportado por dois mancais e está sujeito a 3 torques. Determine a tensão de cisalhamento nos pontos A e B, localizados no plano aa



Resposta: $\tau_A = 130 \text{ MPa}$; $\tau_B = 26 \text{ MPa}$

Exercício 2

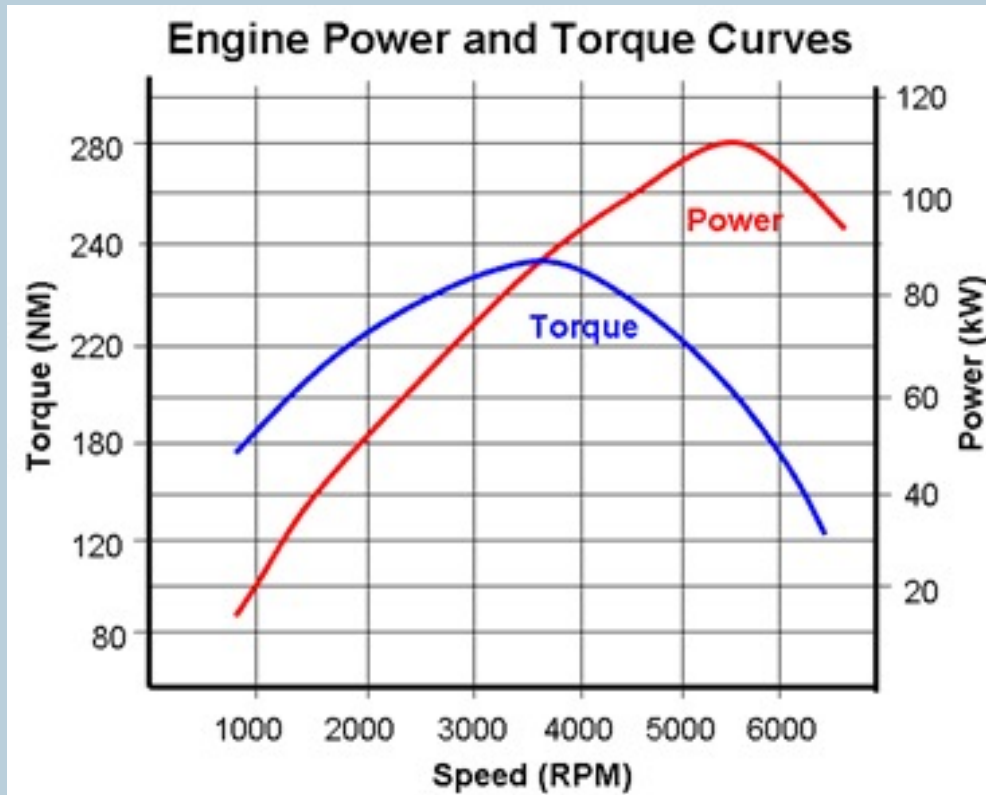
- O tubo mostrado possui um diâmetro interno de 80 mm e externo de 100 mm. Uma extremidade está fixada e a outra está sujeita a um torque. Determine a tensão de cisalhamento na superfície interior e exterior do tubo e o ângulo de torção para um comprimento de 80 cm e $G=80$ MPa.



Resposta: $\tau = 345 \text{ kPa}$; $\theta = 0,004^\circ$

Potência transmitida por um eixo

- Conceitualmente, o torque está ligado ao trabalho, e a potência a 'velocidade' com que o trabalho é executado



Ao lado, duas curvas típicas de potência e torque de um motor a explosão.



Potência transmitida por um eixo

- Da Mecânica, temos que:

$$P = T \cdot \omega$$

Onde:

$P \Rightarrow$ *potência (W)*

$T \Rightarrow$ *torque (Nm)*

$\omega \Rightarrow$ *velocidade angular $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$*

- Lembrando que $1 \text{ rpm} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}}$, vem:

$$P = \frac{T \cdot n \cdot 2\pi}{60} \Rightarrow T = \frac{60 \cdot P}{2\pi \cdot n}$$

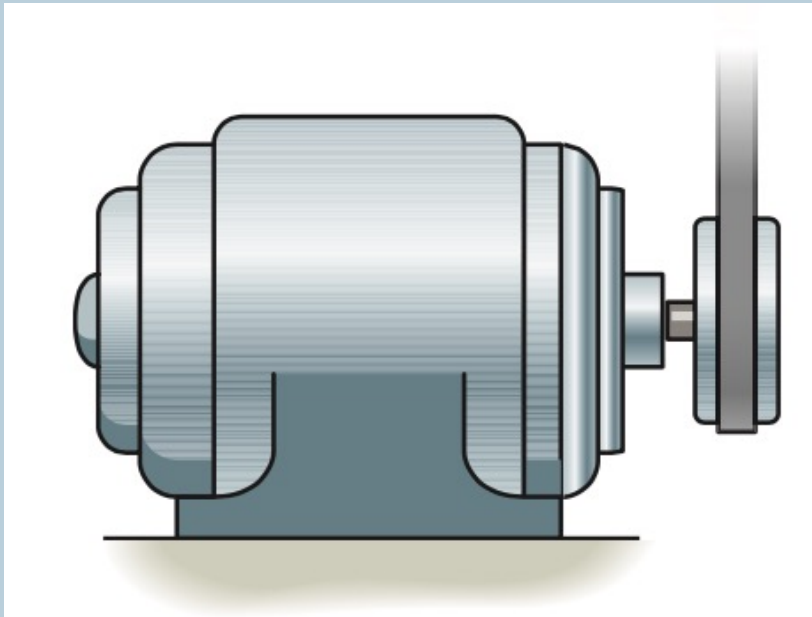
$n \Rightarrow$ *rotações por minuto*

Relembrando:
1 CV = 735,5 W
1 HP = 745,7 W



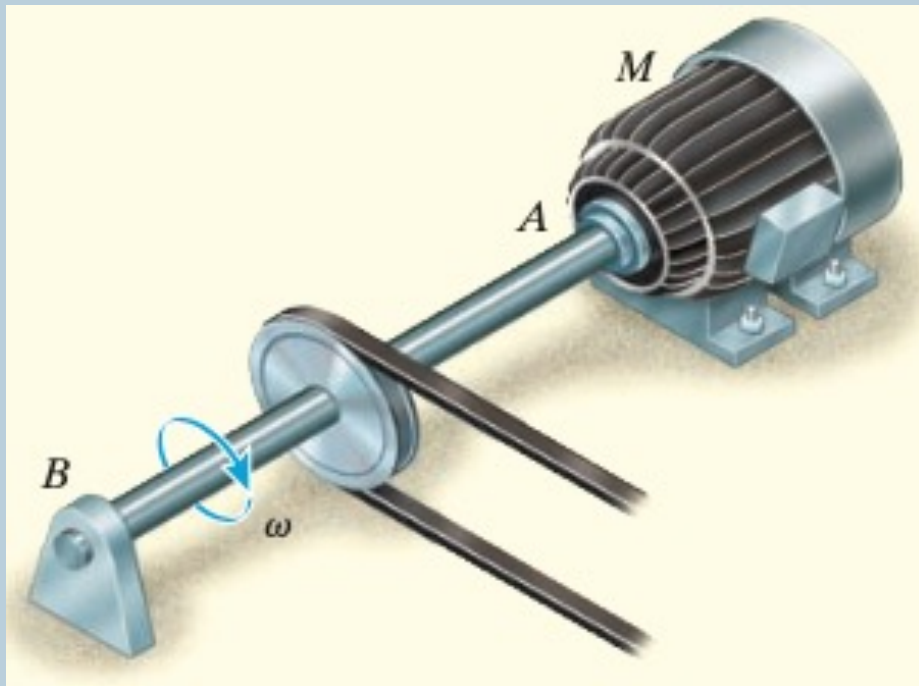
Exemplo 4

- Um motor de 10 HP gira a 1200 rpm. Determine o torque produzido pelo motor em $N \cdot m$.



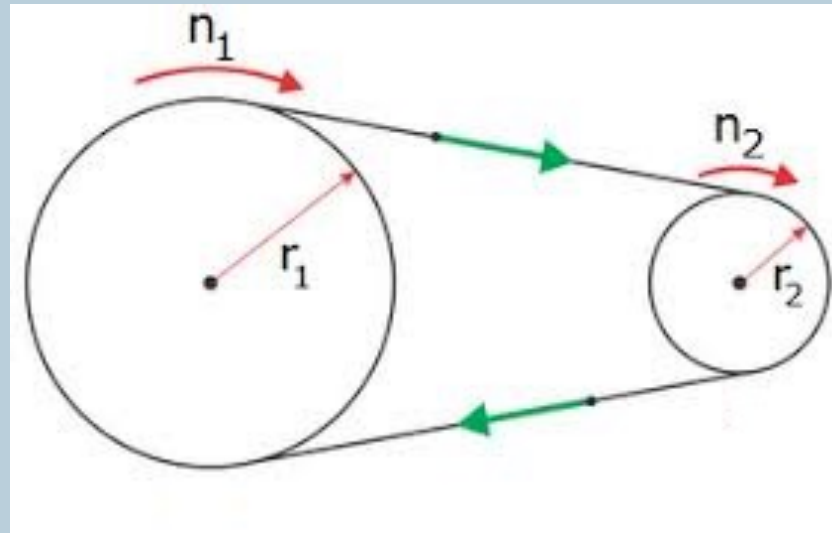
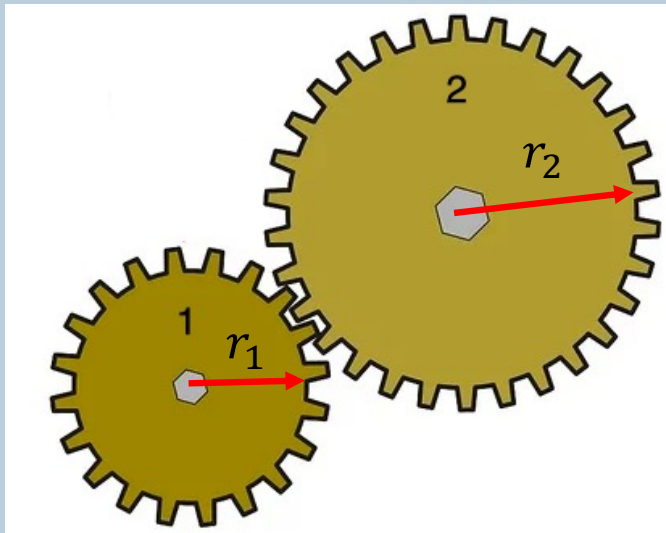
Exemplo 5

- Determine o diâmetro mínimo de um eixo maciço que transmitirá uma potência de 5,0 HP a uma rotação de 175 rpm. O aço para fabricação do eixo tem $\bar{\tau} = 100 \text{ MPa}$



Transmissão por polias e engrenagens

- A rotação e torque transmitidos seguem as relações de proporção com o diâmetro (ou raio) da polia, e, no caso das engrenagens, do número de dentes ou do diâmetro (ou raio) primitivo (linha de contato entre as engrenagens).



$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Onde:

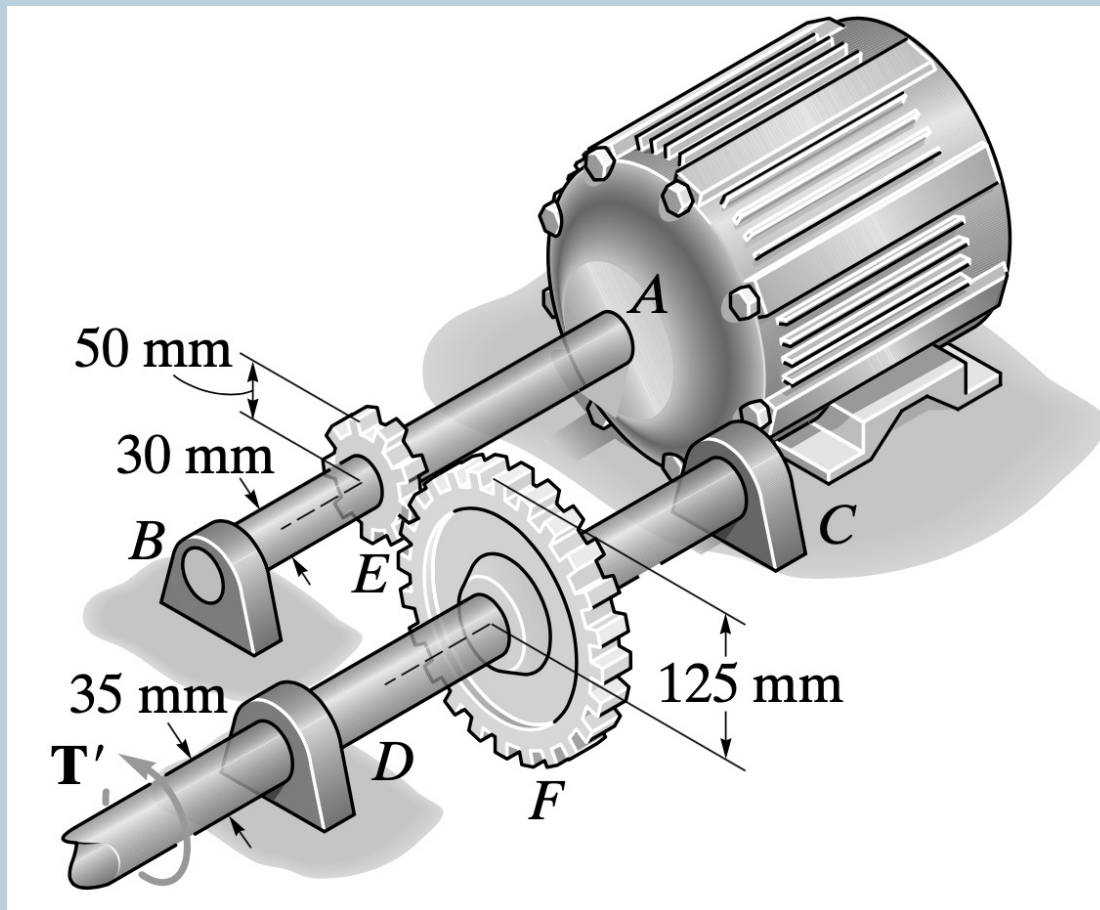
$T \Rightarrow$ torque

$r \Rightarrow$ raio

$\omega \Rightarrow$ velocidade angular (rotação)

Exemplo 6

- Um motor de 2,0 CV, aciona o eixo AB a uma rotação de 286 rpm. Determine o torque no eixo CD e a tensão máxima de cisalhamento em cada eixo.



Ao final
dessa aula
você deve
ser capaz de:

Definir torque e suas grandezas

Desenvolver o cálculo do ângulo de torção

Definir e calcular a tensão de cisalhamento

Identificar a importância e consequência prática do momento polar de inércia na resistência à torção

Relembrar as regras de transmissão em polias e engrenagens

Dimensionar eixos a partir do torque e potência a serem transmitidos